Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2017, №1(124)** | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.9
MSC 34D05

STABILITY OF SOLUTIONS OF MATHEMATICAL MODELS OF INFORMATION SPREADING PROCESS WITH EXTERNAL CONTROL

Iuliia Shevchuk

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: nysya@hotmail.com

СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ У МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ З ЗОВНІШНІМИ ВПЛИВАМИ

Ю. М. Шевчук

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: nysya@hotmail.com

Abstract. We consider mathematical model with stationary parameters of spreading any number of information type with external influences. The number of information made by each of the sides is taken as key parameter promoting accomplishment of aim. Information is spread in the community along internal (interpersonal communication of the member of social community) and external threads (mass media). The model takes the form of N (number of information channels) non-linear ordinary differential equations. Conditions of existence of range of first-approximation stability of the solutions are considered for general stationary model and the special cases of this model (models with the different type of external control and models with a fixed number of information type). The results of work allow simulating the dynamics of information spreading process in neighbourhood of the equilibrium point. The offered model of information spreading process except theoretical interest has an important practical meaning. It is shown that, due to the nonlinearity of the process of spreading information, it allows not always obvious ways of managing the resource. The offered results allows choosing strategy, to select values of stationary parameters (characteristic of actions) and to achieve desirable results.
Keywords: information spreading process, stationary parameters, first-approximation stability.

Резюме. У статті наводиться загальна схема аналізу стійкості за першим наближенням в околі точок стійкості моделей розповсюдження довільної кількості типів інформації із стаціонарними параметрами на прикладі узагальненої моделі та моделей із спеціальним представленням зовнішнього впливу. Результати

числового експерименту демонструють практичні можливості даної схеми. Отримані результати дозволяють визначати для стаціонарних параметрів моделі допустимі області, значення з яких будуть гарантувати стійкість за першим наближенням в околі стаціонарних точок.
Ключові слова: розповсюдження інформації, стаціонарні параметри, стійкість за першим наближенням.

Вступ

Розглядається деяка соціальна група чисельністю L, на яку провадиться інформаційна дія по N каналах, причому число суб'єктів, що сприйняли інформацію k-го типу, залежить як від зовнішньої дії, так і від спілкування суб'єктів між собою. Якщо позначимо через $x_k(t)$ число суб'єктів, що сприйняли інформацію k-го типу в момент t, через b_k — інтенсивність спілкування, $u_k(t)$ — зовнішні дії, то зміну з часом величини $x_k(t)$ можливо описати системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_k\left(t\right)}{dt} = b_k\left(t\right) x_k\left(t\right)\left(L - \sum_{i=1}^{N} x_i\left(t\right)\right) + u_k\left(t\right), \quad k = \overline{1,\ N}. \tag{1}$$
$$x_k\left(0\right) = x_{0k},$$

У роботах [1–4] проводився аналіз рівнянь (1) при постійних параметрах і спеціальному виборі функцій $u_k\left(t\right)$. Аналіз властивостей розв'язків системи (1) при спеціальному виборі $u_k\left(t\right)$ проводився у роботі [5].

1. Аналіз загальної моделі

Далі аналізуватимемо випадок, коли зовнішня дія моделюється як $u_k\left(t\right) = \sum_{i=1}^{N} a_{ki} x_i\left(t\right) + c_k$, тоді

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = b_k x_k\left(t\right)\left(L - \sum_{i=1}^{N} x_i\left(t\right)\right) + \sum_{i=1}^{N} a_{ki} x_i\left(t\right) + c_k, \quad k = \overline{1,\ N}. \tag{2}$$
$$x_k\left(0\right) = x_{0k},$$

Очевидно, що система диференціальних рівнянь (2) допускає стаціонарні розв'язки $(\tilde{x}_1,\ \ldots,\ \tilde{x}_N)$, що задовольняють умови

$$\begin{cases} L - \sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{N} a_{ki}\tilde{x}_i + c_k \equiv 0, \quad k = \overline{1,\ N}. \end{cases} \tag{3}$$

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь (3) можна представити у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{N1} & a_{N2} & \ldots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \ldots \\ \tilde{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ -c_1 \\ \ldots \\ -c_N \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Нас цікавлять невід'ємні розв'язки СЛАР. Для того, щоб всі елементи вектора $(\tilde{x}_1, \ \ldots, \ \tilde{x}_N)$ були невід'ємні, достатньо, щоб існувала невироджена матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{N1} & a_{N2} & \ldots & a_{NN} \end{pmatrix}^{-1}. \tag{5}$$

За теоремою Кронекера-Капеллі, СЛАР (4) має розв'язки тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{N1} & a_{N2} & \ldots & a_{NN} \end{pmatrix} =$$

$$= rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & L \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} & -c_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{N1} & a_{N2} & \ldots & a_{NN} & -c_N \end{pmatrix}, \tag{6}$$

причому розв'язок єдиний, якщо ранг дорівнюватиме N.

Далі нас цікавитиме та частина площини фазового простору, яка знаходиться в околі точки $(\tilde{x}_1, \ \ldots, \ \tilde{x}_N)$. Для опису траєкторій у цьому околі достатньо використовувати лінійне наближення

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} (a_{ki} - b_k\tilde{x}_k)(x_i(t) - \tilde{x}_i) + b_k \left(L - \sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_i \right) \times$$

$$\times (x_k(t) - \tilde{x}_k), \ k = \overline{1, \ N}.$$

Покладемо $\overline{x}_k(t) = x_k(t) - \tilde{x}_k, \ k = \overline{1, \ N}$, тоді отримуємо систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\overline{x}_k(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} (a_{ki} - b_k\tilde{x}_k)\overline{x}_i(t) + b_k \left(L - \sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_i \right) \overline{x}_k, \ k = \overline{1, \ N}. \tag{7}$$

Систему (7) можна представити у матричному вигляді

$$\overline{X}'(t) = A\overline{X}(t),$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} - b_1\left(\tilde{x}_1 - L + \sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_i\right) & \ldots & a_{1N} - b_1\tilde{x}_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{N1} - b_N\tilde{x}_N & \ldots & a_{NN} - b_N\left(\tilde{x}_N - L + \sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_i\right) \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Якщо для системи (2) існує невироджена матриця (5) та виконуються умови (6), то для того, щоб розв'язки даної системи були* *стійкими в околі стаціонарної точки* $(\tilde{x}_1, \ \ldots, \ \tilde{x}_N)$ *за першим наближенням, необхідно, а у випадку при* $N = 4$ *і достатньо, щоб виконувались умови*

$$\begin{cases} Sp\,(A) < 0, \\ detA \ > 0, \\ Sp\,(A^{+}) - a_2 Sp\,(A) > 0, \\ (Sp\,(A))^2 detA \ - Sp\,(A^{+})\,(\ Sp\,(A^{+}) - a_2 Sp\,(A)) < 0, \end{cases}$$

де A^{+} *— союзна до матриці* A*,*

$$a_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4}\left(a_{ii} - b_i\left(\tilde{x}_i - L + \sum_{l=1}^{N}\tilde{x}_l\right)\right)\left(a_{jj} - b_j\left(\tilde{x}_j - L + \sum_{l=1}^{N}\tilde{x}_l\right)\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4}(a_{ij} - b_i\tilde{x}_i)\,(a_{ji} - b_j\tilde{x}_j).$$

Доведення. У загальному випадку для системи з 4 диференціальних лінійних рівнянь характеристичне рівняння набуває вигляду

$$F\,(\lambda) = \det\,(\lambda E - A) \ = \lambda^4 - a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 - a_3\lambda + a_4 = 0.$$

Тоді $a_1 = \ Sp\,(A)\,,\ a_4 = \det A$ ([6], c.100) та

$$a_3 = F'\,(\lambda)\,|_{\lambda=0} = (\det\,(\lambda E - A)\ )'|_{\lambda=0}.$$

Позначимо $B(\lambda) = \lambda E - A$, тоді цю матрицю можна представити у вигляді $\det\,(B(\lambda)) \ = b_{i1}B_{i1} + \cdots + b_{iN}B_{iN}$, тут b_{ij} — елемент матриці B, i — номер рядка, j — номер стовпця, B_{ij} — алгебраїчне доповнення до b_{ij}.

Оскільки частинна похідна матиме вигляд

$$\frac{\partial \det\,(B)}{\partial b_{ij}} = B_{ij},$$

тоді повну похідну можна представити у вигляді

$$(\det\,(B(\lambda))\ )' = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial \det\,(B)}{\partial b_{ij}}\frac{db_{ij}}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}B_{ij}\frac{db_{ij}}{d\lambda} = Sp\left(B^{+}\frac{dB}{d\lambda}\right) =$$

$$= Sp\left((\lambda E - A)^{+}\frac{d\,(\lambda E - A)}{d\lambda}\right) = Sp\left((\lambda E - A)^{+}E\right),$$

де B^{+} — союзна матриця до матриці B, тобто, матриця, створена з алгебраїчних доповнень для відповідних елементів матриці B і транспонована по тому.

Звідси отримаємо

$$a_3 = (\det\,(\lambda E - A)\ )'|_{\lambda=0} = Sp\left((\lambda E - A)^{+}\right)|_{\lambda=0} = Sp\left(A^{+}\right).$$

Тоді

$$a_2 = \frac{1}{2}F''\,(\lambda)\,|_{\lambda=0} = \frac{1}{2}\left(Sp\left(B^{+}\right)\right)'\Big|_{\lambda=0}.$$

У силу того, що $Sp\,(B^{+})$ є функцією від λ, то похідну від суми алгебраїчних доповнень, що стоять на діагоналі матриці, можна представити у вигляді суми похідних алгебраїчних доповнень

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} B_{ii}\right)'\Bigg|_{\lambda=0} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4}\left(a_{ii} - b_i\left(\tilde{x}_i - L + \sum_{l=1}^{N}\tilde{x}_l\right)\right)\left(a_{jj} - b_j\left(\tilde{x}_j - L + \sum_{l=1}^{N}\tilde{x}_l\right)\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4}\left(a_{ij} - b_i\tilde{x}_i\right)\left(a_{ji} - b_j\tilde{x}_j\right).$$

За критерієм Рауса-Гурвіца, щоб особлива точка була стійкою за першим наближенням, необхідно і достатньо, щоб всі головні діагональні мінори матриці Гурвіца були додатними. Тоді для випадку при $N = 4$ матриця Гурвіца набуде вигляду

$$H = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & 1 \\ 0 & a_4 & -a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Отже необхідно і достатньо для стійкості розв'язків системи, щоб виконувались умови

$$\begin{cases} Sp\,(A) < 0, \\ detA\; > 0, \\ Sp\,(A^{+}) - a_2 Sp\,(A) > 0, \\ (Sp\,(A))^2 detA\; - Sp\,(A^{+})\,(\,Sp\,(A^{+}) - a_2 Sp\,(A)) < 0. \end{cases}$$

Ці нерівності гарантують додатність головних мінорів 1-го, 2-го, 3-го та 4-го порядків, тобто, виконання цих умов є необхідним для стійкості розв'язків системи (2) при $N > 4$. □

Наслідок 1. *Якщо для системи (2) при $N = 3$ існує невироджена матриця (5), виконуються умови (6) та*

$$\begin{cases} Sp\,(A) < 0, \\ detA\; < 0, \\ detA\; - Sp\,(A^{+})\,Sp\,(A) > 0, \end{cases}$$

де A^{+} — союзна до матриці A, то розв'язки даної системи будуть стійкими в околі стаціонарної точки $(\tilde{x}_1,\ \ldots,\ \tilde{x}_3)$ за першим наближенням.

Теорема 2. *Якщо для системи (2) при $N = 2$ будуть виконуватися умови*

$$\begin{cases} b_1\left(L - 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2\right) + a_{11} + b_2\left(L - \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2\right) + a_{22} < 0, \\ \left(b_1\left(L - 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2\right) + a_{11}\right)\left(b_2\left(L - \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2\right) + a_{22}\right) - \\ \qquad - \left(a_{12} - b_1\tilde{x}_1\right)\left(a_{21} - b_2\tilde{x}_2\right) > 0, \end{cases}$$

та

a) $c_1 = c_2 = 0$, *тоді розв'язки системи (2) будуть стійкими за першим наближенням в околі стаціонарної точки* $\tilde{x}_1 \equiv \tilde{x}_2 \equiv 0$*;*

b) $a_{11} = a_{12} = k$, $c_1 = -L * k$, *тоді розв'язки системи (2) будуть стійкими за першим наближенням в околі стаціонарної точки* $\tilde{x}_1 = \frac{a_{22}L+c_2}{a_{22}-a_{21}} \geq 0$, $\tilde{x}_2 = \frac{a_{21}L+c_2}{a_{21}-a_{22}} \geq 0$*;*

c) $a_{21} = a_{22} = k$, $c_2 = -L * k$, *тоді розв'язки системи (2) будуть стійкими за першим наближенням в околі стаціонарної точки* $\tilde{x}_1 = \frac{a_{12}L+c_1}{a_{12}-a_{11}} \geq 0$, $\tilde{x}_2 = \frac{a_{11}L+c_1}{a_{11}-a_{12}} \geq 0$*;*

d) $\left(a_{12} - a_{11}\right)\left(a_{22}L + c_2\right) = \left(a_{22} - a_{21}\right)\left(a_{12}L + c_1\right), \left(a_{11} - a_{12}\right) \times \times \left(a_{21}L + c_2\right) = \left(a_{21} - a_{22}\right)\left(a_{11}L + c_1\right)$, *тоді розв'язки системи (2) будуть стійкими за першим наближенням в околі стаціонарної точки* $\tilde{x}_1 = \frac{a_{12}L+c_1}{a_{12}-a_{11}} = \frac{a_{22}L+c_2}{a_{22}-a_{21}} \geq 0$, $\tilde{x}_2 = \frac{a_{11}L+c_1}{a_{11}-a_{12}} = \frac{a_{21}L+c_2}{a_{21}-a_{22}} \geq 0$.

Доведення. Розглядається система

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = b_1x_1\left(t\right)\left(L - x_1\left(t\right) - x_2\left(t\right)\right) + a_{11}x_1\left(t\right) + a_{12}x_2\left(t\right) + c_1, \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = b_2x_2\left(t\right)\left(L - x_1\left(t\right) - x_2\left(t\right)\right) + a_{21}x_1\left(t\right) + a_{22}x_2\left(t\right) + c_2. \end{cases} \tag{8}$$

У випадку, коли $c_1 = c_2 = 0$, отримуємо стаціонарний розв'язок $\tilde{x}_1 \equiv \equiv \tilde{x}_2 \equiv 0$. Для пошуку нетривіальних розв'язків розглядається система

$$\begin{cases} L - \tilde{x}_1\left(t\right) - \tilde{x}_2\left(t\right) = 0, \\ a_{11}\tilde{x}_1\left(t\right) + a_{12}\tilde{x}_2\left(t\right) + c_1 = 0, \\ a_{21}\tilde{x}_1\left(t\right) + a_{22}\tilde{x}_2\left(t\right) + c_2 = 0. \end{cases}$$

Щоб система мала один розв'язок, за теоремою Кронекера-Капеллі у неї має бути два лінійно незалежних рядки. Розглянемо детальніше можливі варіанти:

1. Лінійно залежні перший і другий рядки. Це можливо, якщо $a_{11} = a_{12} = k$, $c_1 = -L * k$, де k — константа. Тоді отримуємо систему

$$\begin{cases} L - \tilde{x}_1\left(t\right) - \tilde{x}_2\left(t\right) = 0, \\ a_{21}\tilde{x}_1\left(t\right) + a_{22}\tilde{x}_2\left(t\right) + c_2 = 0. \end{cases}$$

Її розв'язком буде

$$\tilde{x}_1 = \frac{a_{22}L + c_2}{a_{22} - a_{21}} \geq 0, \ \tilde{x}_2 = \frac{a_{21}L + c_2}{a_{21} - a_{22}} \geq 0.$$

2. Лінійно залежні перший і третій рядок, тобто, $a_{21}{=}a_{22}{=}k$, $c_2{=}{-}L*k$, де k — константа. Тоді отримуємо систему
$$\begin{cases} L-\tilde{x}_1(t)-\tilde{x}_2(t)=0, \\ a_{11}\tilde{x}_1(t)+a_{12}\tilde{x}_2(t)+c_1=0. \end{cases}$$
Її розв'язком буде
$$\tilde{x}_1=\frac{a_{12}L+c_1}{a_{12}-a_{11}}\geq 0,\ \tilde{x}_2=\frac{a_{11}L+c_1}{a_{11}-a_{12}}\geq 0.$$
3. Лінійно залежні другий та третій рядок, тобто, параметри задовольняють рівняння
$$\begin{cases} (a_{12}-a_{11})(a_{22}L+c_2)=(a_{22}-a_{21})(a_{12}L+c_1), \\ (a_{11}-a_{12})(a_{21}L+c_2)=(a_{21}-a_{22})(a_{11}L+c_1). \end{cases}$$
Тоді розв'язком буде
$$\tilde{x}_1=\frac{a_{12}L+c_1}{a_{12}-a_{11}}=\frac{a_{22}L+c_2}{a_{22}-a_{21}}\geq 0,\ \tilde{x}_2=\frac{a_{11}L+c_1}{a_{11}-a_{12}}=\frac{a_{11}L+c_1}{a_{11}-a_{12}}\geq 0.$$

Лінеаризована система (8) в околі точки $(\tilde{x}_1,\,\tilde{x}_2)$ матиме вигляд
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt}=(b_1(L-2\tilde{x}_1-\tilde{x}_2)+a_{11})(x_1(t)-\tilde{x}_1)+(a_{12}-b_1\tilde{x}_1)(x_2(t)-\tilde{x}_2), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=(a_{21}-b_2\tilde{x}_2)(x_1(t)-\tilde{x}_1)+(b_2(L-\tilde{x}_1-2\tilde{x}_2)+a_{22})(x_2(t)-\tilde{x}_2). \end{cases}$$
Позначимо $\overline{x}_1(t)=x_1(t)-\tilde{x}_1$, $\overline{x}_2(t)=x_2(t)-\tilde{x}_2$. Отримаємо систему лінійних однорідних рівнянь
$$\overline{X}'(t)=A\overline{X}(t),$$
де
$$A=\begin{pmatrix} b_1(L-2\tilde{x}_1-\tilde{x}_2)+a_{11} & a_{12}-b_1\tilde{x}_1 \\ a_{21}-b_2\tilde{x}_2 & b_2(L-\tilde{x}_1-2\tilde{x}_2)+a_{22} \end{pmatrix}.$$
Тоді характеристичне рівняння матиме вигляд
$$\det(\lambda E-A)=\lambda^2-\lambda(b_1(L-2\tilde{x}_1-\tilde{x}_2)+a_{11}+b_2(L-\tilde{x}_1-2\tilde{x}_2)+a_{22})+$$
$$+(b_1(L-2\tilde{x}_1-\tilde{x}_2)+a_{11})(b_2(L-\tilde{x}_1-2\tilde{x}_2)+a_{22})-(a_{12}-b_1\tilde{x}_1)(a_{21}-b_2\tilde{x}_2).$$
Користуючись критерієм Рауса-Гурвіца, отримаємо, що точка $(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2)$ буде стійкою за першим наближенням, якщо будуть виконуватись нерівності
$$\begin{cases} b_1(L-2\tilde{x}_1-\tilde{x}_2)+a_{11}+b_2(L-\tilde{x}_1-2\tilde{x}_2)+a_{22}<0, \\ (b_1(L-2\tilde{x}_1-\tilde{x}_2)+a_{11})(b_2(L-\tilde{x}_1-2\tilde{x}_2)+a_{22})- \\ -(a_{12}-b_1\tilde{x}_1)(a_{21}-b_2\tilde{x}_2)>0. \end{cases}$$
□

2. Аніліз моделей з веруванням спеціального вигляду

Розглянемо частковий випадок (2), коли зовнішні впливи моделюються як $\gamma_k x_k(t)$, $k=\overline{1,\ N}$. Тоді розглядається система

$$\frac{dx_k(t)}{dt}=b_k x_k(t)\left(L-\sum_{i=1}^{N}x_i(t)\right)+\gamma_k x_k(t)\,,\quad k=\overline{1,\ N}. \tag{9}$$

Стаціонарні точки будуть шукатися з рівнянь

$$\tilde{x}_k\left(b_k\left(L-\sum_{i=1}^{N}\tilde{x}_i\right)+\gamma_k\right)=0,\ k=\overline{1,\ N}. \tag{10}$$

Очевидно, що тривіальний розв'язок $(0,\ldots,0)$ буде стаціонарним. Також систему рівнянь (10) будуть задовольняти точки $\left(0,\ldots,\frac{\gamma_k}{b_k}+L,\ldots,\ 0\right)$, $\frac{\gamma_k}{b_k}\le 0$, $k=\overline{1,\ N}$.

Теорема 3. *Система (9) буде стійкою в околі стаціонарної точки за першим наближенням тоді і тільки тоді, коли будуть виконуватися умови*

a) для стаціонарної точки (0, ..., 0)

$$b_k L+\gamma_k<0,\ k=\overline{1,\ N};$$

b) для стаціонарної точки $\left(0,\ldots,\frac{\gamma_i}{b_i}+L,\ldots,\ 0\right)$, $i\in\overline{1,\ N}$

$$\begin{cases}\gamma_i+Lb_i>0, i\in\overline{1,\ N},\\ \qquad -L\le\frac{\gamma_i}{b_i}\ge 0, \qquad\qquad k=\overline{1,\ N}, k\ne i.\\ \qquad \gamma_k-b_k\frac{\gamma_i}{b_i}<0,\end{cases}$$

Доведення. Ліанеризуємо систему (9) в околі стаціонарної точки $(\tilde{x}_1,\ \ldots,\ \tilde{x}_N)$ й зробимо заміну $\overline{x}_k(t)=x_k(t)-\tilde{x}_k$, $k=\overline{1,\ N}$. Тоді отримаємо систему

$$\frac{d\overline{x}_k(t)}{dt}=\left(b_k\left(L-\sum_{i=1}^{N}\tilde{x}_i\right)+\gamma_k\right)\overline{x}_k(t)-b_k\tilde{x}_k\sum_{i=1}^{N}\overline{x}_i(t)\,,\ k=\overline{1,\ N}. \tag{11}$$

Розглянемо більш детально (11) для кожної стаціонарної точки.

1. $\tilde{x}_1\equiv\cdots\equiv\tilde{x}_N\equiv 0$, тоді розглядатися буде система
$$\frac{d\overline{x}_k(t)}{dt}=(b_k L+\gamma_k)\,\overline{x}_k(t)\,,\ k=\overline{1,\ N}.$$
Точка $(0,\ldots,0)$ буде стійкою за першим наближенням, якщо будуть виконуватися нерівності $b_k L+\gamma_k<0$, $k=\overline{1,\ N}$.
2. Розглянемо загальний випадок $\left(0,\ldots,\frac{\gamma_i}{b_i}+L,\ldots,\ 0\right)$, $i\in\overline{1,\ N}$. Тоді система (11) прийматиме вигляд
$$\begin{cases}\dfrac{d\overline{x}_i(t)}{dt}=-(\gamma_i+Lb_i)\sum_{i=1}^{N}\overline{x}_i(t)\,, i\in\overline{1,\ N},\\ \quad\dfrac{d\overline{x}_k(t)}{dt}=\left(\gamma_k-b_k\frac{\gamma_i}{b_i}\right)\overline{x}_k(t)\,, k=\overline{1,\ N}.\end{cases}$$

Тобто, можна перепозначити

$$\overline{X}'(t) = A\overline{X}(t),$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \gamma_1 - b_1\frac{\gamma_i}{b_i} & & & 0 \\ & \ddots & \dots & \dots \\ -\gamma_i - Lb_i & & -\gamma_i - Lb_i & -\gamma_i - Lb_i \\ & & \ddots & \dots \\ 0 & & \dots & \gamma_N - b_N\frac{\gamma_i}{b_i} \end{pmatrix}, i \in \overline{1,\ N}.$$

Характеристичне рівняння для такої системи диференціальних рівнянь матиме вигляд

$$(-\gamma_i - Lb_i - \lambda) \prod_{k=\overline{1,\ N},\ k \neq i} \left(\gamma_k - b_k \frac{\gamma_i}{b_i} - \lambda \right) = 0,\ i \in \overline{1,\ N}.$$

Стаціонарна точка $\left(0, \dots, \frac{\gamma_i}{b_i} + L, \dots,\ 0\right)$, $i \in \overline{1,\ N}$ буде стійкою за першим наближенням, якщо будуть виконуватися умови

$$\begin{cases} \gamma_i + Lb_i > 0, i \in \overline{1,\ N}, \\ -L \leq \frac{\gamma_i}{b_i} \leq 0, \qquad k = \overline{1,\ N},\ k \neq i. \\ \gamma_k - b_k \frac{\gamma_i}{b_i} < 0, \end{cases}$$

□

Розглянемо частковий випадок (2), коли зовнішні впливи моделюються як $\gamma_k(x_k(t) - m_k L)$, $k = \overline{1,\ N}$, а m_k задовольняє умови $m_k > 0, k = \overline{1,\ N}$ та $\sum_{k=1}^{N} m_k = 1$. Тоді

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = b_k x_k(t) \left(L - \sum_{i=1}^{N} x_i(t) \right) + \gamma_k (x_k(t) - m_k L),\ k = \overline{1,\ N}. \tag{12}$$

Стаціонарна точка має задовольняти систему рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_i = L, \\ \tilde{x}_k - m_k L = 0,\ k = \overline{1,\ N}. \end{cases}$$

Розв'язком системи буде $\tilde{x}_k = m_k L$, $k = \overline{1,\ N}$.

Після заміни $\overline{x}_k(t) = x_k(t) - \tilde{x}_k$, $k = \overline{1,\ N}$ лінеаризована система матиме вигляд

$$\frac{d\overline{x}_k(t)}{dt} = b_k \left(L - L \sum_{i=1}^{N} m_i \right) \overline{x}_k - b_k m_k L \sum_{i=1}^{N} \overline{x}_i(t) + \gamma_k \overline{x}_k,\ k = \overline{1,\ N}.$$

Оскільки $\sum_{k=1}^{N} m_k = 1$, то

$$\frac{d\overline{x}_k(t)}{dt} = \gamma_k \overline{x}_k - b_k m_k L \sum_{i=1}^{N} \overline{x}_i(t),\ k = \overline{1,\ N}.$$

Цю систему диференціальних рівнянь можна представити в матричному вигляді як

$$\overline{X}^{'}(t) = A\overline{X}(t)\,,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \gamma_1 - b_1 m_1 L & & \dots & & -b_1 m_1 L \\ & \ddots & & & \dots \\ -b_i m_i L & & \gamma_i - b_i m_i L & & -b_i m_i L \\ & & & \ddots & \dots \\ -b_N m_N L & & \dots & & \gamma_N - b_N m_N L \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння матиме вигляд

$$\det(\lambda E - A) \ = \lambda^N - \lambda^{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\gamma_i - L\sum_{i=1}^{N} b_i m_i\right) +$$

$$+\lambda^{N-2}\left(\sum_{i=1}^{N-1}\gamma_i\sum_{j=i+1}^{N}\gamma_j - L\sum_{i=1}^{N} b_i m_i \sum_{j=\overline{1,N}, j\neq i}\gamma_j\right) + \dots -$$

$$-(-1)^N\left(\prod_{i=1}^{N}\gamma_i + L\sum_{i=1}^{N} b_i m_i \prod_{j=\overline{1,N}, j\neq i}\gamma_j\right) = 0.$$

Теорема 4. *Для того, щоб система (12) була стійкою в околі стаціонарної точки $\tilde{x}_k = m_k L, m_k > 0$, $k = \overline{1,\ N}$ та $\sum_{k=1}^{N} m_k = 1$, за першим наближенням необхідно, а у випадку при $N = 4$ і достатньо, щоб виконувалися умови*

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - L(b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3 + b_4 m_4) < 0,$$

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 - L(\gamma_1\gamma_2\gamma_4 b_1 m_1 + \gamma_1\gamma_3\gamma_4 b_2 m_2 + \gamma_1\gamma_2\gamma_4 b_3 m_3 + \gamma_2\gamma_3\gamma_4 b_4 m_4) > 0,$$

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_4 + \gamma_1\gamma_3\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3\gamma_4 - Lb_1 m_1(\gamma_2\gamma_3 + \gamma_2\gamma_4 + \gamma_3\gamma_4) +$$
$$+Lb_2 m_2(\gamma_1\gamma_3 + \gamma_1\gamma_4 + \gamma_3\gamma_4) + Lb_3 m_3(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_4) +$$
$$+Lb_4 m_4(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3) -$$
$$-(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - L(b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3 + b_4 m_4)) \times$$
$$\times(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3 + \gamma_2\gamma_4 + \gamma_3\gamma_4) +$$
$$+L(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - L(b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3 + b_4 m_4)) \times$$
$$\times(b_1 m_1(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) + b_2 m_2(\gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_4)) +$$
$$+L(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - L(b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3 + b_4 m_4)) \times$$
$$\times(b_3 m_3(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_4) + b_4 m_4(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)) > 0$$

$$(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - L(b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3 + b_4 m_4))^2 \times$$
$$\times(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 - L(\gamma_1\gamma_2\gamma_4 b_1 m_1 + \gamma_1\gamma_3\gamma_4 b_2 m_2 + \gamma_1\gamma_2\gamma_4 b_3 m_3 + \gamma_2\gamma_3\gamma_4 b_4 m_4)) -$$
$$-(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - L(b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3 + b_4 m_4)) \times$$
$$\times(\gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_4 + \gamma_1\gamma_3\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3\gamma_4) +$$
$$+(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - L(b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3 + b_4 m_4)) \times$$

$$\times \left(Lb_1m_1\left(\gamma_2\gamma_3+\gamma_2\gamma_4+\gamma_3\gamma_4\right)+Lb_2m_2\left(\gamma_1\gamma_3+\gamma_1\gamma_4+\gamma_3\gamma_4\right)\right)+$$
$$+\left(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4-L\left(b_1m_1+b_2m_2+b_3m_3+b_4m_4\right)\right)\times$$
$$\times \left(Lb_3m_3\left(\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_4+\gamma_2\gamma_4\right)+Lb_4m_4\left(\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_3+\gamma_2\gamma_3\right)\right)+$$
$$+\left(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4-L\left(b_1m_1+b_2m_2+b_3m_3+b_4m_4\right)\right)\times$$
$$\times\left(-\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_3+\gamma_1\gamma_4+\gamma_2\gamma_3+\gamma_2\gamma_4+\gamma_3\gamma_4\right)+$$
$$+\left(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4-L\left(b_1m_1+b_2m_2+b_3m_3+b_4m_4\right)\right)\times$$
$$\times\left(Lb_1m_1\left(\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4\right)+Lb_2m_2\left(\gamma_1+\gamma_3+\gamma_4\right)\right)+.$$
$$+\left(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4-L\left(b_1m_1+b_2m_2+b_3m_3+b_4m_4\right)\right)\times$$
$$\times\left(Lb_3m_3\left(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_4\right)+Lb_4m_4\left(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3\right)\right)<0.$$

Доведення. В силу Теореми 1, щоб система (12) була стійкою в околі стаціонарної точки $\tilde{x}_k=m_kL, m_k>0$, $k=\overline{1,\ N}$ та $\sum_{k=1}^{N}m_k=1$, за першим наближенням необхідно, а у випадку при $N=4$ і достатньо, щоб виконувалися умови

$$\begin{cases} Sp\left(A\right)<0,\\ detA\ >0,\\ Sp\left(A^+\right)-a_2Sp\left(A\right)>0,\\ \left(Sp\left(A\right)\right)^2detA\ -Sp\left(A^+\right)\left(\ Sp\left(A^+\right)-a_2Sp\left(A\right)\right)<0.\end{cases}$$

Підставивши конкретні значення для системи (12) при $N=4$

$$Sp\left(A\right)=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4-L\left(b_1m_1+b_2m_2+b_3m_3+b_4m_4\right),$$
$$a_2=\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_3+\gamma_1\gamma_4+\gamma_2\gamma_3+\gamma_2\gamma_4+\gamma_3\gamma_4-Lb_1m_1\left(\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4\right)-$$
$$-Lb_2m_2\left(\gamma_1+\gamma_3+\gamma_4\right)-Lb_3m_3\left(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_4\right)-Lb_4m_4\left(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3\right),$$
$$Sp\left(A^+\right)=\gamma_1\gamma_2\gamma_3+\gamma_1\gamma_2\gamma_4+\gamma_1\gamma_3\gamma_4+\gamma_2\gamma_3\gamma_4-Lb_1m_1\left(\gamma_2\gamma_3+\gamma_2\gamma_4+\gamma_3\gamma_4\right)-$$
$$-Lb_2m_2\left(\gamma_1\gamma_3+\gamma_1\gamma_4+\gamma_3\gamma_4\right)-Lb_3m_3\left(\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_4+\gamma_2\gamma_4\right)-$$
$$-Lb_4m_4\left(\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_3+\gamma_2\gamma_3\right),$$
$$detA\ =\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4-L\left(\gamma_1\gamma_2\gamma_4b_1m_1+\gamma_1\gamma_3\gamma_4b_2m_2+\gamma_1\gamma_2\gamma_4b_3m_3+\gamma_2\gamma_3\gamma_4b_4m_4\right),$$

отримаємо сформульовані в Теоремі 4 умови стійкості розв'язків системи. □

3. Результати чисельного експерименту

Нехай є певна спільнота чисельністю $L=1000$ осіб, що піддається впливу певного інформаційного потоку. Тоді в момент часу $t\in[0,T]$ спільноту можна поділити умовно на три частини: тих, що піддалися впливу, засвоїли трансльовану інформацію ($x_1\left(t\right)$); тих, що протидіють (контрдіють) даній інформації ($x_2\left(t\right)$); та тих, які ще не визначилися зі своїм ставленням до інформації, що транслюється ($L-x_1\left(t\right)-x_2\left(t\right)$). Вважатимемо, що жоден із членів спільноти не залишається апріорі байдужим до трансльованої інформації.

Інформація розповсюджується двома інформаційними каналами:

1. Міжособове спілкування членів спільноти. Кожен, хто засвоїв чи контрдіє інформаційному потоку, починає впливати на неохоплених членів. Представимо цей вплив через параметри b_1 та b_2.
2. Зовнішній за відношенням до спільноти інформаційний вплив (ЗМІ), характеристиками якого є наскільки часто транслюється повідомлення, наскільки воно правдоподібне та резонансне. Представимо цей вплив через параметри γ_1 та γ_2.

Впливати безпосередньо на параметри b_1 та b_2 не можна, оскільки вони є характеристикою спільноти, але, знаючи їх значення, можна підібрати такі параметри γ_1 та γ_2, щоб система була стійкою за першим наближенням у околі точок стійкості.

Нехай $b_1 = 0,15$ та $b_2 = 0,088$. Процес розповсюдження інформації при такій постановці задачі можна змоделювати за допомогою системи

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = 0.15x_1(t)(1000 - x_1(t) - x_2(t)) + \gamma_1 x_1(t),$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = 0.088x_2(t)(1000 - x_1(t) - x_2(t)) + \gamma_2 x_2(t).$$

Поставимо за ціль максимально збільшити кількість прихильників контрдії. Для цього нам підходить стаціонарна точка $\left(0,\ \frac{\gamma_2}{0{,}088} + 1000\right)$. Тоді, щоб вищенаведена система була стійкою за першим наближенням у цій точці, мають виконуватися умови

$$\begin{cases} -88 \le \gamma_2 \le 0, \\ \gamma_1 - 1.7\gamma_2 < 0. \end{cases}$$

Візьмемо пару $\gamma_1 = -0,19$ та $\gamma_2 = -0,07$ й подивимось на поведінку системи при таких параметрах ($x_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = 0.4$) (див. Рис.1).

Як видно, прихильники і противники інформаційного повідомлення активно спілкуються у спільноті, причому прихильники навіть інтенсивніше, але за рахунок параметрів зовнішнього впливу, які характеризують дії ЗМІ, направлені на зменшення ажіотажу навколо інформаційного повідомлення, отримуємо ситуацію, коли переважаюча частина суспільства контрдіє повідомленню.

Висновки

Сформульовано необхідні та достатні умови стійкості за першим наближенням у околі точок стійкості при спеціальному виборі параметрів зовнішнього впливу, причому дані результати наводяться для моделей з довільною кількістю типів інформації, а також для випадків, коли поширюється два або чотири типи інформації. Отримані результати дозволяють моделювати динаміку популяції в околі точок рівноваги.

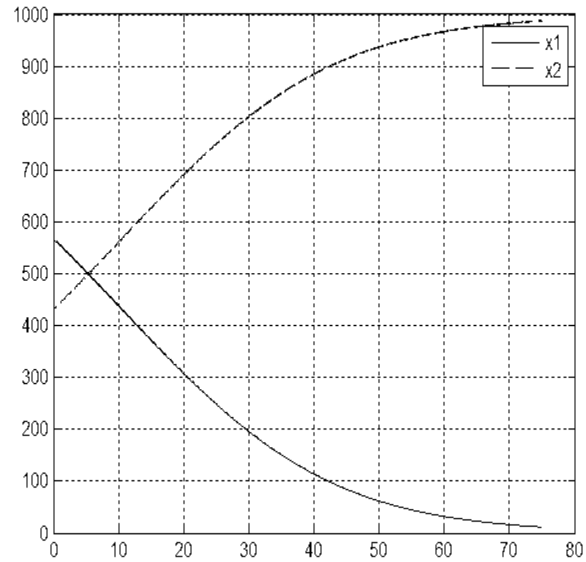

Рис 1. Результати розрахунків

Література

1. Mikhailov A. P., Marevtseva N. A. Models of Information Warfare // Mathematical Models and Computer Simulations. — Vol. 4, № 3. — 2012. — P. 251–259. doi:10.1134/S2070048212030076.
2. Mikhailov A. P., Petrov A. P., Proncheva O. G., Marevtseva N. A. Mathematical Modeling of Information Warfare in a Society // Mediterranean Journal of Social Sciences. — Vol. 6, № 5. — 2015. — P. 27–35. doi:10.5901/mjss.2015.v6n5s2p27.
3. Михайлов А. П., Петров А. П., Маревцева Н. А., Третьякова И. В. Развитие модели распространения информации в социуме // Математическое моделирование. — 2014. — №3 (26). — С. 65–74.
4. Наконечний О. Г., Зінько П. М. Задачі протиборства в системах з динамікою Гомперца // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2015. — №3(120). — С.50–60.
5. Наконечний О. Г., Шевчук Ю. М. Математична модель розповсюдження інформації з нестаціонарними параметрами // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2016. — №3. — С.98–105.
6. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости — М.: Наука, 1967. — 472 с.

Надійшла 20.04.2017