

УДК 519.85

MSC XXX.XXX

ON ELLIPSE PACKING PROBLEM

ALEKSANDER PANKRATOV, TATIANA ROMANOVA, OLGA KHLUD

Institute for Problems in Machinery of National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkov, Ukraine, E-mail: sherom@kharkov.ua.

О ЗАДАЧЕ УПАКОВКИ ЭЛЛИПСОВ

А. В. ПАНКРАТОВ, Т. Е. РОМАНОВА, О. М. ХЛУД

Институт проблем машиностроения НАН Украины им. А. Н. Подгорного, Харьков, Украина, E-mail: sherom@kharkov.ua.

АБСТРАКТ. We consider a packing problem of arbitrary ellipses in a container of minimal area. Continuous translations and rotations of ellipses are allowed. New radical free phi-functions for approximated by circular arcs ellipses are employed, which allow us to describe placement (nonoverlapping and containment) constraints analytically. We present an exact mathematical model of our problem in the form of continuous nonlinear programming problem (NLP-model). We develop the efficient algorithm to search for „good“ feasible arrangements of ellipses for considerably smaller computational time than the known analogs. The proposed approach allows us to pack the large number of ellipses (up to 1000). Computational results are given for packing ellipses in rectangular and circular containers. **KEYWORDS:** packing, ellipses, continuous rotations, phi-functions, mathematical model, nonlinear optimisation.

РЕЗЮМЕ. Рассматривается задача оптимальной упаковки произвольных эллипсов в контейнере минимальной площади. Допускаются непрерывные трансляции и вращения эллипсов. Предлагаются новые, свободные от радикалов phi-функции для эллипсов, аппроксимированных дугами окружностей, которые используются для аналитического описания основных ограничений размещения (непересечение эллипсов и включение эллипсов в контейнер). Строится математическая модель задачи в виде задачи нелинейного программирования (NLP-model). Предлагается эффективный алгоритм, позволяющий получать „хорошие“ допустимые упаковки эллипсов за значительно меньшее время, чем известные аналоги. Предложенный подход позволяет упаковывать большое число эллипсов (до 1000). Приводятся результаты численных экспериментов упаковки эллипсов в прямоугольном и круговом контейнерах.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: упаковка, эллипсы, непрерывные вращения, phi-функции, математическая модель, нелинейная оптимизация.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи упаковки и раскроя, называемые также задачами оптимального размещения [1], относятся к классу NP-сложных задач [2] и является частью теории исследования операций и вычислительной геометрии. Задачи размещения имеют широкий спектр научных и практических применений, в том числе в современной биологии, минералогии, медицине, материаловедении, нанотехнологии, робототехнике, системах распознавания образов, в химической промышленности, машиностроении, строительстве и т.д.

Предметом исследования данной статьи является задача упаковки заданного набора эллипсов в контейнере минимальной площади.

В работе [3] излагается метод решения задачи упаковки истинных эллипсов (без аппроксимаций), допускающих вращения, с использованием современных NLP solvers, доступных в GAMS. В этой статье приводится достаточно подробный обзор литературы, посвященный задачам упаковки эллипсов. Получено глобальное решение для небольшого числа эллипсов $n \leq 4$. Однако при $n > 14$ авторам не удалось получить даже допустимого решения. В этой связи авторы предложили эвристический polyhedral алгоритм для размещения большего числа эллипсов ($n \leq 100$) в прямоугольной области.

Подход, основанный на описании отношений непересечения между эллипсами при помощи свободных от радикалов квази-phi-функций, предложен в [4] и реализован в [5]. В результате удалось представить задачу оптимальной упаковки эллипсов в виде задачи нелинейного программирования и получить локально оптимальные решения при $n \leq 120$, улучшив результаты по времени и значению функции цели для многих примеров ($5 \leq n \leq 100$), приведенных в статье [3].

В работе [6] рассматривается задача упаковки эллипсоидов в R^n , $n = 2, 3$. Предлагаются два разных способа формализации условия непересечения эллипсоидов: первый основан на использовании разделяющей гиперплоскости, второй — на использовании аффинного преобразования пространства, отображающего эллипсы в шары. Построена модель нелинейного программирования для задач упаковки эллипсоидов. Для поиска допустимых решений используется комбинация стратегии мульти-старта и программных средств решения задач нелинейного программирования. Авторы улучшили результаты по времени и значению функции цели для многих примеров, приведенных в статьях [3, 4].

Однако подходы, предложенные в [3], [5] и [6], являются довольно ресурсоемкими, причем в общем случае размерность задачи и время решения растут экспоненциально с ростом числа размещаемых эллипсов.

В работах [7, 8] используются свободные от радикалов phi-функции [9] для моделирования отношений между эллипсами, аппроксимированными дугами окружностей. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что приближенное решение получается за значительно меньшее время, чем требуется для получения локальных экстремумов упаковки истинных эллипсов, и при этом незначительно отличается значение функции цели.

Кроме того, полученное за разумное время достаточно хорошее приближенное решение задачи упаковки эллипсов может быть также использовано в качестве допустимой стартовой точки для локальной оптимизации. Комбинированный подход позволяет получать локально-оптимальные решения за меньшее время, чем применение методов локальной оптимизации для упаковки эллипсов [10].

В статье [10] использована универсальная методология [9] для решения задачи упаковки эллипсов. В соответствии с указанной методологией размещаемые объекты представляются в виде объединения так называемых базовых объектов. В работе [7] доказано, что произвольный объект, ограниченный дугами окружностей и отрезками прямых, может быть представлен в виде объединения базовых объектов. Описание отношений между каждой парой объектов осуществляется с помощью ϕ -функции, представляющей собой минимум ϕ -функций для всех пар базовых объектов, формирующих исходные объекты. Разработан генератор пространства решений, который позволяет свести решение задачи негладкой оптимизации к решению последовательности задач нелинейного программирования с гладкими функциями. Предложенный универсальный подход показывает очень хорошие результаты по значению функции цели для известных тестовых примеров. Однако цена за универсальность — высокий расход вычислительных ресурсов.

Разработка эффективных оптимизационных алгоритмов для упаковки эллипсов остается актуальной проблемой.

В данном исследовании предлагается быстрый алгоритм поиска допустимых решений для задач упаковки эллипсов в прямоугольном и круговом контейнерах минимальной площади с использованием достаточно простых ϕ -функций [11], предназначенных для моделирования отношений непересечения эллипсов и принадлежности эллипса контейнеру.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется набор эллипсов $\widehat{E}_i, i \in \{1, 2, \dots, n\} = I_n$. Каждый эллипс \widehat{E}_i задан большой и малой полуосями a_i и b_i . Полагаем, что начало собственной системы координат эллипса \widehat{E}_i совпадает с центром его симметрии. Положение эллипса \widehat{E}_i характеризуется вектором трансляции (x_i, y_i) и углом поворота θ_i . Обозначим через $\widehat{E}_i(x_i, y_i, \theta_i)$ эллипс, повернутый на угол θ_i и транслированный на вектор (x_i, y_i) . В качестве контейнера Ω в данном исследовании рассматривается прямоугольник переменной длины l и ширины w или круг минимального радиуса R^C .

Задача оптимальной упаковки эллипсов. Упаковать заданный набор эллипсов $\widehat{E}_i(x_i, y_i, \theta_i), i \in I_n$ в контейнер Ω минимальной площади.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ РАЗМЕЩЕНИЯ

Для моделирования условия непересечения эллипсов $(\text{int } \widehat{E}_i(x_i, y_i, \theta_i) \cap \text{int } \widehat{E}_j(x_j, y_j, \theta_j) = \emptyset)$ и условия принадлежности эллипса контейнеру

$(\widehat{E}_i(x_i, y_i, \theta_i) \subset \Omega \Leftrightarrow \text{int } \widehat{E}_i(x_i, y_i, \theta_i) \cap \Omega^*, \Omega^* = \mathbb{R}^2 \setminus \text{int } \Omega)$ используются новые ϕ -функции, построенные для эллипсов, аппроксимированных дугами окружностей. Предложенные в данной работе ϕ -функции значительно проще, чем ϕ -функции, используемые в [10].

Аппроксимация эллипса дугами окружностей. Пусть эллипс \widehat{E} с переменными параметрами размещения $u = (x, y, \theta)$ задан большой полуосью a и малой полуосью b . Следуя работе [10], построим внешнюю аппроксимацию эллипса \widehat{E} объектом E , ограниченным дугами окружностей с „вершинами“ в точках $v_1(-b'r - d, a'r)$, $v_2(b'r + d, a'r)$, $v_3(-b'r - d, -a'r)$, $v_4(b'r + d, -a'r)$, где $r = a - d$, $d = \frac{(a-b)(a+b+\sqrt{a^2+b^2})}{2a}$, $a' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $b' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (Рис. 1). При этом дуги $\text{arc}(v_1, v_2)$ и $\text{arc}(v_3, v_4)$ принадлежат окружностям frC_1 и frC_2 радиуса $r = a - d$ с центрами в точках $O_1(-d, 0)$ и $O_2(+d, 0)$, а дуги $\text{arc}(v_2, v_3)$ и $\text{arc}(v_4, v_1)$ — окружностям frC_3 и frC_4 радиуса $R = b + \frac{a}{b}d$ с центрами в точках $O_3(0, +\frac{a}{b} \cdot d)$ и $O_4(0, -\frac{a}{b} \cdot d)$ (Рис. 1).

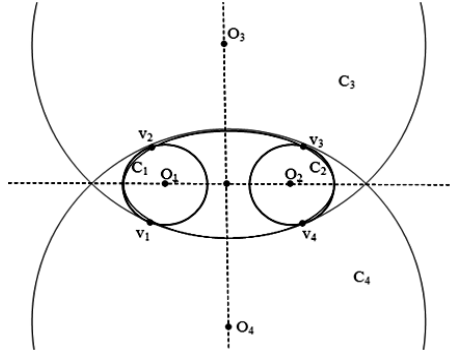


Рис 1. Объект E (аппроксимация эллипса \widehat{E} дугами окружностей)

Рассмотрим ϕ -функции, необходимые для моделирования условия включения $E_i(x_i, y_i, \theta_i) \subset \Omega \Rightarrow \widehat{E}_i(x_i, y_i, \theta_i) \subset \Omega$ для случая прямоугольного и кругового контейнеров.

Φ -функция для аппроксимированного эллипса и дополнения до внутренности прямоугольника. Дополнение до внутренности прямоугольного контейнера Ω может быть представлено в виде объединения четырех полуплоскостей P_1, P_2, P_3, P_4 . Поскольку $\Omega^* = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$, то ϕ -функция, используемая для формализации условия принадлежности объекта E прямоугольному контейнеру Ω , может быть описана так

$$\Phi^{E\Omega^*} = \min\{\Phi^{EP_1}, \Phi^{EP_2}, \Phi^{EP_3}, \Phi^{EP_4}\}, \quad (1)$$

где Φ^{EP} — ϕ -функция для объекта E и полуплоскости P , которая имеет вид

$$\Phi^{EP} = \max\{\Phi^{AP}, \Phi^{C_3P}, \Phi^{C_4P}\},$$

$\Phi^{AP} = \min\{\Phi^{C_1P}, \Phi^{C_2P}, \Phi^{C_AP}\}$ — ϕ -функция для объекта $A = C_1 \cup C_2 \cup C_A$ и полуплоскости P , $\Phi^{C_1P}, \Phi^{C_2P}, \Phi^{C_3P}, \Phi^{C_4P}, \Phi^{C_AP}$ — ϕ -функции для

соответствующего круга и полуплоскости P , C_A – вспомогательный круг радиуса

$$r_A = r + b'd \quad (2)$$

с центром в точке O (Рис. 2).

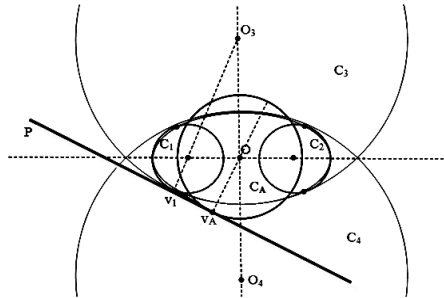


Рис 2. Построение вспомогательного круга C_A

Радиус r_A (2) вспомогательного круга C_A вычисляется из следующих соображений. Пусть объект E касается полуплоскости P в одной из точек v_1, v_2, v_3 или v_4 (например, v_1). Величина радиуса r_A круга C_A выбирается таким образом, что объект A имеет две точки касания с плоскостью P – точку v_1 касания круга C_1 с плоскостью P и точку v_A касания круга C_A с плоскостью P (Рис. 2), что обеспечивает гладкость функции Φ^{EP} .

На рисунке 3 приведены различные ситуации, когда $\Phi^{EP} > 0$ (Рис. 3а), $\Phi^{EP} < 0$ (Рис. 3б), $\Phi^{EP} = 0$ (Рис. 3в).

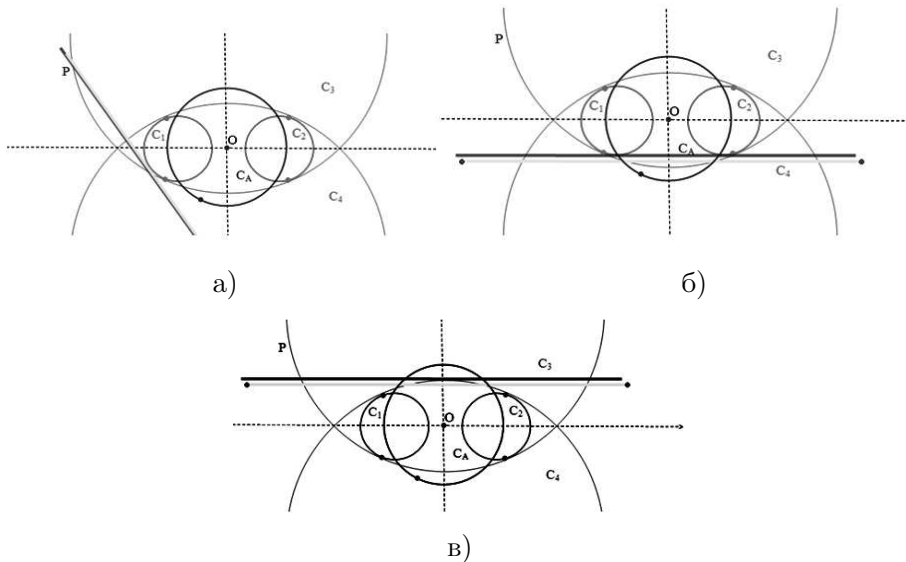


Рис 3. Различные ситуации взаимного расположения объекта E и полуплоскости P : а) $\Phi^{EP} > 0$: $\Phi^{C_3P} < 0, \Phi^{C_4P} < 0, \Phi^{AP} > 0$; б) $\Phi^{EP} < 0$: $\Phi^{C_3P} < 0, \Phi^{C_4P} < 0, \Phi^{AP} < 0$; в) $\Phi^{EP} = 0$: $\Phi^{C_3P} < 0, \Phi^{C_4P} = 0, \Phi^{AP} < 0$

Phi-функция для аппроксимированного эллипса и дополнения до внутренности круга. Пусть для аппроксимации эллипса E , заданного полуосями a и b с координатами центра (x, y) , построены круги C_1, C_2 радиуса r и круги C_3, C_4 радиуса R (Рис.1). И пусть C — круговой контейнер радиуса R^C . Тогда phi-функция объектов E и $C^* = \mathbb{R}^2 \setminus \text{int}C$ определяется следующим образом.

Если $R^C \leq R$, то

$$\Phi^{EC^*} = \min\{\Phi^{C_1C^*}, \Phi^{C_2C^*}\}. \quad (3)$$

Если $R^C > R$, то

$$\Phi^{EC^*} = \max\{\Phi^{C_3C^*}, \Phi^{C_4C^*}, \phi\}, \quad (4)$$

где $\phi = \min\{\Phi^{C_1C^*}, \Phi^{C_2C^*}, \Phi^{C_A C^*}\}$, C_A — вспомогательный круг радиуса r_A с центром в точке O (Рис. 4),

$$\Phi^{C_A C^*} = (R^C - r_A)^2 - x^2 - y^2 = (R^C - y')^2 + x'^2 - x^2 - y^2,$$

$$x' = \frac{t}{d}, t = 0.5(a - b)(a + b + d), d = \sqrt{a^2 + b^2}, y' = a - \frac{t}{a}(1 + \frac{b}{d}).$$

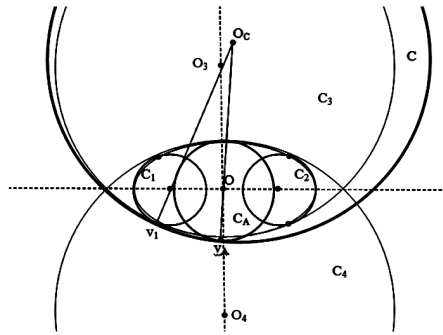


Рис 4. Построение вспомогательного круга C_A для Φ^{EC^*}

Радиус r_A вспомогательного круга C_A вычисляется из следующих соображений. Пусть объект E касается объекта C^* в одной из точек v_1, v_2, v_3 или v_4 (например, v_1). Величина радиуса r_A круга C_A выбирается таким образом, что объект имеет две точки касания с объектом C^* — точку v_1 касания круга C_1 с объектом C^* и точку v_A касания круга C_A с объектом C^* (Рис. 4), что обеспечивает гладкость функции Φ^{EC^*} вида (4).

Рассмотрим phi-функцию $\Phi^{E_i E_j}$ для объектов E_i и E_j , используемую для моделирования условия непересечения истинных эллипсов \widehat{E}_i и \widehat{E}_j . Тогда очевидно, что если $\Phi^{E_i E_j} \geq 0$, то

$$\begin{aligned} \text{int } E_i(x_i, y_i, \theta_i) \cap \text{int } E_j(x_j, y_j, \theta_j) = \emptyset &\Rightarrow \\ \Rightarrow \text{int } \widehat{E}_i(x_i, y_i, \theta_i) \cap \text{int } \widehat{E}_j(x_j, y_j, \theta_j) = \emptyset. \end{aligned}$$

Phi-функция для пары аппроксимированных эллипсов. Прежде всего рассмотрим phi-функцию объекта E и круга C радиуса R , которая имеет вид

$$\Phi^{EC} = \max\{\Phi^{C_3C}, \Phi^{C_4C}, \Phi^{AC}\}, \quad (5)$$

где

$$\Phi^{AC} = \min\{\Phi^{C_1C}, \Phi^{C_2C}, \Phi^{C_A C}\}, \quad (6)$$

$A = C_1 \cup C_2 \cup C_A$, C_1, C_2, C_3, C_4 — заданные круги (Рис. 1), C_A — вспомогательный круг радиуса $r_A = \sqrt{(R+r)(R+2r_p-r)+d^2} - R$ с центром в точке O (Рис. 5), где величина r_p определяется выражением (2).

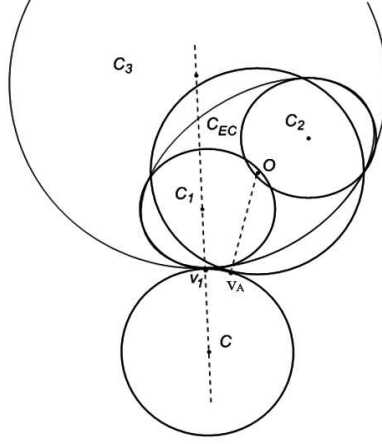


Рис 5. Построение вспомогательного круга C_A для Φ^{EC}

Радиус r_A вспомогательного круга C_A вычисляется из следующих соображений. Пусть объект E касается круга C в одной из точек v_1, v_2, v_3 или v_4 (например, v_1). Величина радиуса r_A круга C_A выбирается таким образом, что объект A имеет две точки касания с кругом C — точку v_1 касания круга C_1 с кругом C и точку v_A касания круга C_A с кругом C (Рис. 5), что обеспечивает гладкость функции Φ^{EC} вида (5).

Phi-функцию двух объектов E_i и E_j можно определить так (Рис. 6)

$$\Phi^{E_i E_j} = \max\{\Phi^{E_i C_3^j}, \Phi^{E_i C_4^j}, \Phi^{C_3^i A_j}, \Phi^{C_4^i A_j}, \phi_{ij}\}, \quad (7)$$

где $\Phi^{E_i C_3^j}, \Phi^{E_i C_4^j}$ — функции вида (5), $\Phi^{C_3^i A_j}, \Phi^{C_4^i A_j}$ — функции вида (6),

$$\phi_{ij} = \min\{\Phi^{C_1^i A_j}, \Phi^{C_2^i A_j}, \Phi^{A_i C_1^j}, \Phi^{A_i C_2^j}, d_{ij}\}, \quad (8)$$

$\Phi^{C_1^i A_j}, \Phi^{C_2^i A_j}$ — функции вида (6), построенные для объекта A_i и кругов C_1^j, C_2^j , а $\Phi^{A_i C_1^j}, \Phi^{A_i C_2^j}$ — для объекта A_j и кругов C_1^i, C_2^i соответственно,

$$d_{ij} = \sqrt{(a'_i d_i - a'_j d_j)^2 + (r_i + b'_i d_i + r_j + b'_j d_j)^2}, \quad d_i = \frac{(a_i - b_i)(a_i + b_i + \sqrt{a_i^2 + b_i^2})}{2a_i},$$

$$d_j = \frac{(a_j - b_j)(a_j + b_j + \sqrt{a_j^2 + b_j^2})}{2a_j}.$$

Функция (8) может быть определена как

$$\phi_{ij} = \min\{\Phi^{C_1^i C_1^j}, \Phi^{C_1^i C_2^j}, \Phi^{C_2^i C_1^j}, \Phi^{C_2^i C_2^j}, \Phi^{C_1^i C_A^j}, \Phi^{C_2^i C_A^j}, \Phi^{C_A^i C_1^j}, \Phi^{C_A^i C_2^j}, d_{ij}\}.$$

Таким образом, функция (7) принимает следующий вид:

$$\Phi^{E_i E_j} = \max\{\Phi^{C_3^i C_3^j}, \Phi^{C_3^i C_4^j}, \Phi^{C_4^i C_3^j}, \Phi^{C_4^i C_4^j}, \Phi^{C_3^i A_j}, \Phi^{C_4^i A_j}, \Phi^{A_i C_3^j}, \Phi^{A_i C_4^j}, \phi_{ij}\}. \quad (9)$$

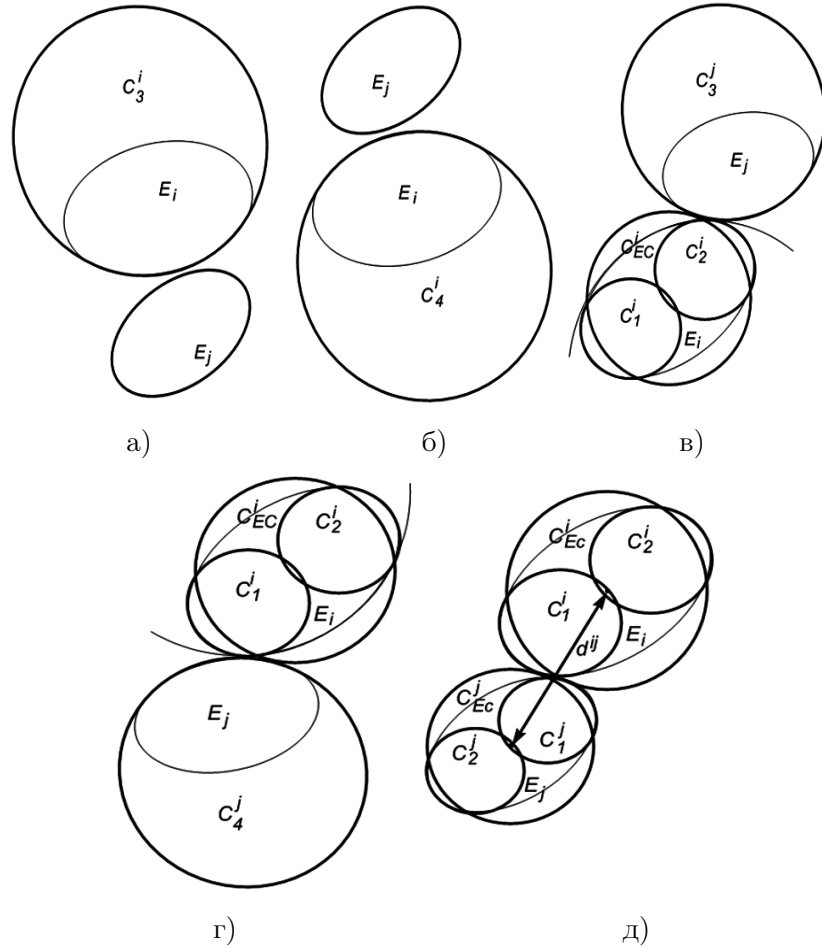


РИС 6. Варианты взаимного размещения двух эллипсов, для которых $\Phi^{E_i E_j} \geq 0$: а) $\Phi^{E_j C_3^i} > 0$, б) $\Phi^{E_j C_4^i} > 0$, в) $\Phi^{E_i C_3^j} = 0$, г) $\Phi^{E_i C_4^j} = 0$, д) $\phi_{ij} = 0$

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Размещаемые эллипсы E_i , $i \in I_n$ характеризуются вектором $u_i = (x_i, y_i, \theta_i)$, где (x_i, y_i) — вектор трансляции, θ_i — угол поворота. Область размещения Ω характеризуется вектором p переменных метрических характеристик — $p = (l, w)$ в случае прямоугольного контейнера и $p = (R^C)$ в случае кругового контейнера. Вектор переменных имеет вид $u = (p, u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^\sigma$, где \mathbb{R}^σ — арифметическое евклидово пространство.

Используя построенные phi-функции (5)–(9), математическую модель поставленной задачи можем представить в виде

$$\min_{u \in W} F(u), \quad (10)$$

$$W = \{u \in R^\sigma : \chi(u) \geq 0\},$$

$$\chi(u) = \min\{\Phi^{E_i E_j} \geq 0, i < j = 1, 2, \dots, n, \Phi^{E_i \Omega^*} \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}, \quad (11)$$

где $F(u) = l \cdot w$ (или $F(u) = R^C$), $\Phi^{E_i \Omega^*}(u_i, p)$ — phi-функция вида (1) или (3) для описания условия включения объекта E_i в прямоугольную или круговую область Ω , $\Phi^{E_i E_j}(u_i, u_j)$ — phi-функция вида (7) для описания условия непересечения объектов E_i и E_j .

Задача (10)–(11) — задача нелинейного программирования.

4. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для решения задачи (10)–(11) предлагается алгоритм, основанный на поиске стартовых точек из области допустимых решений, процедуре локальной оптимизации и методе мультистарта.

Для построения стартовых точек $u^0 \in W$ используется основанный на гомотетических преобразованиях объектов алгоритм, заключающийся в следующем:

1. Определяем стартовые размеры контейнера Ω таким образом, чтобы все эллипсы заведомо могли разместиться в контейнере, т.е., формируем контейнер Ω' и фиксируем его размеры $p = p'$.
2. Случайным образом генерируем множество точек $(x_i^0, y_i^0) \in \Omega'$, $i = 1, \dots, n$, (каждая точка рассматривается как вырожденный объект A_i , полагая, что коэффициент гомотетии α одинаков для всех объектов $A_i, i = 1, \dots, n$, и стартовое значение его равно нулю). Генерируем случайным образом значения углов поворота θ_i^0 , $i = 1, \dots, n$. Формируем точку $u^0 = (p', u_1^0, \dots, u_n^0, \alpha^0 = 0)$, где $u_i^0 = (x_i^0, y_i^0, \theta_i^0)$.
3. Стартуя из точки u^0 , решаем задачу оптимизации вида

$$\max_{u' \in W'} \alpha, \quad (12)$$

$$W' = \{u' \in R^{\sigma+1} : \Phi^{E_i \Omega^*} \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, \Phi^{E_i E_j} \geq 0, i < j = 1, 2, \dots, n, 0 \leq \alpha \leq 1, p = p'\}, \quad (13)$$

где $u' = (p, u_1, \dots, u_n, \alpha)$ — вектор переменных, α — коэффициент гомотетии, $\Omega'^* = \mathbb{R}^2 \setminus \text{int} \Omega'$, $\Phi^{E_i \Omega^*}(u_i, p' = \text{const})$ — phi-функция вида (1) или (3) для описания условия включения объекта E_i в прямоугольную или круговую область Ω , $\Phi^{E_i E_j}(u_i, u_j)$ — phi-функция вида (7) для описания условия непересечения объектов E_i и E_j .

4. Получаем точку $u^0 = (u^0, 1) = (p', u_1^0, \dots, u_n^0, 1)$. Оптимальное решение задачи (12)–(13) гарантирует выполнение условия взаимного непересечения всех пар объектов $E_i(u_i^0)$, $E_j(u_j^0)$, $i < j = 1, \dots, n$ и условия включения всех объектов $E_i(u_i^0)$, $i = 1, \dots, n$ в контейнер $\Omega \equiv \Omega'$.

5. Выбираем точку $u = u^0 \in W$ в качестве стартовой точки для следующей локальной оптимизации.

Для поиска локальных минимумов задачи (12)–(13) применяется модификация LORFT процедуры, предложенной в статье [13] для решения задачи упаковки истинных эллипсов. Эта процедура позволяет свести решение задачи негладкой оптимизации (10)–(11) с большим числом неравенств к решению последовательности задач нелинейного программирования со значительно меньшим числом нелинейных неравенств. Для решения подзадач нелинейного программирования используется ПРОПТ [14]. Результат размещения объектов $E_i, i = 1, \dots, n$ соответствует локальному минимуму задачи (12)–(13) и является допустимой точкой для размещения истинных эллипсов $\widehat{E}_i, i = 1, \dots, n$. Для поиска лучшего решения применяется метод мультистарта.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Пример 1. Рассматривается задача упаковки набора $n = 100$ эллипсов, исходные данные о которых приведены в статье [3] для примера ТС100, в прямоугольном контейнере. Значение функции цели $F(u^*) = l^* \cdot w^* = 298.262914$, $u^* = (p^* = (l^*, w^*), v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*), (l^*, w^*) = (16.503049, 18.073200)$. Получено сто локальных экстремумов. Среднее время поиска одного локального экстремума — 179.13 сек. На Рис. 7а приведено допустимое размещение эллипсов $\widehat{E}_i, i = 1, \dots, n$, соответствующее локально оптимальному размещению объектов $E_i, i = 1, \dots, n$, в прямоугольном контейнере.

Пример 2. Рассматривается задача упаковки набора $n = 100$ эллипсов, исходные данные о которых приведены в статье [3] для примера ТС100, в круговом контейнере. Значение функции цели $F(u^*) = R^* = 9.788537$, $u^* = (p^* = R^*, v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*)$. Получено сто локальных экстремумов. Среднее время поиска одного локального экстремума — 205.05 сек. На Рис. 7б приведено допустимое размещение эллипсов $\widehat{E}_i, i = 1, \dots, n$, соответствующее локально оптимальному размещению объектов $E_i, i = 1, \dots, n$ в круговом контейнере.

В таблице 1 приведены результаты сравнения результатов для тестового примера ТС100, приведенных в работах [3], [6], [12], [13].

ТАБЛИЦА 1. Результаты вычислительных экспериментов

Сравнение результатов		
источник	результат	время
[3]	322.64663	ограничение 5 часов
[6]	297.70558	ограничение 5 часов
[12]	298.69659	28494.063 сек
[13]	297.73798	ограничение 12 часов
Наша работа	298.262914	17913.0 сек

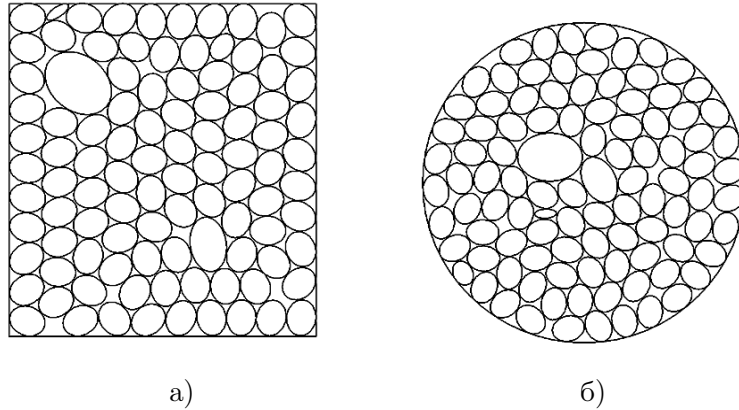


Рис 7. Варианты размещения эллипсов: а) в прямоугольном контейнере для примера 1, б) в круговом контейнере для примера 2

Как видно из таблицы 1, предложенный в данной статье подход позволил получить достаточно близкое к наилучшему (из известных) значению функции цели за лучшее время.

Кроме того, удалось получить допустимое размещение для большого числа (1000) эллипсов, тогда как в известных опубликованных работах максимальное число размещаемых эллипсов не превышает $n = 160$.

Пример 3. Рассматривается задача упаковки набора $n=1000=10 \times 100$ эллипсов в прямоугольном контейнере, исходные данные о каждом из 100 из которых заданы в примере TC100 из статьи [3], в прямоугольном контейнере. Значение функции цели

$$F(u^*) = l^* \cdot w^* = 2940.6513044952,$$

$$u^* = (p^* = (l^*, w^*), v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*), (l^*, w^*) = (54.589741, 53.868204).$$

Время поиска локального экстремума из случайной стартовой точки составило 96 час. На Рис. 8 приведено допустимое размещение эллипсов \widehat{E}_i , $i = 1, \dots, n$, соответствующее локально оптимальному размещению объектов E_i , $i = 1, \dots, n$ в прямоугольном контейнере.

Выводы

Предложенный в статье подход к поиску допустимых размещений эллипсов в контейнере минимальной площади использует phi-функции для эллипсов, аппроксимированных дугами окружностей. Построенные phi-функции имеют более простую форму, чем phi-функции, используемые в рамках универсального подхода. Результаты сравнительных экспериментов подтверждают эффективность предложенного подхода, который требует значительно меньших вычислительных затрат, чем известные аналоги.

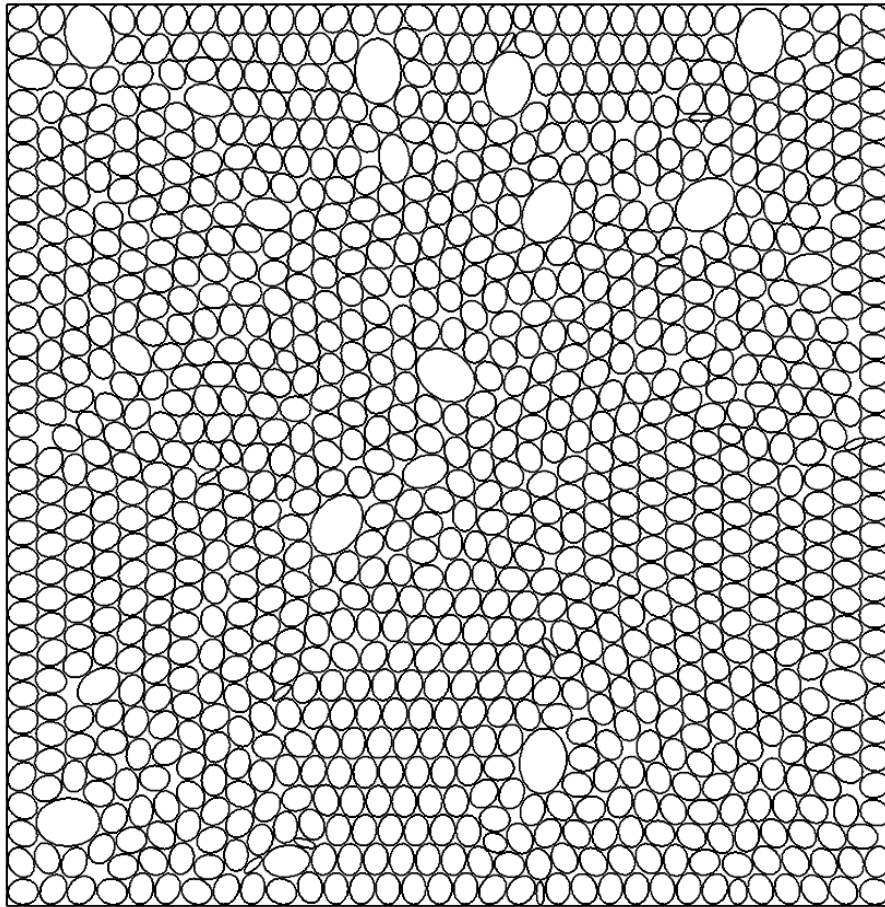


Рис 8. Вариант допустимого размещения эллипсов в прямоугольном контейнере для примера 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Bennell J. A. and Oliveira J. F. The geometry of nesting problems: A tutorial // *European J. Operational Research.* — 2008. — 184. — P. 397–415.
2. Chazelle B., Edelsbrunner H., Guibas L. J. The complexity of cutting complexes // *Discrete & Computational Geometry.* — 1989. — 4(2). — P. 139–181.
3. Kallrath J. and Rebennack S. Cutting Ellipses from Area-Minimizing Rectangles // *Journal of Global Optimization.* — 2014. — Vol. 59. — Iss. 2-3. — P. 405–437.
4. Стоян Ю. Г., Панкратов А. В., Романова Т. Е., Чернов Н. И. Квази-phi-функции для математического моделирования отношений геометрических объектов // *Доповіді Національної академії наук України.* — 2014. — №9. — С. 49–54.
5. Панкратов А. В., Романова Т. Е., Суббота И. А. Оптимальная упаковка эллипсов с учетом допустимых расстояний // *Журн. обчисл. та прикл. матем.* — 2014. — 1. — С. 129–140.

6. Birgin E. G., Lobato R. D., Martinez J. M. Packing ellipsoids by nonlinear optimization // *Journal of Global Optimisation*, —2016. — 65. — P. 709–743.
7. Chernov N, Stoyan Y, Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // *Computational Geometry: Theory and Applications*. — 2010. — 43(5). — P. 535–553.
8. Bennell J., Scheithauer G., Stoyan Yu., Romanova T., Pankratov A. Optimal clustering of a pair of irregular objects // *Journal of Global Optimisation*. — 2015. — Vol. 61. — Iss. 3. — P. 497–524.
9. Chernov N., Stoyan Y., Romanova T., Pankratov A. Phi-Functions for 2D Objects Formed by Line Segments and Circular Arcs // *Advances in Operations Research*. — 2012. — DOI:10.1155/2012/346358.
10. Панкратов А. В., Романова Т. Е., Суббота И.А. Разработка эффективных алгоритмов оптимальной упаковки эллипсов // *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. — 2014. — 5/4(71). — С. 28–35.
11. Панкратов А. В./ Phi-функции для эллипсов, аппроксимированных дугами окружностей // *Радиоэлектроника и информатика*. — 2015. — 2(69). — С. 6–9.
12. Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T. Cutting and Packing problems for irregular objects with continuous rotations: mathematical modeling and nonlinear optimization // *Journal of Operational Research Society*. — 2016. — Vol. 67. — Iss. 5. — P. 786–800. DOI:10.1057/jors.2015.94
13. Stoyan Y, Pankratov A, Romanova T. Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses // *Journal of Global Optimization*. — 2016. — Vol. 65. — Issue 2. — P. 283–307.
14. Wächter A., Biegler L. T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming // *Mathematical Programming*. — 2006. — 106(1). — P. 25–57.

Поступила 16.10.2016