Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2016, № 3(123) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.83
MSC 91A05, 91A12, 91A40

JUSTICE IN THE OPTIMAL CHOICE PROBLEM

S. I. Dotsenko, V. V. Semenov
Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko Kiev National University, Kiev, Ukraine, E-mail: sergei204@ukr.net, volodya.semenov@gmail.com.

СПРАВЕДЛИВОСТЬ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА

С. И. Доценко, В. В. Семёнов
Факультет компьютерных наук и кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, E-mail: sergei204@ukr.net, volodya.semenov@gmail.com.

Abstract. The article is devoted to finding optimal solutions in problems of optimal choice for criteria of egalitarianism (justice) and utilitarianism (efficiency). In particular, explicit strategy is obtained in the problem of optimal choice with consistent viewing by two players.
Keywords: optimal choice problem, cooperative decision making, justice, egalitarianism, utilitarianism.

Резюме. Статья посвящена нахождению оптимальных решений в задачах оптимального выбора по критериям эгалитаризма (справедливости) и утилитаризма (эффективности). В частности, получены явные стратегии в задаче оптимального выбора с последовательным просмотром двумя игроками.
Ключевые слова: оптимальный выбор, кооперативное принятие решений, справедливость, эгалитаризм, утилитаризм.

1. Введение

Задача выбора наилучшего объекта на сегодняшний день является одной из классических задач исследования операций. Изначально она была придумана известным популяризатором математики Мартином Гарднером в середине 20-го века как головоломка. Впоследствии оказалось, что данная задача и ее множественные модификации могут служить иллюстративными примерами в теории оптимальной остановки марковских процессов и теории игр [1, 2, 4, 3]).

В данной работе изучается проблема нахождения оптимальных решений в некоторых новых задачах оптимального выбора. В частности, получены явные стратегии в задаче оптимального выбора с последовательным просмотром двумя игроками по критериям эгалитаризма и утилитаризма.

Структура статьи следующая. Во 2-й части рассмотрены понятия эгалитаризма и утилитаризма. В 3-й и 4-й частях приведены основные сведения, касающиеся задачи оптимального выбора. В следующих частях рассмотрены примеры нахождения оптимальных решений в задачах оптимального выбора с двумя агентами по критериям эгалитаризма (справедливости) и утилитаризма (эффективности).

Работа В. В. Семёнова выполнена при финансовой поддержке МОН Украины (проект „Розробка алгоритмів моделювання та оптимізації динамічних систем для оборони, медицини та екології“, 0116U004777).

2. Эгалитаризм и утилитаризм

Следуя [5], обсудим вкратце концепции эгалитаризма и утилитаризма.

Рассмотрим совокупность агентов $\{1, ..., n\}$. Аксиоматическая теория благосостояния Амартии Сена представляет задачу принятия коллективного решения на основе сопоставления каждой допустимой альтернативе (допустимому решению) вектора $(u_1, ..., u_n)$ индивидуальных уровней полезности, где u_i — полезность агента i. Вся необходимая информация заключена во множестве допустимых векторов полезностей. Всякая информация о специфике решений, порождающих множество векторов полезностей, опускается.

При заданном множестве допустимых векторов полезностей коллективное решение является результатом математического детерминированного правила, выделяющего один вектор в качестве выбора сообщества агентов. Это правило выражает всю систему этических представлений сообщества. Рассмотрим два правила, а именно — эгалитаризм (стремление уравнять индивидуальные полезности) и классический утилитаризм (максимизация суммы индивидуальных полезностей).

Классическая утилитарная (от лат. utilitas — польза, выгода) функция имеет вид

$$W_*(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i.$$

Утилитарная программа состоит в максимизации функции W_* на множестве допустимых векторов полезностей

$$W_*(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i \to \max.$$

Она согласуется с принципом единогласия[1]: любой вектор полезностей, максимизирующий W_* на допустимом множестве, будет оптимальным по Парето (эффективным).

Эгалитарная (фр. egalitarisme, от egalite — равенство) функция коллективной полезности имеет вид

$$W_e(u) = \min_{1 \le i \le n} \{u_i\}.$$

[1]Принцип единогласия состоит в том, что если для всех агентов решение x лучше решения y, то последнее не должно быть принято. То есть, должно быть выбрано оптимальное по Парето (эффективное) решение.

Эгалитарная программа состоит в максимизации функции W_e на множестве допустимых векторов полезностей

$$W_e(u) = \min_{1 \le i \le n} \{u_i\} \to \max .$$

Суть этой, максиминной, процедуры состоит в выборе решения, которое бы максимизировало полезность наименее удачливого агента. Это является простым и фундаментальным принципом справедливости. Максиминные решения слабо оптимальны по Парето, по крайней мере одно из которых является оптимумом Парето.

Сопоставление этих двух этических программ проводится, например, в книге [5].

Спор между эгалитаризмом и утилитаризмом является старым. За деталями отошлем к социально философским работам [6, 7].[2]

3. Классическая задача оптимального выбора: краткий обзор

В [1] (см. также [2, 3]) была рассмотрена задача выбора наилучшего объекта, сформулированная следующим образом. Пусть некто в случайном порядке знакомится с n объектами $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и хочет выбрать среди них наилучший. При этом после ознакомления с очередным объектом нужно либо остановить на нем свой выбор, либо отвергнуть его; возвращаться к ранее просмотренным объектам нельзя. Объекты являются упорядоченными определенным образом по качеству, т.е., качества любых двух объектов сравнимы между собой. „Ознакомление в случайном порядке“ означает, что изначально все $n!$ перестановок, задающих порядок просмотра объектов, равновероятны.

Объект, наилучший среди всех n объектов в дальнейшем будем называть **наилучшим**, а объект, лучший среди k просмотренных — **максимальным**. Очевидно, что в ходе просмотра следует анализировать целесообразность остановки выбора на некотором объекте, только если он является максимальным. При этом оказывается, что первый объект является максимальным и индексы максимальных объектов образуют цепь Маркова с

[2] Особенно отметим работу [7], в которой Амартия Сен предлагает критику теорий социальной справедливости, не учитывающих практические реалии. Предметом трансцендентальной теории справедливости является идеально справедливое социальное устройство, определяющее природу идеально справедливого общества. Представители различных подходов — например, утилитаристы, эгалитаристы — могут предлагать свои ответы на вопросы, касающиеся справедливости, и все эти ответы будут совершенно разными. В свете этого Сен призывает принять сравнительный подход к справедливости, позволяющий делать выбор между альтернативами. То есть, Сен, в отличие от многих, уделяет внимание сравнительным суждениям о том, что считается «более» или «менее» справедливым, и сравнительным достоинствам обществ, которые сложились вследствие определенных институтов и социальных взаимодействий. В основе его рассуждений лежит признание обоснованных различий в нашем понимании того, что представляет собой «справедливое общество».

переходными вероятностями

$$p(k,j) = \frac{k}{j(j-1)}, \;\; j > k.$$

Более того, независимо от того, был ли k-й элемент максимальным или нет, вероятность того, что среди элементов с индексами $k+1$, ..., n минимальный индекс максимального элемента будет j, равна $\frac{k}{j(j-1)}$, $j > k$ и с вероятностью $\frac{k}{n}$ в последовательности $k+1$, ..., n не встретится ни одного максимального элемента.

Доказано, что для того, чтобы выбрать наилучший объект из n, нужно придерживаться такой стратегии: вначале пропустить все элементы с индексами 1, ..., k^*-1 и затем остановить свой выбор на первом максимальном элементе, индекс которого не меньший k^*, где k^* определяется из двойного неравенства

$$\frac{1}{k^*} + ... + \frac{1}{n-1} \leq 1 < \frac{1}{k^*-1} + ... + \frac{1}{n-1}.$$

Оказывается, что при $n \to +\infty$ имеем

$$\frac{k}{n} \to \frac{1}{e},$$

а вероятность выбора наилучшего объекта при соблюдении описанной стратегии стремится к $1/e$. Множество индексов элементов, на которых необходимо остановиться, если они окажутся максимальными, будем обозначать $\Gamma^* = \{k^*, ..., n\}$.

4. Обобщение задачи оптимального выбора: выбор объекта с рангом, не ниже заданного

В [4] было рассмотрено обобщение задачи из [1]. Пусть в результате просмотра требуется найти не обязательно наилучший объект, а такой, ранг которого среди n не превышает r (т.е. объект является r-м по качеству среди всех).

Обозначим ранг k-го по счету объекта среди m просмотренных через $R(a_k|m)$. Состояние просмотра будем описывать парой (k,i), где k — номер просматриваемого объекта, i — его ранг среди k просмотренных, т.е., $R(a_k|k) = i$.

В [1] было показано, что если изначально все перестановки a_1, ..., a_n равновероятны, то независимо от взаимного расположения a_1, ..., a_{k-1}, ранг a_k в последовательности a_1, ..., a_k с равными вероятностями $1/k$ принимает одно из возможных значений 1, ..., k (назовем это свойством ($\bigstar$)). Используя это свойство, в [4] было показано, что опорное множество состояний Γ, на которых следует остановить просмотр, обладает такими свойствами

$$(k,i) \in \Gamma \;\Rightarrow\; (k+1,i) \in \Gamma,$$

$$(k,i) \in \Gamma \;\Rightarrow\; (k,i-1) \in \Gamma.$$

В случае, если ценность выбранного объекта зависит от ранга и функция ценности является невозрастающей (т.е., пусть за выбор i-го по качеству объекта $i = \overline{1, r}$ выплачивается выигрыш α_i, причем $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_r$, то указанные свойства опорного множества сохраняются. Поэтому существует набор целых чисел $s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_r \leq n$, такой что

$$\Gamma = \{(s_1, 1), ..., (n, 1)\} \cup \{(s_2, 2), ..., (n, 2)\} \cup ... \cup \{(s_r, r), ..., (n, r)\},$$

а оптимальная стратегия, максимизирующая ожидаемую величину выигрыша, имеет вид:

1) Пропустить все объекты от 1 до $s_1 - 1$.
2) Остановиться на первом максимальном объекте, индекс которого не превышает $s_2 - 1$, а если такового не найдется, то перейти к п. 3.
3) Остановиться на первом объекте, индекс которого не превышает $s_3 - 1$, а ранг не превышает 2, и т.д.

$r + 1$) Начиная с элемента с индексом s_r, остановиться на элементе с рангом, не превышающим r.

Конкретные значения s_1, ..., s_r зависят от n и от α_1, ..., α_r.

Рассмотрим частный случай $r = 2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha \in [0, 1]$. Найдем предельные значения s_1/n и s_2/n при $n \to \infty$ в зависимости от параметра α. Для этого предварительно найдем некоторые вероятности, вычисление которых базируется на свойстве (★) и правилах суммы и произведения вероятностей:

1) Вероятность того, что в ряду $k+1$, $k+2$, ... ближайший максимальный элемент будет иметь индекс j

$$\begin{aligned} P(k, j) = P\left(R(a_{k+1}|k+1) > 1,\, R\left(a_{k+2}|k+2\right) > 1, ...,\right.&\\ \left. R\left(a_{j-1}|j-1\right) > 1,\, R\left(a_j|j\right) = 1\right) =&\\ = P\left(R(a_{k+1}|k+1) > 1\right) \cdot ... \cdot P\left(R\left(a_{j-1}|j-1\right) > 1\right) \cdot P\left(R\left(a_j|j\right) = 1\right) =&\\ = \frac{k}{j(j-1)}.& \end{aligned}$$

2) Вероятность того, что элемент окажется лучшим из n при условии, что он является лучшим из k

$$\begin{aligned} P_1(k, n) = P\left(R(a_k|n) = 1 | R(a_k|k) = 1\right) =&\\ = P\left(R(a_{k+1}|k+1) > 1\right) \cdot ... \cdot P\left(R(a_n|n) > 1\right) = \frac{k}{n}.& \end{aligned}$$

3) Вероятность того, что элемент окажется вторым из n при условии, что он является лучшим среди k

$$P_2(k,n) = P\left(R(a_k|n) = 2|R(a_k|k) = 1\right) =$$
$$= \sum_{j=k+1}^{n} P\left(R(a_{k+1}|k+1) > 1\right) \cdot ... \cdot P\left(R(a_{j-1}|j-1) > 1\right) \times$$
$$\times P\left(R(a_j|j) = 1\right) \cdot P\left(R(a_{j+1}|j+1) > 1\right) \cdot ... \cdot P\left(R(a_n|n) > 1\right) =$$
$$= \frac{k(n-k)}{n(n-1)}.$$

4) Вероятность того, что элемент окажется вторым из n при условии, что он является вторым среди k

$$P_3(k,n) = P\left(R(a_k|n) = 2|R(a_k|k) = 2\right) =$$
$$= P\left(R(a_{k+1}|k+1) > 2\right) \cdot ... \cdot P\left(R(a_n|n) > 2\right) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}.$$

5) Вероятность того, что в ряду $k+1$, $k+2$, ... ближайший максимальный элемент будет иметь индекс j, а все элементы из $k+1$, $k+2$, ..., $j-1$ с индексом не являющимся вторым

$$P_{41}(k,j) = P\left(R(a_{k+1}|k+1) > 2, R\left(a_{k+2}|k+2\right) > 2, ...,\right.$$
$$\left.R\left(a_{j-1}|j-1\right) > 2, R\left(a_j|j\right) = 1\right) =$$
$$= P_{42}(k,j) = P\left(R(a_{k+1}|k+1) > 2, R\left(a_{k+2}|k+2\right) > 2, ...,\right.$$
$$\left.R\left(a_{j-1}|j-1\right) > 2, R\left(a_j|j\right) = 2\right) =$$
$$= P\left(R(a_{k+1}|k+1) > 2\right) \cdot P\left(R\left(a_{k+2}|k+2\right) > 2\right) \times ...$$
$$\times P\left(R\left(a_{j-1}|j-1\right) > 2\right) \cdot P\left(R\left(a_j|j\right) = 1\right) =$$
$$= P\left(R(a_{k+1}|k+1) > 2\right) \cdot P\left(R\left(a_{k+2}|k+2\right) > 2\right) \times ...$$
$$\times P\left(R\left(a_{j-1}|j-1\right) > 2\right) \cdot P\left(R\left(a_j|j\right) = 2\right) =$$
$$= \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{k}{k+2} \cdot ... \cdot \frac{j-3}{j-1} \cdot \frac{1}{j} = \frac{k(k-1)}{j(j-1)(j-2)}.$$

Пусть $f((k,i))$ — средний выигрыш при остановке на элементе (k,i), тогда

$$f((k,1)) = P_1(k,n) \cdot 1 + P_2(k,n) \cdot \alpha = \frac{k}{n} + \alpha\frac{k(n-k)}{n(n-1)},$$
$$f((k,2)) = \alpha P_3(k,n) = \alpha\frac{k(k-1)}{n(n-1)}.$$

Поскольку по определению $(s_2-1,2) \notin \Gamma$, а $(s_2,2)$,..., $(n,2) \in \Gamma$, $(s_2,1)$,..., $(n,1) \in \Gamma$ то

$$f(s_2-1,2) \leq \sum_{j=s_2}^{n} P_{41}\left(s_2-1,j\right) f(j,1) + \sum_{j=s_2}^{n} P_{42}\left(s_2-1,j\right) f(j,2).$$

Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_2}{n} = \gamma$. Тогда после подстановок, элементарных преобразований и перехода к пределу в неравенстве имеем

$$\alpha \le \int_\gamma^1 \frac{1}{t^2}dt + \alpha \int_\gamma^1 \frac{1-t}{t^2}dt + \alpha \int_\gamma^1 \frac{1}{t}dt = \frac{1}{\gamma} - 1 + \alpha\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right). \quad (1)$$

С другой стороны,

$$f(s_2, 2) = P_3(s_2, n) \cdot \alpha \ge \sum_{j=s_2+1}^{n} P_{41}(s_2, j)\, f(j, 1) + \sum_{j=s_2+1}^{n} P_{42}(s_2, j)\, f(j, 2).$$

Отсюда после аналогичных преобразований получим неравенство (1) с противоположным знаком. Таким образом

$$\gamma = \frac{\alpha + 1}{2\alpha + 1}. \quad (2)$$

Исследуем асимптотическое поведение величины $\beta = \frac{s_1}{n}$ при $n \to \infty$. Поскольку $(s_1 - 1, 1) \notin \Gamma$, а $(s_1, 1)$,..., $(n, 1) \in \Gamma$, $(s_2, 2)$,..., $(n, 2) \in \Gamma$, то

$$f(s_1 - 1, 1) \le \sum_{j=s_1}^{s_2-1} P(s_1 - 1, j) \cdot f(j, 1) +$$
$$+ \frac{s_1 - 1}{s_2 - 1} \sum_{j=s_2}^{n} \left(P_{41}(s_2 - 1, j) \cdot f(j, 1) + P_{42}(s_2 - 1, j) \cdot f(j, 2)\right),$$

$$f(s_1, 1) \ge \sum_{j=s_1+1}^{s_2-1} P(s_1, j) \cdot f(j, 1) +$$
$$+ \frac{s_1}{s_2 - 1} \sum_{j=s_2}^{n} \left(P_{41}(s_2 - 1, j) \cdot f(j, 1) + P_{42}(s_2 - 1, j) \cdot f(j, 2)\right).$$

Переход к пределу в данных неравенствах приводит к равенству

$$1 + \alpha - \alpha\beta = (1 + \alpha) \ln\left(\frac{\gamma}{\beta}\right) + \alpha\beta,$$

отсюда β — корень уравнения

$$\frac{2\alpha}{\alpha + 1}\beta - \ln\beta = 1 - \ln\left(\frac{\alpha + 1}{2\alpha + 1}\right). \quad (3)$$

При этом вероятности того, что выбранный элемент является первым (вторым) сходятся к таким величинам:

$$\pi_1 = \sum_{j=s_1}^{s_2-1} P(s_1 - 1, j) P_1(j, n) + P_1(s_1 - 1, s_2 - 1) \sum_{j=s2}^{n} P_{41}(s_2 - 1, j)\, P_1(j, n),$$

$$\pi_1 \overset{n\to\infty}{\to} \beta \ln\left(\frac{\gamma}{\beta}\right) + \beta(1 - \gamma) = \beta\left(\frac{\alpha}{2\alpha + 1} + \ln\left(\frac{\alpha + 1}{2\alpha + 1}\right) - \ln\beta\right),$$

$$\pi_2=\sum_{j=s_1}^{s_2-1}P(s_1-1,j)P_2\left(j,n\right)+P\left(s_1-1,s_2-1\right)\times$$
$$\times\left(\sum_{j=s_2}^{n}\left(P_{41}\left(s_2-1,j\right)\cdot P_2\left(j,n\right)+P_{42}\left(s_2-1,j\right)\cdot P_3\left(j,n\right)\right)\right),$$

$$\pi_2\overset{n\to\infty}{\to}\beta\ln\frac{\gamma}{\beta}-\beta\left(\gamma-\beta\right)+\beta\left(1-\gamma\right)=\beta\left(\ln\left(\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}\right)-\ln\beta+\beta-\frac{1}{2\alpha+1}\right),$$

а средняя величина выигрыша с учетом (3) равна

$$v=\pi_1+\alpha\pi_2=\beta\left(1+\alpha-\alpha\beta\right).$$

Обозначим предельные значения

$$\left.\begin{aligned}g_1(\alpha,\beta)&=\beta\left(\tfrac{\alpha}{2\alpha+1}+\ln\left(\tfrac{\alpha+1}{2\alpha+1}\right)-\ln\beta\right),\\ g_2\left(\alpha,\beta\right)&=\beta\left(\ln\left(\tfrac{\alpha+1}{2\alpha+1}\right)-\ln\beta+\beta-\tfrac{1}{2\alpha+1}\right).\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Назовем $1-2$ стратегией такую последовательность действий. Пусть задано $0\le\alpha\le 1$ — отношение важности второго по качеству элемента к важности наилучшего. Найдем β и γ по формулам (3) и (2). В ходе просмотра придерживаемся такой стратегии:

1) Пропустить все элементы от 1 до $\beta n-1$.
2) При просмотре элементов с номерами от βn до $\gamma n-1$ остановиться на первом максимальном элементе, если таковой найдется, иначе перейти к п.3.
3) При просмотре элементов с номерами от γn до n остановиться на первом элементе, текущий ранг которого не превышает 2.

5. Справедливое и эффективное решение в задаче оптимального поиска первого или второго по качеству элемента

Рассмотрим задачу поиска эффективного и справедливого распределения в задаче оптимального выбора, где в качестве объектов, относительно которых ищется эффективное или справедливое решение, выступают первый и второй по качеству элементы.

Эффективное решение, максимизирующее суммарную вероятность нахождения первого или второго элемента как частный случай нахождения элемента ранга не ниже 2 при $\alpha=1$ (по сути это означает, что первый и второй по качеству элементы имеют одинаковую ценность).

Тогда из формул (2), (3) следует, что $\gamma=2/3$, β^* — корень уравнения

$$\frac{2}{3}\beta-\ln(\beta)=1-\ln\left(\frac{2}{3}\right),\ \ \beta^*\approx 0.299.$$

Согласно (4) выигрыши игроков составляют соответственно $g_1(1,\beta^*)\approx 0.339$, $g_2(1,\beta^*)\approx 0.229$, а суммарный выигрыш составляет 0.568.

Найдем справедливое решение, максимизирующее минимум из вероятностей выбора наилучшего и второго по качеству элементов.

Имеем

$$\pi_1 = \sum_{j=s_1}^{s_2-1} P(s_1-1,j)P_1(j,n)+P_1\left(s_1-1,s_2-1\right)\sum_{j=s_2}^{n} P_{41}\left(s_2-1,j\right)P_1\left(j,n\right) =$$

$$= \sum_{j=s_1}^{s_2-1} \frac{s_1-1}{j(j-1)}\frac{j}{n} + \left(\frac{s_1-1}{s_2-1}\right)\sum_{j=s_2}^{n}\frac{(s_2-1)(s_2-2)}{j(j-1)(j-2)}\cdot\frac{j}{n} =$$

$$= \frac{s_1-1}{n}\sum_{j=s_1}^{s_2-1}\frac{1}{j-1} + \frac{(s_1-1)(s_2-1)}{n}\sum_{j=s_2}^{n}\frac{1}{(j-1)(j-2)}.$$

Поскольку $P_{41}(i,j) = P_{42}(i,j) = P_4(i,j)$, то

$$\pi_2 = \sum_{j=s_1}^{s_2-1} P(s_1-1,j)P_2\left(j,n\right) + P\left(s_1-1,s_2-1\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{j=s_2}^{n}\left(P_{41}\left(s_2-1,j\right)\cdot P_2\left(j,n\right) + P_{42}\left(s_2-1,j\right)\cdot P_3\left(j,n\right)\right)\right) =$$

$$= \sum_{j=s_1}^{s_2-1}\frac{s_1-1}{j(j-1)}\cdot\frac{j(n-j)}{n(n-1)} +$$

$$+\left(\frac{s_1-1}{s_2-1}\right)\sum_{j=s_2}^{n}\frac{(s_1-1)(s_2-1)}{j(j-1)(j-2)}\left(\frac{j(n-j)}{n(n-1)}+\frac{j(j-1)}{n(n-1)}\right) =$$

$$= \frac{s_1-1}{n(n-1)}\cdot\sum_{s_1}^{s_2-1}\frac{n-j}{j-1} + \frac{(s_1-1)(s_2-1)}{n}\sum_{j=s_2}^{n}\frac{1}{(j-1)(j-2)}.$$

Предельные значения для π_1, π_2 при $n \to +\infty$ имеют вид

$$\pi_1 \to \beta\int_\beta^\gamma \frac{1}{t}dt + \beta\gamma\int_\gamma^1 \frac{1}{t^2} = \beta\left[\ln\left(\gamma\right) - \ln\left(\beta\right) - \gamma + 1\right],$$

$$\pi_2 \to \beta\int_\beta^\gamma \frac{1-t}{t}dt + \beta\gamma\int_\gamma^1 \frac{1}{t^2}dt = \beta\left[\ln(\gamma) - \ln(\beta) - 2\gamma + \beta + 1\right].$$

Заметим, что

$$\pi_1\left(\beta,\gamma\right) - \pi_2\left(\beta,\gamma\right) = \beta(\gamma-\beta) \geq 0,$$

т.е.,

$$\pi_1\left(\beta,\gamma\right) \geq \pi_2\left(\beta,\gamma\right),$$

следовательно, задача

$$\min\left(\pi_1\left(\beta,\gamma\right),\pi_2\left(\beta,\gamma\right)\right) \to \max,\;\; 0 \leq \beta \leq \gamma \leq 1$$

эквивалентна задаче

$$\pi_2\left(\beta,\gamma\right) \to \max,\;\; 0 \leq \beta \leq \gamma \leq 1.$$

Функция π_2 достигает максимума на множестве $\{(\beta,\gamma) : 0 \le \beta \le \gamma \le 1\}$ в точке $(1/2, 1/2)$ и стратегия, обеспечивающая справедливость выбора относительно наилучшего и второго по рангу элемента, будет такой: пропустить половину элементов, затем остановить выбор на первом либо втором по рангу элементе среди просмотренных. При этом выигрыши игроков составляют

$$\pi_1\,(1/2, 1/2) = \pi_2\,(1/2, 1/2) = 1/4.$$

6. Справедливое и эффективное решение в задаче оптимального выбора с последовательным просмотром двумя игроками

Рассмотрим задачи справедливого и эффективного поиска наилучшего элемента для двух игроков в статическом случае. Здесь статичность означает, что диапазоны элементов, в которых игрокам разрешен поиск определяются заранее, до начала поиска.

Пусть первому игроку разрешен поиск в диапазоне $[k_1, k_2]$, а второму — в $[k_2 + 1, n]$.

Обозначим сотношения k_1/n и k_2/n через t_1 и t_2 соответственно.

Тогда выигрыш 1-го игрока составляет

$$V_1(t_1, t_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} \frac{k_1 - 1}{i(i-1)} \frac{i}{n} = \frac{k_1 - 1}{n} \sum_{i=k_1}^{k_2} \frac{1}{i-1} \sim -t_2 \ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right).$$

Пусть t_2 фиксировано, тогда найдем максимум $V_1(t_1, t_2)$ по t_1, где $0 \le t_1 \le t_2$.

Максимум $\max\limits_{0 \le t_1 \le t_2} \left(t_1 \ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right)\right)$ достигается при $t_1^*(t_2) = \frac{t_2}{e}$ и равен $\frac{t_2}{e}$.

Выигрыш 2-го игрока составляет

$$V_2(t_2) = \sum_{i=k_2+1}^{n} \frac{k_2}{i(i-1)} \frac{i}{n} = \frac{k_2}{n} \sum_{i=k_2+1}^{n} \frac{1}{i-1} \sim -t_2 \ln(t_2).$$

Тогда задача нахождения справедливого решения приобретает вид

$$\min_{1/e \le t2 \le 1} \left(V_1\left(t_1^*(t_2), V_2(t_2)\right)\right) = \min_{1/e \le t_2 \le 1} \left(t_2/e,\ -t_2 \ln(t_2)\right) \to \max.$$

На интервале $[1/e, 1]$ функция $V_1\left(t_1^*(t_2), t_2\right)$ монотонно возрастает, а $V_2(t_2)$ монотонно убывает по t_2, причем выражение $V_1(t) - V_2(t)$ на концах интервала принимает противоположные знаки, значит минимум достигается тогда, когда $V_1\left(t_1^*(t_2), t_2\right)$ и $V_2(t_2)$ равны между собой.

Уравнение

$$\frac{t}{e} = -t \cdot \ln t$$

на интервале $[1/e, 1]$ имеет единственный корень $t^* = \exp(-1/e) \approx 0.692$, отсюда $t_1^* = t^*/e \approx 0.255$, $t_2^* = t^* \approx 0.692$, искомые выигрыши каждого из игроков составляют 0.255, а суммарный выигрыш равен 0.51.

Задача нахождения эффективного решения имеет вид

$$\frac{t_2}{e} - t_2 \ln t_2 \to \max, \;\; t_2 \in [1/e, 1] \,.$$

Приравнивание производной к нулю приводит к уравнению $\ln t = \frac{1}{e} - 1$, при переходе через точку $t_2^* = \exp\left(\frac{1}{e} - 1\right)$ производная меняет знак с плюса на минус, значит, максимальный суммарный выигрыш достигается при $t_1^* {=} \exp\left(\frac{1}{e} - 2\right) {\approx} 0.196$, $t_2^* {=} \exp\left(\frac{1}{e} - 1\right) \approx 0.531$ и равен $\exp\left(\frac{1}{e} - 1\right) {\approx} 0.531$, при этом выигрыши игроков составляют $V_1^* = \exp\left(\frac{1}{e} - 2\right) \approx 0.196$, $t_2^* = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \exp\left(\frac{1}{e} - 1\right) \approx 0.336$.

Рассмотрим динамический случай. Динамичность в данном контексте означает, что номер, начиная с которого второй игрок осуществляет остановку на максимальном элементе, не задается заранее, а зависит от номера элемента, на котором остановился первый игрок.

Пусть первый игрок придерживается стратегии „остановиться на первом максимальном элементе, начиная с k_1“. После того, как первый игрок закончил свой выбор, второму игроку для того, чтобы максимизировать свой выигрыш, следует придерживаться стратегии „остановиться на первом максимальном элементе, начиная с $\max(k_1^{'}, k^*)$“, где $k_1^{'}$ — номер следующего за элементом, на котором остановился первый игрок, $k^* \sim n/e$ — номер элемента, начиная с которого нужно останавливаться на первом максимальном элементе в классическом случае.

Найдем выигрыши игроков. Выигрыш 1-го игрока составляет

$$V_1(t_1) = \sum_{i=k_1+1}^{n} \frac{k_1}{i(i-1)} \frac{i}{n} = \frac{k_1}{n} \sum_{i=k_1+1}^{n} \frac{1}{i-1} \sim -t_1 \ln(t_1).$$

Выигрыш второго игрока найдем по формуле полной вероятности. Вероятность того, что первому игроку встретится максимальный элемент в диапазоне k_1, ..., k^*-1 (и он таким образом не будет мешать выбору максимального элемента вторым игроком в диапазоне номеров k^*, ..., n) равна

$$\sum_{i=k_1}^{k^*-1} \frac{k_1 - 1}{i(i-1)} \sim t_1 \int_{t_1}^{1/e} \frac{1}{t^2} dt = 1 - e t_1.$$

Значит, с дополнительной вероятностью et_1 первому игроку не встретится максимальный элемент k_1, ..., $k^* - 1$ (и он таким образом „залезет“ в диапазон номеров k^*, ..., n выбора максимального элемента вторым игроком, и частично „урежет“ этот диапазон, либо же, дойдя до последнего элемента, вовсе лишит второго игрока возможности выбора).

Чтобы вычислить условную вероятность выбора наилучшего элемента вторым игроком при условии, что первый игрок „залезает“ в его диапазон выбора, запишем сумму по всем возможным индексам i, j, где $k^* + 1 \le i < j \le n$ произведений вероятности того, что 1-й игрок, придерживаясь стратегии „остановиться на первом максимальном элементе, начиная с начиная с k^*“,[3] остановится на некотором элементе i, где $i \geq k^*$,[4] на условную вероятность того, что второй игрок, придерживаясь стратегии „остановиться на первом максимальном элементе после i“, остановится на элементе с номером j, $j > i$ и условной вероятности того, что элемент с номером j будет наилучшим, при условии, что он оказался максимальным[5]

$$\sum_{i=k^*+1}^{n} \frac{k^*}{i(i-1)} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{i+1}{j(j-1)} \frac{j}{n} = \frac{k^*}{n} \sum_{i=k^*}^{n} \frac{i+1}{i(i-1)} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{j-1} \sim$$

$$\sim \frac{1}{e} \int_{1/e}^{1} \frac{1}{u} \int_{u}^{1} \frac{1}{v} dv\, du = -\frac{1}{e} \int_{1/e}^{1} \frac{\ln u}{u}\, du = \frac{1}{2e}.$$

Таким образом, величина выигрыша второго игрока стремится к величине

$$V_2(t_1) = (1 - et_1)\frac{1}{e} + et_1 \left(\frac{1}{2e}\right) = \frac{1}{e} - \frac{t_1}{2}.$$

Тогда задача нахождения справедливого решения приобретает вид

$$\min_{0 \leq t_1 \leq 1/e} (V_1(t_1), V_2(t_1))) = \min_{0 \leq t_1 \leq 1/e} \left(-t_1 \ln(t_1),\ \frac{1}{e} - \frac{t_1}{2}\right) \to \max$$

Поскольку на заданном интервале $[0, 1/e]$ функция $V_1(t)$ монотонно возрастает, а $V_2(t)$ — монотонно убывает, и при этом разность $V_1(t) - V_2(t)$ на концах данного интервала имеет противоположные знаки, то минимум двух функций достигает максимума тогда, когда они равны между собой. Имеем $V_1(t) = V_2(t)$ при $t^* \approx 0.156$, при этом выигрыши игроков составляют $V_1(t^*) = V_2(t^*) \approx 0.29$ и тогда их суммарный выигрыш приблизительно равен 0.58.

Задача нахождения эффективного решения имеет вид

$$-t \ln(t) + \frac{1}{e} - \frac{t}{2} \to \max,\ \ t \in [0, 1/e].$$

Приравнивание производной к нулю приводит к уравнению $-\ln(t) - \frac{3}{2} = 0$, при переходе через точку $t_2^* = e^{-3/2}$ производная меняет знак с плюса на минус, значит, максимальный суммарный выигрыш достигается при $t_1^* = \exp\left(-\frac{3}{2}\right) \approx 0.223$ и равен $e^{-1} + e^{-3/2} \approx 0.591$, при этом выигрыши игроков составляют $V_1^* = \frac{3}{2}e^{-3/2} \approx 0.335$, $V_2^* = e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-3/2} \approx 0.256$.

7. Справедливое и эффективное решение в задаче оптимального выбора наилучшего или наихудшего элемента

Рассмотрим задачу оптимального выбора, в которой с максимальной вероятностью нужно выбрать либо наилучший, либо наихудший по качеству элемент.

[3] Поскольку он не остановился на максимальном элементе с номером из диапазона k_1, ..., $k^* - 1$.

[4] Вероятность такого события равна $\frac{k^*-1}{i(i-1)}$.

[5] Эта вероятность равна $\frac{j}{n}$.

Будем называть экстремальным элемент, если он является либо наилучшим, либо наихудшим среди просмотренных.

Поскольку все перестановки равновероятны, то k-й просматриваемый элемент является экстремальным с вероятностью $\frac{2}{k}$, $k \geq 2$ и не является таковым с дополнительной вероятностью. Условная вероятность того, что k-й элемент является наилучшим либо наихудшим при условии, что он является экстремальным, такая же, как и аналогичная вероятность для классической задачи[6] и равна $\frac{k}{n}$.

Оказывается, что, подобно классической задаче, множество индексов экстремальных элементов, появляющихся в ходе просмотра, начиная со второго элемента, образует цепь Маркова, только переходные вероятности между элементами цепи будут уже другими.

Пусть j — индекс экстремального элемента, k — индекс следующего за ним экстремального элемента, тогда переходная вероятность $p(k, j)$ равна произведению вороятностей того, что элемент с индексом j — экстремальный, а все элементы с индексами с $k+1$ по $j-1$ — нет

$$p(k,j) = \left(1 - \frac{2}{k+1}\right)\left(1 - \frac{2}{k+2}\right)\dots\left(1 - \frac{2}{j-1}\right)\frac{2}{j} = \\ = \frac{k-1}{k+1}\frac{k}{k+2}\dots\frac{j-3}{j-1}\frac{2}{j} = 2\frac{(k-1)k}{j(j-1)(j-2)}.$$

Пусть k-й элемент является экстремальным. Тогда вероятность того, что он окажется экстремальным среди всех элементов равна $f(k) = \frac{k}{n}$, а вероятность того, что следующий за k-м экстремальный элемент окажется экстремальным среди всех, согласно формуле полной вероятности, равна

$$\varphi(k) = \sum_{j=k+1}^{n} p(k,j) f(j) = \sum_{j=k+1}^{n} 2\frac{(k-1)k}{j(j-1)(j-2)} \cdot \frac{j}{n} = \\ = 2\frac{(k-1)k}{n}\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{(j-1)(j-2)} = \\ = 2\frac{(k-1)k}{n}\sum_{j=k+1}^{n}\left(\frac{1}{j-2} - \frac{1}{j-1}\right) = \\ = 2\frac{(k-1)k}{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{n-1}\right) = 2\frac{k}{n}\left(1 - \frac{k-1}{n-1}\right).$$

Неравенство $f(k) \geq \varphi(k)$ равносильно неравенству $k \geq \frac{n+1}{2}$.

Следовательно, оптимальная стратегия выбора экстремального элемента заключается в том, чтобы пропустить все элементы с индексами $k < \frac{n+1}{2}$ и остановиться на первом экстремальном элементе при $k \geq \frac{n+1}{2}$.

[6] Там рассматривается условная вероятность того, что элемент наилучший при условии, что он максимальный среди k.

Вероятность выбора экстремального элемента для оптимальной стратегии при четном и нечетном n равны соответственно

$$\varphi\left(\frac{n}{2}\right) = \sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n} p\left(\frac{n}{2}, j\right) f(j) =$$

$$= \sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n} 2\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{n}{2}}{j(j-1)(j-2)} \cdot \frac{j}{n} = 1 - \frac{1}{2}\frac{n-2}{n-1},$$

$$\varphi\left(\frac{n-1}{2}\right) = \sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n} p\left(\frac{n-1}{2}, j\right) f(j) =$$

$$= \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n} 2\frac{\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\frac{n-1}{2}}{j(j-1)(j-2)} \cdot \frac{j}{n} = \frac{n-1}{n}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{n-3}{n-1}\right).$$

В обоих случаях при $n \to \infty$ суммарный выигрыш стремится к $1/2$, а выигрыш каждого из игроков — к $1/4$.

Найденная оптимальная стратегия является эффективной, т.е., она максимизирует суммарную вероятность выбора наилучшего или наихудшего элемента.

Поскольку в силу симметрии вероятности нахождения наилучшего и наихудшего элемента равны между собой, то вместе с тем данная стратегия одновременно является и справедливой.[7]

Литература

1. Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А. Теоремы и задачи о процессах Маркова. — Москва: Наука, 1967. — 232 с.
2. Гусейн-Заде С. М. Разборчивая невеста. — Москва: МЦНМО, 2012. — 24 с.
3. Мазалов В. В. Математическая теория игр и приложения. — Санкт-Петербург: Лань, 2016. — 448 с.
4. Гусейн-Заде С. М. Задача выбора и оптимальное правило остановки последовательности независимых испытаний // Теория вероятности и приложения. — 1966. — 11, 3. — С. 534–537.
5. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: алгоритмы и модели. — Москва: Мир, 1991. — 464 с.
6. Ролз Дж. Теория справедливости. — Москва: Изд-во ЛКИ, 2010. — 536 с.
7. Сен А. Идея справедливости. — Москва: Изд-во Института Гайдара, 2016. — 520 с.

Поступила 02.12.2016

[7]Суммарный выигрыш достигает максимума и при этом делится поровну.