Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2017, №1(124)** | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.6
MSC 65H10, 65J15

# TWO-STEP SECANT-TYPE METHOD FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS

Stepan Shakhno, Yuriy Shunkin
Faculty of Applied Mathematics and Informatics, Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine, E-mail: s_shakhno@lnu.edu.ua

# ДВОКРОКОВИЙ МЕТОД ТИПУ ХОРД ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

С. М. Шахно, Ю. В. Шунькін
Факультет прикладної математики та інформатики, Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна, E-mail: s_shakhno@lnu.edu.ua

Resume. A two-step method for solving of nonlinear operator equations in Banach spaces, which is based on the Secant method, is proposed and its semilocal convergence under weak $\omega$-conditions for divided differences of the first order is proved. The conditions of convergence and rate of convergence of this method are analyzed, uniqueness ball of the solution of the problem is found. The results of the numerical solving of nonlinear equations with nondifferentiable operator are presented.
Keywords: nonlinear equation, two-step iterative method, Secant method, divided difference, difference method, semilocal convergence.

Резюме. Запропоновано двокроковий метод для розв'язування нелінійних операторних рівнянь в банахових просторах, побудований на базі методу хорд, та обґрунтовано його напівлокальну збіжність за слабких $\omega$-умов для поділених різниць першого порядку. Встановлено умови збіжності та швидкість збіжності цього методу, знайдено область єдиності розв'язку задачі. Наведено результати чисельного розв'язування нелінійних систем рівнянь з недиференційовним оператором.
Ключові слова: нелінійне рівняння, двокроковий ітераційний метод, метод хорд, поділена різниця, різницевий метод, напівлокальна збіжність.

## Вступ

Нехай задано рівняння

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

де $F : D \subseteq X \to Y$ — неперервний оператор, диференційовності якого, взагалі кажучи, не вимагається, $X, Y$ — банахові простори, $D$ — відкрита опукла множина в $X$.

Класичним методом розв'язування нелінійного рівняня (1) є метод Ньютона [1, 2]

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n),\ n = 0{,}1{,}2, \ldots, \tag{2}$$

який потребує обчислення похідної Фреше і має квадратичний порядок збіжності. У [3, 4] досліджено двокроковий метод, який не потребує білінійних операторів і має третій порядок збіжності. Ітераційна формула цього методу має вигляд

$$\begin{aligned} y_n &= x_n + F'(x_n)^{-1}F(x_n), \\ x_{n+1} &= y_n - F'(x_n)^{-1}F(y_n),\ n = 0{,}1{,}2, \ldots. \end{aligned} \tag{3}$$

Однак ці методи потребують обчислення оператора похідної Фреше, що не завжди можливо або важко обчислити.

Відомим різницевим методом розв'язування нелінійних рівнянь, який не вимагає похідних, є метод хорд

$$x_{n+1} = x_n - F(x_n, x_{n-1})^{-1}F(x_n),\ n = 0{,}1{,}2, \ldots, \tag{4}$$

де $F(x_n, x_{n-1})$ — поділена різниця першого порядку, $x_0, x_{-1}$ — задані. Неперервний лінійний оператор $F(x, y)$ з $X$ в $Y$ називають поділеною різницею першого порядку для оператора $F$ за точками $x$ і $y$ ($x \neq y$), якщо справджується рівність

$$F(x, y)(x - y) = F(x) - F(y). \tag{5}$$

Ітераційні різницеві методи розв'язування нелінійних операторних рівнянь розглядалися у працях [2]–[12] за різних умов. Зокрема, метод хорд для розв'язування нелінійних операторних рівнянь у банаховому просторі досліджувався авторами [2, 7, 8, 10] за умови, що поділені різниці нелінійного оператора $F$ задовольняють умову Ліпшиця (Гьольдера) з невід'ємною постійною $L$. У праці [13] вперше запропоновано узагальнену умову Ліпшиця, де замість сталої Ліпшиця використовується деяка додатна інтегровна функція, і за цієї умови вивчено збіжність методу Ньютона. Нами у [6, 12] подібну узагальнену умову введено для поділених різниць при вивченні методу хорд.

У праці [3] запропоновано модифікацію методу Стеффенсена (3), яка використовує поділені різниці

$$\begin{aligned} y_n &= x_n + F(x_n - \alpha_n F(x_n), x_n + \alpha_n F(x_n))^{-1}F(x_n), \\ x_{n+1} &= y_n - F(x_n - \alpha_n F(x_n), x_n + \alpha_n F(x_n))^{-1}F(y_n), \end{aligned} \tag{6}$$

де $n = 0{,}1{,}2, \ldots$, $\alpha_n \in [0, 1]$ — малий числовий параметр, який вибирається користувачем. Він може використовуватися для контролю доброї апроксимації першої похідної Фреше. Проте не задано конструктивного способу вибору параметра $\alpha_n$.

У цій праці ми пропонуємо двокроковий метод без використання похідних, у якому нема потреби задавати ніяких параметрів,

$$\begin{aligned} y_n &= x_n + F(x_n, x_{n-1})^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} &= y_n - F(x_n, x_{n-1})^{-1} F(y_n),\ n = 0,1,2,\ldots, \end{aligned} \tag{7}$$

та досліджуємо його напівлокальну збіжність (за умов типу Канторовича).

Зауважимо, що цей метод відрізняється від звичайного двокрокового методу хорд

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - F(x_n, x_{n-1})^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} &= y_n - F(x_n, x_{n-1})^{-1} F(y_n),\ n = 0,1,2,\ldots \end{aligned} \tag{8}$$

тим, що у першій формулі (7) замість знака „мінус“ взято знак „плюс“. Методи (7) і (8), як і метод хорд (4), на відміну від методів (2) і (3), можна застосовувати для розв'язування нелінійних рівнянь з недиференційовним оператором.

## 1. Означення

Позначимо через $B(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\| < r\}$ відкриту кулю радіуса $r$ з центром в точці $x_0$, а через $\overline{B(x_0, r)} = \{x : \|x - x_0\| \le r\}$ замкнену кулю радіуса $r$ з центром в точці $x_0$.

Умову на оператор поділеної різниці $F(x, y)$

$$\|F(x,y) - F(u,v)\| \le L(\|x-u\| + \|y-v\|) \quad \forall x,y,u,v \in D \tag{9}$$

називають умовою Ліпшиця в області $D$ з постійною $L$.

Проте $L$ в умовах Ліпшиця не обов'язково має бути константою, а може бути додатною інтегровною функцією. У цьому випадку умова (9) може бути замінена на

$$\|F(x,y) - F(u,v)\| \le \int_0^{\|x-y\|+\|u-v\|} L(z)dz \quad \forall x,y,u,v \in D. \tag{10}$$

Умову (10) називають узагальненою умовою Ліпшиця, або такою, що містить $L$ у середньому [6]. Поклавши $L = const$, ми отримаємо розглянуту вище класичну умову Ліпшиця (9).

У працях [3, 9] розглянуто інше узагальнення умов Ліпшиця для поділених різниць.

Будемо казати, що поділена різниця задовольняє $\omega$-умову, якщо

$$\|F(x,y) - F(u,v)\| \le \omega(\|x-u\|, \|y-v\|) \quad \forall x,y,u,v \in D, \tag{11}$$

де $\omega : \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}_+$ є неперервна функція, неспадна за обома змінними.

При $\omega(u_1, u_2) = L(u_1 + u_2)$ отримаємо умову Ліпшиця, а при $\omega(u_1, u_2) = L(u_1^p + u_2^p)$ — умову Гьольдера. В загальному, умова (11) не вимагає диференційовності $F$.

Вивчення напівлокальної збіжності методу (7) ми проведемо саме за $\omega$-умов для поділених різниць першого порядку.

## 2. Напівлокальна збіжність ітераційного процесу (7)

Використовуючи означення поділеної різниці, з формул (7) отримаємо

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n + F(x_n, x_{n-1})^{-1}(F(x_n) - F(y_n)) = \\ = x_n + F(x_n, x_{n-1})^{-1}F(x_n, y_n)(x_n - y_n) = \\ = x_n + F(x_n, x_{n-1})^{-1}F(x_n, y_n)(-(F(x_n, x_{n-1})^{-1}F(x_n)) = \\ = x_n - F(x_n, x_{n-1})^{-1}F(x_n, y_n)F(x_n, x_{n-1})^{-1}F(x_n). \end{aligned} \quad (12)$$

Введемо позначення

$$\Gamma_n = F(x_n, x_{n-1}),$$
$$\Phi_n = \Gamma_n F(x_n, x_n + \Gamma_n^{-1}F(x_n))^{-1}\Gamma_n.$$

Умови існування розв'язку, його єдиності та збіжності до нього ітерацій методу (7) встановлює

**Теорема 1.** *Нехай $F$ — неперервний нелінійний оператор, визначений у відкритій опуклій області $D$ банахового простору $X$ зі значеннями у банаховому просторі $Y$. Припустимо, що існує поділена різниця першого порядку оператора $F$, яка задовольняє умову*

$$\|F(x,y) - F(u,v)\| \le \omega(\|x-u\|, \|y-v\|) \quad \forall x,y,u,v \in D, \quad (13)$$

*де $\omega : \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}_+$ є неперервна функція, неспадна за обома змінними, причому $\omega(0,x) = \omega(x,0) = \frac{1}{2}\omega(x,x)$.*

*Нехай $x_0 \in D$. Припустимо, що:*

*1) $\|x_1 - x_0\| \le \eta$, $\|x_0 - x_{-1}\| = \alpha$,*

*2) лінійний оператор $\Gamma_0$ має обернений і $\|\Gamma_0^{-1}\| \le \beta$,*

*3) $\max\{\|\Gamma_0^{-1}F(x_0)\|, \|\Phi_0^{-1}F(x_0)\|\} \le \eta$.*

*4) Позначимо $\gamma = \max\{\eta, \alpha\}$, $m = \beta\omega(\eta+\gamma, \eta+\gamma)$ і припустимо, що рівняння*

$$t\Big(1 - \frac{m}{1 - 2\beta\omega(t+\gamma, t+\gamma)}\Big) - \eta = 0 \quad (14)$$

*має принаймні один додатний корінь, причому $R$ найменший додатний корінь. Якщо $\beta\omega(R+\gamma, R+\gamma) < \frac{1}{3}$ і $\overline{B(x_0,R)} \subset D$, тоді $M = \dfrac{m}{1 - 2\beta\omega(R+\gamma, R+\gamma)} \in (0,1)$ і метод (7) є коректно визначений і* *генерована ним послідовність* $\{x_n\}_{n\geq 0}$ *належить* $B(x_0,R)$ *і збігається до єдиного розв'язку* $F(x)=0$ *в* $\overline{B(x_0,R)}$.

*Доведення.* З умов теореми випливає, що $x_1$ коректно визначене і

$$\|x_1-x_0\|\leq \eta < R.$$

Отже, $x_1\in B(x_0,R)$.

Оскільки $\omega$ є неспадна функція, то маємо

$$\|I-\Gamma_0^{-1}\Gamma_1\|\leq \|\Gamma_0^{-1}\|\|\Gamma_0-\Gamma_1\|\leq \|\Gamma_0^{-1}\|\|F(x_0,x_{-1})-F(x_1,x_0)\|\leq$$
$$\leq \|\Gamma_0^{-1}\|\omega(\|x_0-x_1\|,\|x_{-1}-x_0\|)\leq \beta\omega(\eta,\alpha)\leq \beta\omega(R+\gamma,R+\gamma)<1.$$

Отже, $\Gamma_1^{-1}$ добре визначений і

$$|\ \Gamma_1^{-1}\Gamma_0\|\leq \frac{1}{1-\beta\omega(\eta,\alpha)}\leq \frac{1}{1-\beta\omega(R+\gamma,R+\gamma)},$$

$$|\ \Gamma_1^{-1}\|\leq \frac{\beta}{1-\beta\omega(\eta,\alpha)}\leq \frac{\beta}{1-\beta\omega(R+\gamma,R+\gamma)}.$$

Зокрема, $\Phi_1^{-1}$ і $x_2$ добре визначені. Далі ми отримаємо

$$F(x_1)=F(x_1)-F(x_0)+F(x_0)=$$
$$=F(x_1)-F(x_0)-\Phi(x_0)(x_1-x_0)=(F(x_1,x_0)-\Phi_0)(x_1-x_0).$$

Тоді

$$\|x_2-x_1\|=\|\Phi_1^{-1}F(x_1)\|=\|\Phi_1^{-1}\Gamma_1\Gamma_1^{-1}F(x_1)\|\leq \|\Phi_1^{-1}\Gamma_1\|\|\Gamma_1^{-1}F(x_1)\|\leq$$
$$\leq \|\Phi_1^{-1}\Gamma_1\|\|\Gamma_1^{-1}(F(x_1,x_0)-\Phi_0)\|\|x_1-x_0\|.$$

Оцінимо перші два множники. Отримаємо спочатку оцінку для $\|\Gamma_1^{-1}(F(x_1,x_0)-\Phi_0)\|$. З нерівностей

$$\|I-\Gamma_0^{-1}F(x_0,y_0)\|\leq \|\Gamma_0^{-1}\|\|\Gamma_0-F(x_0,y_0)\|\leq \beta\omega(0,\|x_{-1}-y_0\|)\leq$$
$$\leq \beta\omega(0,\|x_{-1}-x_0\|+\|x_0-y_0\|)\leq \beta\omega(0,\eta+\alpha)\leq \beta\omega(R+\gamma,R+\gamma)<1,$$

$$\|F(x_0,y_0)^{-1}\|\leq \|F(x_0,y_0)^{-1}\Gamma_0\|\|\Gamma_0^{-1}\|\leq \frac{\beta}{1-\beta\omega(0,\eta+\alpha)},$$

$$\|I-F(x_0,y_0)^{-1}\Gamma_0\|=\|F(x_0,y_0)^{-1}(F(x_0,y_0)-\Gamma_0\|\leq$$
$$\leq \|F(x_0,y_0)^{-1}\|\|F(x_0,y_0)-F(x_0,x_{-1})\|\leq \|F(x_0,y_0)^{-1}\|\omega(0,\|y_0-x_{-1}\|)\leq$$
$$\leq \|F(x_0,y_0)^{-1}\|\omega(0,\|y_0-x_0\|+\|x_0-x_{-1}\|)\leq$$
$$\leq \frac{\beta\omega(0,\eta+\alpha)}{1-\beta\omega(0,\eta+\alpha)}\leq \frac{\beta\omega(\eta+\alpha,\eta+\alpha)}{2-\beta\omega(\eta+\alpha,\eta+\alpha)}\leq \frac{\beta\omega(R+\gamma,R+\gamma)}{2-\beta\omega(R+\gamma,R+\gamma)}<1$$

отримаємо

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma_1^{-1}(F(x_1,x_0)-\Phi_0)\| = \|\Gamma_1^{-1}(F(x_1,x_0)-\Phi_0+\Gamma_0-\Gamma_0)\| \le \\
&\le \|\Gamma_1^{-1}\|\|(F(x_1,x_0)-\Gamma_0\| + \|\Gamma_1^{-1}\Gamma_0\|\|F(x_0,y_0)^{-1}\Gamma_0 - I\| \le \\
&\le \frac{\beta\omega(\eta,0)}{1-\beta\omega(\eta,\alpha)} + \frac{1}{1-\beta\omega(\eta,\alpha)}\frac{\beta\omega(0,\eta+\alpha)}{1-\omega(0,\eta+\alpha)} = \\
&= \frac{1}{1-\beta\omega(\eta,\alpha)}\Big(\beta\omega(\eta,0) + \frac{\beta\omega(0,\eta+\alpha)}{1-\omega(0,\eta+\alpha)}\Big) \le \\
&\le \frac{1}{1-\beta\omega(\eta,\alpha)}\Big(\frac{1}{2}\beta\omega(\eta,\eta) + \frac{\frac{1}{2}\beta\omega(\eta+\alpha,\eta+\alpha)}{1-\frac{1}{2}\beta\omega(\eta+\alpha,\eta+\alpha)}\Big) \le \\
&\le \frac{\frac{1}{2}\beta\omega(\eta+\alpha,\eta+\alpha)}{1-\beta\omega(\eta,\alpha)}\Big(1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}\beta\omega(\eta+\alpha,\eta+\alpha)}\Big) \le \\
&\le \frac{\frac{1}{2}\beta\omega(\eta+\alpha,\eta+\alpha)}{1-\beta\omega(\eta,\alpha)}\frac{4-\beta\omega(\eta+\alpha,\eta+\alpha)}{2-\beta\omega(\eta+\alpha,\eta+\alpha)} < 1.
\end{aligned}$$

Знайдемо оцінку для $\|\Phi_1^{-1}\Gamma_1\|$. Спочатку

$$\begin{aligned}
&\|y_1 - x_1\| = \|\Gamma_1^{-1}F(x_1)\| = \|\Gamma_1^{-1}(F(x_1,x_0)-\Phi_0)(x_1-x_0)\| \le \\
&\le \|\Gamma_1^{-1}(F(x_1,x_0)-\Phi_0)\|\|x_1-x_0\| < \eta.
\end{aligned}$$

Далі

$$\begin{aligned}
&\|I - \Gamma_1^{-1}F(x_1,y_1)\| \le \|\Gamma_1^{-1}(\Gamma_1 - F(x_1,y_1)\| \le \\
&\le \|\Gamma_1^{-1}(F(x_1,x_0)-F(x_1,y_1)\| \le \|\Gamma_1^{-1}\|\omega(0,\|x_0-y_1\|) \le \\
&\le \|\Gamma_1^{-1}\|\omega(0,\|x_0-x_1\|+\|x_1-y_1\|) \le \frac{\beta\omega(0,2\eta)}{1-\beta\omega(\eta,\alpha)} \le \\
&\le \frac{1}{2}\frac{\beta\omega(2\eta,2\eta)}{1-\beta\omega(\eta,\alpha)} < 1,
\end{aligned}$$

$$\|F(x_1,y_1)^{-1}\Gamma_1\| \le \frac{1}{1-\frac{1}{2}\frac{\beta\omega(2\eta,2\eta)}{1-\beta\omega(\eta,\alpha)}} \le \frac{2-2\beta\omega(\eta,\alpha)}{2-\beta\omega(2\eta,2\eta)-2\beta\omega(\eta,\alpha)},$$

$$\begin{aligned}
&\|F(x_1,y_1)^{-1}\| \le \|F(x_1,y_1)^{-1}\Gamma_1\|\|\Gamma_1^{-1}\| \le \\
&\le \frac{\beta}{1-\beta\omega(\eta,\alpha)}\frac{2-2\beta\omega(\eta,\alpha)}{2-\beta\omega(2\eta,2\eta)-2\beta\omega(\eta,\alpha)} \le \frac{2\beta}{2-3\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)}.
\end{aligned}$$

Остаточно отримуємо

$$\begin{aligned}
&\|I - \Gamma_1^{-1}\Phi_1\| = \|I - F(x_1,y_1)^{-1}\Gamma_1\| \le \|F(x_1,y_1)^{-1}\|\|F(x_1,y_1)-\Gamma_1\| \le \\
&\le \|F(x_1,y_1)^{-1}\|\|F(x_1,y_1)-F(x_1,x_0)\| \le \|F(x_1,y_1)^{-1}\|\omega(0,\|y_1-x_0\|) \le \\
&\le \frac{2\beta\omega(0,2\eta)}{2-3\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)} \le \frac{\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)}{2-3\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)} < 1.
\end{aligned}$$

Далі

$$\|\Phi_1^{-1}\Gamma_1\| \quad \leq \quad \frac{1}{1-\dfrac{\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)}{2-3\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)}} \quad \leq \quad \frac{2-3\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)}{2-4\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)}.$$

З іншого боку, оскільки $\omega(\eta,\eta) \leq \omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)$, отримаємо

$$\frac{2-3\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)}{2-4\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)}\frac{\frac{1}{2}\beta\omega(\eta+\alpha,\eta+\alpha)}{1-\beta\omega(\eta,\eta)}\frac{4-\beta\omega(\eta+\alpha,\eta+\alpha)}{2-\beta\omega(\eta+\alpha,\eta+\alpha)} <$$
$$< \frac{2-3\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)}{4(1-2\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma))}\frac{\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)}{1-\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)}\frac{4}{2-\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)}.$$

Співвідношення

$$\frac{2-3\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)}{(1-2\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma))}\frac{\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)}{1-\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)}\frac{1}{2-\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)} <$$
$$< \frac{\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)}{1-2\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)}$$

еквівалентно наступній нерівності

$$2-3\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma) < (1-\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma))(2-\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma))$$

або

$$-(\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma))^2 < 0.$$

Очевидно, остання нерівність виконується завжди.

Тоді

$$\|x_2-x_1\| \leq$$
$$\leq \frac{2-3\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)}{4(1-2\beta\omega(2\eta,2\eta))}\frac{\beta\omega(\eta+\alpha,\eta+\alpha)}{1-\beta\omega(\eta,\eta)}\frac{4-\beta\omega(\eta+\alpha,\eta+\alpha)}{2-\beta\omega(\eta+\alpha,\eta+\alpha)}\times$$
$$\times\|x_1-x_0\| < \frac{\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)}{1-2\beta\omega(\eta+\gamma,\eta+\gamma)}\|x_1-x_0\| < M\eta.$$

Далі, використовуючи (14) і $M<1$, отримаємо

$$\|x_2-x_0\| \leq \|x_2-x_1\|+\|x_1-x_0\| \leq (M+1)\eta < \frac{1}{1-M}\eta = R.$$

Отже, $x_2 \in B(x_0,R)$. Далі за індукцією можна довести:

(a) $\|x_n-x_0\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} M^k\eta < R$, а отже $x_n \in B(x_0,R)$;

(b) з оцінки $\|x_n-x_{n-1}\| \leq M^{n-1}\|x_1-x_0\|$ робимо висновок, що $\{x_n\}$ є фундаментальною послідовністю, що означає збіжність її до деякого $x^* \in B(x_0,R)$;

(c) оскільки

$$\|F(x_n)\| = \|(F(x_n,x_{n-1})-\Phi_{n-1})(x_n-x_{n-1})\| \leq$$
$$\leq \|\Gamma_n\|\|\Gamma_n^{-1}(F(x_n,x_{n-1})-\Phi_{n-1})\|\|x_n-x_{n-1}\| \leq \|\Gamma_n\|\|x_n-x_{n-1}\|$$

і $\|x_n - x_{n-1}\| \to 0$ при $n \to \infty$, ми отримуємо, що $F(x^*) = 0$.

Зауважимо, що

$$\|\Gamma_n\| \leq \|\Gamma_0\| + \|\Gamma_n - \Gamma_0\| \leq \|\Gamma_0\| + \omega(R, R + \alpha).$$

Також доведемо єдиність розв'язку рівняння $F(x) = 0$. Припустимо, що $y^*$ — інший розв'язок цього рівняння в $B(x_0, R)$, тобто, $F(y^*) = 0$. Оскільки

$$\begin{aligned}
&\|I - \Gamma_0^{-1} F(x^*, y^*)\| \leq \|\Gamma_0^{-1}\| \|F(x_0, x_{-1}) - F(x^*, y^*)\| \leq \\
&\leq \beta\omega(\|x_0 - x^*\|, \|x_{-1} - y^*\|) \leq \beta\omega(\|x_0 - x^*\|, \|x_{-1} - x_0\| + \|x_0 - y^*\|) \leq \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \leq \beta\omega(R, R + \alpha) < 1,
\end{aligned}$$

то оператор $F(x^*, y^*)$ оборотний і з рівності

$$F(x^*, y^*)(x^* - y^*) = F(x^*) - F(y^*)$$

ми маємо $x^* = y^*$. □

## 3. Чисельні експерименти

Для вивчення реальних обчислювальних властивостей запропонованого методу (7) та інших подібних різницевих методів нами проведено обчислювальний експеримент на низці тестових задач. Обчислення проводились до виконання таких умов:

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \varepsilon \quad \text{i} \quad \|F(x_{k+1})\| \leq \varepsilon.$$

Ми використовували у розрахунках „максимум“-норму $\|x\| = \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x^i|$ і точність $\varepsilon = 10^{-15}$ .

Щоб забезпечити добру початкову апроксимацію матриці Якобі та вдалий старт різницевих ітераційних методів, ми вибирали додаткове початкове наближення $x_{-1} = x_0 - 10^{-4}$. Поділена різниця першого порядку для оператора $F : R^n \to R^n$, тобто, для $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))$, є матрицею $F(x, y)$ розмірності $n \times n$. Її елементи обчислюються за формулою

$$F(x, y)_{i,j} = \frac{F_i(x^1, \ldots, x^j, y^{j+1}, \ldots, y^n) - F_i(x^1, \ldots, x^{j-1}, y^j, \ldots, y^n)}{x^j - y^j}, \quad (15)$$

де $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Як тестові задачі вибрано системи нелінійних рівнянь, які містять недиференційовну частину. Зауважимо, що метод Ньютона (2) та його двокрокову модифікацію (3) не можна застосувати для розв'язування таких систем.

**Приклад 1** [5].

$$\begin{gathered}
3x^2 y - y^2 - 1 + |x - 1| = 0, \\
x^4 + xy^3 - 1 + |y| = 0, \\
(x^*, y^*) \approx (0,8946553733346867,\ 0,3278265217462975).
\end{gathered}$$

**Приклад 2** [9].

$$x^2 - y + 1 + \tfrac{1}{9}|x-1| = 0,$$
$$x + y^2 - 7 + \tfrac{1}{9}|y| = 0,$$
$$(x^*, y^*) \approx (1,159360850193451,\ 2,361824342093).$$

**Приклад 3** [3].

$$|x^2 - 1| + y - 1 = 0,$$
$$x + y^2 - 2 = 0,$$
$$(x^*, y^*)_1 = (1,1), \quad (x^*, y^*)_2 = (-2,-2),$$
$$(x^*, y^*)_3 \approx (1,618033988749895,\ -0,6180339887498949).$$

**Приклад 4** [5].

$$z^2(1-y) - xy + |y - z^2| = 0,$$
$$z^2(x^3 - x) - y^2 + |3y^2 - z^2 + 1| = 0,$$
$$6xy^3 + y^2z^2 - xy^2z + |x + z - y| = 0,$$
$$(x^*, y^*, z^*) = (-1,\ 2,\ 3).$$

Таблиця 1. Кількість ітерацій для знаходження розв'язку рівняння

| Приклад, розв'язок | Початкове наближення | Метод | | |
|---|---|---|---|---|
| | | хорд (4) | (7) | (8) |
| 1 | $(1,0)$ | 9 | 8 | 9 |
| | $(3,1)$ | 13 | 11 | 13 |
| | $(4,2)$ | 15 | 13 | 14 |
| 2 | (3, 1) | 9 | 8 | 8 |
| | (3, 2) | 9 | 7 | 8 |
| | (4, 3) | 9 | 7 | 9 |
| 3 $(x^*, y^*)_1$ | (1,5, 1,5) | 7 | 5 | 6 |
| | (3,5, 3,5) | 9 | 7 | 8 |
| | (-2, 2) | 25 | 9 | – |
| 3 $(x^*, y^*)_2$ | (-3, -3) | 8 | 6 | 7 |
| | (-5, -5) | 9 | 7 | 8 |
| | (-10, -10) | 11 | 8 | 10 |
| 3 $(x^*, y^*)_3$ | (2, -2) | 9 | 7 | 8 |
| | (5, -5) | 11 | 8 | 10 |
| | (10, -10) | 12 | 9 | 11 |
| 4 | (-1,5, 2,5, 3,5) | 10 | 9 | 9 |
| | (-1,5, 3,5, 5,5) | 11 | 10 | 10 |
| | (-3,5, 4,5, 5,5) | 14 | 12 | 14 |
| | (-5, 4, 5) | 15 | 13 | 15 |

У таблиці 1 наведено результати чисельного експерименту стосовно швидкості збіжності деяких ітераційних методів до розв'язків нелінійних систем за різних початкових наближень. Для коректності порівняння у таблиці подано початкові наближення, з яких всі методи збігаються до однакового розв'язку. Якщо система рівнянь має декілька розв'язків, то у таблиці вказано, до якого з них методи збігаються із заданого початкового наближення. Знак "–" вказує на розбіжність методу. Зазначимо, що запропонований метод (7), зазвичай, швидше збігається за метод хорд (4) та його двокрокову модифікацію (8).

## 4. Висновки

У [9] вивчено напівлокальну збіжність методу хорд (4) за слабких $\omega$-умов для поділених різниць першого порядку для оператора $F$. Ми дослідили за $\omega$-умов для поділених різниць напівлокальну збіжність двокрокового методу типу хорд (7) . Отримані нами теоретичні результати справджуються і для рівнянь з недиференційовним оператором. Числові експерименти показують ефективність запропонованого методу та доцільність його застосування.

## Література


1. Канторович Л. В., Акилов Г.П. Функциональный анализ — М.: Наука, 1984. — 752 с.
2. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Пер. с англ. — М.: Мир, 1975. — 558 с.
3. Amat S., Bernúdez C., Busquier S. and Plaza S. On a third-order Newton-type method free of bilinear operators // Numer. Linear Algebra Appl. — 2010. — Vol. 17. — P. 639–653.
4. Kou J., Li Y., Wang X. A modification of Newton method with third-order convergence // Applied Mathematics and Computation. — 2006. — Vol. 181. — P. 1106–1111.
5. Шахно С. М., Мельник І. В., Ярмола Г. П. Аналіз збіжності комбінованого методу для розв'язування нелінійних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мат. поля. — 2013. — Т. 56, № 1. — С. 31–39.
6. Шахно С. М. Метод хорд при узагальнених умовах Ліпшиця для поділених різниць першого порядку // Матем. вісник НТШ. — 2007. — Т. 4. — С. 296–305.
7. Argyros I. K. On an iterative algorithm for solving nonlinear operator equations // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. — 1991. — Vol. 10. — P. 83–92.
8. Hernandez M. A., Rubio M. J. The Secant method and divided differences Hölder continuous // Applied Mathematics and Computation. – 2001. — Vol. 124. — P. 139—149.
9. Hernandez M. A., Rubio M. J. The Secant method for nondifferentiable operators // Appl. Math. Lett. — 2002. — Vol. 15. — P. 395—399.
10. Schmidt J. W. Eine Übertragung der Regula Falsi auf Gleichungen in Banach Räumen I, II // ZAMM — 1963. — Vol.43. — P. 1—8, 97—110.

11. Shakhno S. M. Convergence of the two-step combined method and uniqueness of the solution of nonlinear operator equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2014. — Vol. 261. — P. 378—386.
12. Shakhno S. M. On the Secant method under generalized Lipschitz conditions for the divided difference operator // PAMM — Proc. Appl. Math. Mech. — 2007. — Vol. 7. — P. 2060083—2060084.
13. Wang X. Convergence of Newton's method and uniqueness of the solution of equations in Banach space // IMA Journal of Numerical Analysis. — 2000. — Vol. 20. — P. 123—134.


Надійшла 23.01.2017