

УДК 517.9

MSC 41A60

**PREDICTION FILTER MATERIALS OPTIMAL USE
IN RAPID MULTILAYER FILTERS WITH PIECEWISE-
HOMOGENEOUS POROUS LOADS**

ANDRIJ BOMBA, JURIJ KLIMJUK

Department of Informatics and Applied Mathematics, Rivne State University of Humanities,
Rivne, Ukraine, E-mail: abomba@ukr.net, klimyuk@ukr.net.

**ПРОГНОЗУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ВИКОРИСТАННЯ
ФІЛЬТРУЮЧИХ МАТЕРІАЛІВ У ШВИДКИХ
БАГАТОШАРОВИХ ФІЛЬТРАХ ІЗ
КУСКОВО-ОДНОРІДНИМИ ПОРИСТИМИ
ЗАВАНТАЖЕННЯМИ**

А. Я. БОМБА, Ю. Є. КЛИМЮК

Кафедра інформатики та прикладної математики, Рівненський державний гуманітар-
ний університет, Рівне, Україна, E-mail: abomba@ukr.net, klimyuk@ukr.net.

ABSTRACT. A mathematical model to predict the process of water purification from impurities in rapid multilayer filter with piecewise-homogeneous porous load, each layer of which has different coefficients of the filter, active porosity and diffusion, subject to constant rate filtration is proposed. The algorithm for numerically-asymptotic approximation of solution of the model problem for a filter that has the shape of a curvilinear parallelepiped, bounded two equipotential surfaces and four surfaces flow, separated by some given specified of the equipotential surfaces on several subdomains, is developed. The proposed model allows by conducting computer experiments to obtain optimal use of the filtering materials and the increase in the length work filters due to the choice of their form and and position of surfaces of section.

KEYWORDS: mathematical model, process of water purification, rapid multilayer filter, piecewise-homogeneous porous load.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано математичну модель для прогнозування процесу доочистки води від домішок у швидких багатошарових фільтрах з кусково-однорідними пористими завантаженнями, кожен шар яких характеризується різними коефіцієнтами фільтрації, активної пористості і дифузії домішок у фільтраційній течії та осаді, адсорбованому на зернах завантаження, при додержанні сталої швидкості фільтрування. Отримано алгоритм чисельно-асимптотичного наближення розв'язку відповідної модельної задачі для фільтру, який має форму криволінійного паралелепіпеда, обмеженого двома екіпотенціальними поверхнями і

чотирма поверхнями течії та розділений деякими заданими еквіпотенціальними поверхнями на кілька підобластей. Запропонована модель дозволяє для заданої сталої швидкості фільтрування шляхом проведення комп'ютерних експериментів спрогнозувати оптимальні варіанти використання фільтрувальних матеріалів і збільшення тривалості роботи фільтрів за рахунок вибору їх форми та положення поверхонь розділу.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: математична модель, процес доочистки води, швидкий багатошаровий фільтр, кусково-однорідне пористе завантаження.

ВСТУП

Прісні підземні води широко використовуються для водопостачання, зрошення земельних угідь та інших видів господарської діяльності. Попереднє видалення нерозчинених і колоїдно-розчинених речовин (домішок) з води досягається шляхом її відстоювання. Наступним етапом підготовки води є її фільтрування, для чого у більшості випадків використовуються швидкі одношарові і багатошарові фільтри із завантаженнями з піску і гравію або інших фільтруючих матеріалів завдяки більш високій швидкості фільтрування [1–4].

Розробкою теоретичних основ очистки рідин від домішок шляхом їх фільтрування через пористі завантаження та подальшим її вдосконаленням займалося чимало вітчизняних і зарубіжних вчених [5–12]. У якості математичної моделі процесу доочистки рідини від домішок вітчизняними дослідниками найчастіше використовується модель Д. М. Мінца при сталій швидкості фільтрування або деяка її модифікація (вдосконалена модель). У [13] запропоновано просторове узагальнення математичної моделі Д. М. Мінца, яка є більш ефективною для проведення теоретичних досліджень, націлених на оптимізацію параметрів процесу фільтрування (часу захисної дії завантаження, розмірів фільтра тощо). У [14] її вдосконалено шляхом введення додаткового рівняння для визначення зміни активної пористості завантаження вздовж фільтру. У [15] ще додатково враховано дифузію домішок у осаді, адсорбованому на зернах завантаження. Математичні моделі у [13–15] описані нелінійними сингулярно-збуреними крайовими задачами (у моделях прийнято, що конвективні компоненти масоперенесення й адсорбції переважають над вкладом дифузійних процесів й десорбції) і розв'язуються з використанням числово-асимптотичних методів. При цьому суттєвим є перехід від початкової задачі для складної конфігурації криволінійної області (обмеженої поверхнями течії й еквіпотенціальними поверхнями) до задачі для відповідної канонічної області комплексного потенціалу, яка має вигляд прямокутного паралелепіпеда.

Зростаюча вартість фільтруючих матеріалів вимагає проведення досліджень для їх більш якісного використання. Тому актуальною задачею є

математичне моделювання процесу доочистки води від домішок у багатопарових швидких фільтрах з кусково-однорідними пористими завантаженнями та прогнозування оптимальних варіантів використання фільтрувальних матеріалів і збільшення тривалості роботи фільтрів за рахунок вибору їх форми та положення еквіпотенціальних поверхонь розділу шарів.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай маємо деяку модельну область $G_{\mathbf{z}} = ABCDA_*B_*C_*D_*$ — однозв'язний криволінійний паралелепіпед, обмежений гладкими, ортогональними між собою у кутових точках та по ребрах, двома еквіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{\mathbf{z} = (x, y, z) : f_1(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{\mathbf{z} : f_2(x, y, z) = 0\}$ і чотирма поверхнями течії $ADD_*A_* = \{\mathbf{z} : f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{\mathbf{z} : f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{\mathbf{z} : f_5(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{\mathbf{z} : f_6(x, y, z) = 0\}$ та розділений деякими заданими еквіпотенціальними поверхнями $E_sF_sF_{*s}E_{*s} = \{\mathbf{z} : f_{*s}^*(x, y, z) = 0\}$ ($s = \overline{1, p-1}$) на p підобластей $G_{\mathbf{z}}^1 = ABF_1E_1A_*B_*F_{*1}E_{*1}$, $G_{\mathbf{z}}^s = E_sF_sF_{s+1}E_{s+1}E_{*s}F_{*s}F_{*s+1}E_{*s+1}$ ($s = \overline{2, p-2}$), $G_{\mathbf{z}}^p = E_{p-1}F_{p-1}CDE_{*p-1}F_{*p-1}C_*D_*$ (рис. 1 а). Для області $G = G_{\mathbf{z}} \times (0, \infty)$ розглянемо модельну задачу, описану системами рівнянь

$$\{\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \text{div } \vec{v} = 0; (x, y, z) \in G_{\mathbf{z}}^s, s = \overline{1, p}, \quad (1)$$

$$\begin{cases} (\sigma \cdot C)'_t = \text{div} (D \cdot \text{grad } C) - \vec{v} \cdot \text{grad } C - \alpha \cdot C + \beta \cdot U; \\ (\sigma \cdot U)'_t = \text{div} (D^* \cdot \text{grad } U) + \alpha \cdot C - \beta \cdot U, \sigma'_t = -\gamma \cdot U; \\ (x, y, z) \in G_{\mathbf{z}}^s, s = \overline{1, p} \end{cases} \quad (2)$$

за крайових умов

$$\begin{cases} \varphi|_{ABB_*A_*} = \varphi^*, \varphi|_{CDD_*C_*} = \varphi^*; \\ \varphi'_{\vec{n}}|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} C|_{ABB_*A_*} = c^*, C'_{\vec{n}}|_{CDD_*C_*} = 0; \\ C'_{\vec{n}}|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0; \\ U|_{ABB_*A_*} = u^*, U'_{\vec{n}}|_{CDD_*C_*} = 0; \\ U'_{\vec{n}}|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

початкових умов

$$\{C|_{t=0} = c_0^0, U|_{t=0} = u_0^0, \sigma|_{t=0} = \sigma_0^0 \quad (5)$$

і умов узгодженості на поверхнях розділу $E_sF_sF_{*s}E_{*s}$ ($s = \overline{1, p-1}$)

$$\begin{cases} \varphi|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = \varphi|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}} = \varphi_{*s}^*; \\ \kappa_s \cdot \varphi'_{\vec{n}}|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = \kappa_{s+1} \cdot \varphi'_{\vec{n}}|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}}, \quad s = \overline{1, p-1}, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} C|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = C|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}}, U|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = U|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}}; \\ (\sigma \cdot (C + U))'_t|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = (\sigma \cdot (C + U))'_t|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}}; \\ D_s \cdot C'_{\vec{n}} - v_n^s \cdot C|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = D_{s+1} \cdot C'_{\vec{n}} - v_n^s \cdot C|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}}; \\ D_s^* \cdot U'_{\vec{n}}|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = D_{s+1}^* \cdot U'_{\vec{n}}|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}}, \quad s = \overline{1, p-1}, \end{cases} \quad (7)$$

$\eta|_{A_*B_*C_*D_*} = Q^*$, фільтраційна задача (1), (3), (6) замінюється більш загальною прямою задачею на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення області $G_{\mathbf{z}}$ на відповідну область комплексного потенціалу — прямокутний паралелепіпед $G_{\mathbf{w}} = A'B'C'D'A_*B_*C_*D_*$, який розділено деякими поверхнями $E'_s F'_s E'_{*s} F'_{*s}$ ($s = \overline{1, p}$) на p підобластей $G_{\mathbf{w}}^1 = A'B'E'_1 F'_1 A'_* B'_* E'_{*1} F'_{*1}$, $G_{\mathbf{w}}^s = E'_s F'_s F'_{s+1} E'_{s+1} E'_{*s} F'_{*s} F'_{*s+1} E'_{*s+1}$ ($s = \overline{2, p-2}$), $G_{\mathbf{w}}^p = E'_{p-1} F'_{p-1} C' D' E'_{*p-1} F'_{*p-1} C'_* D'_*$ (рис. 1 б), де $G_{\mathbf{w}}^s = \{ \mathbf{w} = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_{*(s-1)}^* < \varphi < \varphi_{*s}^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^* \}$ ($s = \overline{1, p}$), φ_{*s}^* ($s = \overline{1, p-1}$), Q_* , Q^* — невідомі параметри, $Q = Q_* \cdot Q^*$ — повна фільтраційна витрата. Припустимо, що ця задача є розв'язаною [16], зокрема, знайдено поле швидкостей \vec{v} , параметри φ_{*s}^* ($s = \overline{1, p-1}$), Q_* , Q^* , Q та ряд інших величин. Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta)$, $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у рівнянні (2) та умовах (4), (5), (7), отримаємо відповідну „дифузійну задачу“ для області $G_{\mathbf{w}} \times (0, \infty)$

$$\begin{cases} (\tilde{\sigma} \cdot c)'_t = D \cdot (b_1 \cdot c''_{\varphi\varphi} + b_2 \cdot c''_{\psi\psi} + b_3 \cdot c''_{\eta\eta} + b_4 \cdot c'_{\psi} + b_5 \cdot c'_{\eta}) - \\ - \frac{\tilde{v}^2}{\kappa} \cdot c'_{\varphi} - \tilde{\alpha} \cdot c + \tilde{\beta} \cdot u, (\tilde{\sigma} \cdot u)'_t = D^* \cdot (b_1 \cdot u''_{\varphi\varphi} + b_2 \cdot u''_{\psi\psi} + \\ + b_3 \cdot u''_{\eta\eta} + b_4 \cdot u'_{\psi} + b_5 \cdot u'_{\eta}) + \tilde{\alpha} \cdot c - \tilde{\beta} \cdot u, \tilde{\sigma}'_t = -\tilde{\gamma} \cdot u; \\ (\varphi, \psi, \eta) \in G_{\mathbf{w}}^s, s = \overline{1, p}, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} c|_{\varphi=\varphi_*} = \tilde{c}_*, c'_{\varphi}|_{\varphi=\varphi_*} = 0; \\ c'_{\psi}|_{\psi=0} = c'_{\psi}|_{\psi=Q_*} = c'_{\eta}|_{\eta=0} = c'_{\eta}|_{\eta=Q^*} = 0; \\ u|_{\varphi=\varphi_*} = \tilde{u}_*, u'_{\varphi}|_{\varphi=\varphi_*} = 0; \\ u'_{\psi}|_{\psi=0} = u'_{\psi}|_{\psi=Q_*} = u'_{\eta}|_{\eta=0} = u'_{\eta}|_{\eta=Q^*} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\{c|_{t=0} = \tilde{c}_0^0, u|_{t=0} = \tilde{u}_0^0, \tilde{\sigma}|_{t=0} = \tilde{\sigma}_0^0, \quad (10)$$

$$\begin{cases} \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} c = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} c, \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} u = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} u; \\ \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} (\tilde{\sigma} \cdot (c+u))'_t = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} (\tilde{\sigma} \cdot (c+u))'_t; \\ \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} (D_s \cdot c'_{\varphi} - \kappa_s \cdot c) = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} (D_{s+1} \cdot c'_{\varphi} - \kappa_{s+1} \cdot c); \\ \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} D_s^* \cdot u'_{\varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} D_{s+1}^* \cdot u'_{\varphi}, s = \overline{1, p-1}, \end{cases} \quad (11)$$

де $c = c(\varphi, \psi, \eta, t) = C(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t)$, $u = u(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{c}_* = \tilde{c}_*(\psi, \eta, t)$, $\tilde{u}_* = \tilde{u}_*(\psi, \eta, t)$, $\tilde{c}_0^0 = \{ \tilde{c}_s^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_{\mathbf{w}}^s, s = \overline{1, p} \}$, $\tilde{u}_0^0 = \{ \tilde{u}_s^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_{\mathbf{w}}^s, s = \overline{1, p} \}$, $\tilde{\sigma}_0^0 = \{ \tilde{\sigma}_s^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_{\mathbf{w}}^s, s = \overline{1, p} \}$, $\tilde{\alpha} = \{ \tilde{\alpha}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_{\mathbf{w}}^s, s = \overline{1, p} \}$, $\tilde{\beta} = \{ \tilde{\beta}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_{\mathbf{w}}^s, s = \overline{1, p} \}$, $\tilde{\gamma} = \{ \tilde{\gamma}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_{\mathbf{w}}^s, s = \overline{1, p} \}$, $b_r = \{ b_{r,s}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_{\mathbf{w}}^s, s = \overline{1, p} \}$, ($r = \overline{1, 5}$), $\tilde{v} = \{ \tilde{v}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_{\mathbf{w}}^s, s = \overline{1, p} \}$, $\tilde{\beta}_s = \varepsilon \cdot \tilde{\beta}_s$, $\tilde{\gamma}_s = \varepsilon \cdot \tilde{\gamma}_s$, $\tilde{c}_s^0 = \tilde{c}_s^0(\varphi, \psi, \eta)$, $\tilde{u}_s^0 = \tilde{u}_s^0(\varphi, \psi, \eta)$, $\tilde{\sigma}_s^0 = \tilde{\sigma}_s^0(\varphi, \psi, \eta)$, $\tilde{\alpha}_s = \tilde{\alpha}_s(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\beta}_s = \tilde{\beta}_s(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\gamma}_s = \tilde{\gamma}_s(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{v}_s = \tilde{v}_s(\varphi, \psi, \eta)$, $b_{r,s} = b_{r,s}(\varphi, \psi, \eta)$ ($r =$

$$= \overline{1, 5}), b_{1,s} = \varphi'_x{}^2 + \varphi'_y{}^2 + \varphi'_z{}^2 = \tilde{v}_s^2 \cdot \kappa_s^{-2}, b_{2,s} = \psi'^2_x + \psi'^2_y + \psi'^2_z, b_{3,s} = \eta'^2_x + \eta'^2_y + \eta'^2_z, b_{4,s} = \psi''_{xx} + \psi''_{yy} + \psi''_{zz}, b_{5,s} = \eta''_{xx} + \eta''_{yy} + \eta''_{zz} \quad (s = \overline{1, p}) \quad [16].$$

2. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Аналогічно до [13–16] знайдено числово-асимптотичне наближення $c = \{c_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_{\mathbf{w}}^s, s = \overline{1, p}\}$, $u = \{u_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_{\mathbf{w}}^s, s = \overline{1, p}\}$, $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_{\mathbf{w}}^s, s = \overline{1, p}\}$ розв'язку задачі (8)–(11) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ у вигляді таких рядів

$$\begin{aligned} c_s &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot c_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{P}_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{P}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \widehat{P}_{s,i} + \\ &+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \widehat{\widehat{P}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \check{P}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \check{\check{P}}_{s,i} + R_{s,n+1} \quad (s = \overline{1, p}); \\ u_s &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot u_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{H}_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{H}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \widehat{H}_{s,i} + \\ &+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \widehat{\widehat{H}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \check{H}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \check{\check{H}}_{s,i} + \check{R}_{s,n+1} \quad (s = \overline{1, p}); \\ \tilde{\sigma}_s &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot \tilde{\sigma}_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{h}_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{h}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \widehat{h}_{s,i} + \\ &+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \widehat{\widehat{h}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \check{h}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \check{\check{h}}_{s,i} + \check{R}_{s,n+1} \quad (s = \overline{1, p}), \end{aligned}$$

де $c_{s,i} = c_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $u_{s,i} = u_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\sigma}_{s,i} = \tilde{\sigma}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($s = \overline{1, p}$, $i = \overline{0, n}$) – члени регулярних частин асимптотик, $\tilde{P}_{s,i} = \tilde{P}_{s,i}(\tilde{\phi}_{s-1}, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{P}}_{s,i} = \tilde{\tilde{P}}_{s,i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t)$, $\tilde{H}_{s,i} = \tilde{H}_{s,i}(\tilde{\phi}_{s-1}, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{H}}_{s,i} = \tilde{\tilde{H}}_{s,i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t)$ ($s = \overline{1, p}$, $i = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару у околах $\varphi = \varphi_{*s}^*$ ($s = \overline{0, p}$) (поправки у околі меж шарів модельної області), $\widehat{P}_{s,i} = \widehat{P}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\widehat{\widehat{P}}_{s,i} = \widehat{\widehat{P}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \eta, t)$, $\widehat{H}_{s,i} = \widehat{H}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\widehat{\widehat{H}}_{s,i} = \widehat{\widehat{H}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \eta, t)$, $\check{P}_{s,i} = \check{P}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t)$, $\check{\check{P}}_{s,i} = \check{\check{P}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \tilde{\eta}, t)$, $\check{H}_{s,i} = \check{H}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, t)$, $\check{\check{H}}_{s,i} = \check{\check{H}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \tilde{\eta}, t)$ ($s = \overline{1, p}$, $i = \overline{0, 2n+1}$) – функції типу примежового шару відповідно у околах $\psi = 0$, $\psi = Q_*$, $\eta = 0$, $\eta = Q^*$ (поправки на бічних стінках модельної області), $\tilde{\phi}_s = \frac{\varphi - \varphi_{*s}^*}{\varepsilon}$ ($s = \overline{0, p-1}$), $\tilde{\phi}_s = \frac{\varphi_{*s}^* - \varphi}{\varepsilon}$ ($s = \overline{1, p}$), $\tilde{\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\tilde{\psi}} = \frac{Q_* - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\eta} = \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\tilde{\eta}} = \frac{Q^* - \eta}{\sqrt{\varepsilon}}$ – відповідні їм регуляризуючі перетворення (розтяги), $R_{s,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$, $\check{R}_{s,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$, $\check{\check{R}}_{s,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ($s = \overline{1, p}$) – залишкові члени. Зокрема, для знаходження $c_{s,i}$, $u_{s,i}$, $\tilde{\sigma}_{s,i}$ ($s = \overline{1, p}$, $i = 0, n$) одержано формули

$$c_{s,0} = \begin{cases} e^{-\tilde{\lambda}_{1,1}(\varphi,\psi,\eta,t)} \cdot \tilde{c}_*(\psi, \eta, t - \tilde{f}_1(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq \tilde{f}_1; \\ e^{-\tilde{\lambda}_{s,1}(\varphi,\psi,\eta,t)} \cdot c_{s-1,0}(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta, t - \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq \tilde{f}_s; \\ e^{-\tilde{\lambda}_{s,2}(\varphi,\psi,\eta,t)} \cdot \tilde{c}_s^0(\tilde{f}_s^{-1}(\tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta), & t < \tilde{f}_s, \end{cases}$$

$$u_{s,0} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_s^0} \cdot \int_0^t \tilde{\alpha}_s(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) \cdot c_{s,0}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} + \tilde{u}_s^0, \quad \tilde{\sigma}_{s,0} = \tilde{\sigma}_s^0 \quad (s = \overline{1, p}),$$

$$c_{s,i} = \begin{cases} e^{-\tilde{\lambda}_{1,1}(\varphi,\psi,\eta,t)} \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \tilde{g}_{1,i}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\tilde{\lambda}_{1,1}(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t)} d\tilde{\varphi}, & t \geq \tilde{f}_1; \\ e^{-\tilde{\lambda}_{s,1}(\varphi,\psi,\eta,t)} \cdot \int_{\varphi_{*(s-1)}^*}^{\varphi} \tilde{g}_{s,i}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\tilde{\lambda}_{s,1}(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t)} d\tilde{\varphi} + \tilde{g}_{s,i}, & t \geq \tilde{f}_s; \\ e^{-\tilde{\lambda}_{s,2}(\varphi,\psi,\eta,t)} \cdot \int_0^t \tilde{g}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) \cdot e^{\tilde{\lambda}_{s,2}(\varphi,\psi,\eta,\hat{t})} d\hat{t}, & t < \tilde{f}_s, \end{cases}$$

$$u_{s,i} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_s^0} \cdot \int_0^t \tilde{g}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t}, \quad \tilde{\sigma}_{s,i} = \int_0^t \tilde{g}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \quad (s = \overline{1, p}, i = \overline{1, n}),$$

де

$$\tilde{\lambda}_{s,1}(\varphi, \psi, \eta, t) = \kappa_s \cdot \int_{\varphi_{*(s-1)}^*}^{\varphi} \frac{\tilde{\alpha}_s(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, \tilde{f}_s(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta))}{\tilde{v}^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} d\tilde{\varphi},$$

$$\tilde{\lambda}_{s,2}(\varphi, \psi, \eta, t) = \int_0^t \frac{\tilde{\alpha}_s(\tilde{f}_s^{-1}(\hat{t} + \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \hat{t})}{\tilde{\sigma}_s^0(\tilde{f}_s^{-1}(\hat{t} + \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\hat{t},$$

$$\tilde{g}_{s,i}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) = \kappa_s \cdot \frac{g_{s,i}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, \tilde{f}_s(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) - \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) + t)}{\tilde{v}_s^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)},$$

$$\tilde{g}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) = \frac{g_{s,i}(\tilde{f}_s^{-1}(\hat{t} + \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \hat{t})}{\tilde{\sigma}_s^0(\tilde{f}_s^{-1}(\hat{t} + \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)},$$

$$\tilde{g}_{s,i} = \tilde{g}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t) = e^{-\tilde{\lambda}_{s,1}(\varphi,\psi,\eta,t)} \cdot c_{s-1,i}(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta, t - \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta)),$$

$$g_{s,i} = I(i, 1) \cdot (d_s \cdot (b_{1,s} \cdot c''_{(s,i-1)} \varphi \varphi + b_{2,s} \cdot c''_{(s,i-1)} \psi \psi + b_{3,s} \cdot c''_{(s,i-1)} \eta \eta + b_{4,s} \times \\ \times c'_{(s,i-1)} \psi + b_{5,s} \cdot c'_{(s,i-1)} \eta) + \tilde{\beta}_s \cdot u_{s,i-1} - \sum_{l=1}^i (\tilde{\sigma}_{s,l} \cdot c'_{(s,i-l)} t + \tilde{\sigma}'_{(s,l)} t \cdot c_{s,i-l})),$$

$$\tilde{g}_{s,i} = \tilde{\alpha}_s \cdot c_{s,i} + I(i, 1) \cdot (d_s^* \cdot (b_{1,s} \cdot u''_{(s,i-1)} \varphi \varphi + b_{2,s} \cdot u''_{(s,i-1)} \psi \psi +$$

$$+b_{3,s} \cdot u''_{(s,i-1)\eta\eta} + b_{4,s} \cdot u'_{(s,i-1)\psi} + b_{5,s} \cdot u'_{(s,i-1)\eta} - \tilde{\beta}_s \cdot u_{s,i-1} -$$

$$- \sum_{l=1}^i (\tilde{\sigma}_{s,l} \cdot u'_{(s,i-l)t} + \tilde{\sigma}'_{(s,l)t} \cdot u_{s,i-l}), \quad \tilde{g}_{s,i} = -I(i, 1) \cdot \tilde{\gamma}_s \cdot u_{s,i-1},$$

$$\tilde{f}_s = \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) = \kappa_s \cdot \int_{\varphi_{*(s-1)}}^{\varphi} \frac{\tilde{\sigma}_s^0(\varphi, \psi, \eta)}{\tilde{v}_s^2(\varphi, \psi, \eta)} d\varphi - \text{час проходження відповідною час-}$$

тинкою шляху від точки $(x(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta), y(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta), z(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta)) \in G_{\mathbf{z}}^{s-1}$ до точки $(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) \in G_{\mathbf{z}}^s$ вздовж відповідної лінії течії, \tilde{f}_s^{-1} — функція, обернена відповідно до \tilde{f}_s відносно змінної φ ($s = \overline{1, p}$), $I(a, b) = \begin{cases} 1, & a \geq b; \\ 0, & a < b. \end{cases}$

3. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ РОЗРАХУНКІВ

У ході комп'ютерного експерименту під час моделювання процесу доочистки води від домішок у швидкому двошаровому фільтрі довжиною 1.5 м проведено дослідження ефективності використання фільтруючих матеріалів завантаження у залежності від вибору його форми і положення поверхні розділу. При цьому кожен шар фільтру характеризується різними коефіцієнтами фільтрації $\kappa_1 = 8.5$ м/добу, $\kappa_2 = 5.6$ м/добу, активної пористості $\tilde{\sigma}_1^0 = 0.4$, $\tilde{\sigma}_2^0 = 0.35$ і дифузії $D_1 = 0.0003$ м²/добу, $D_2 = 0.0002$ м²/добу, $D_1^* = 0.000005$ м²/добу, $D_2^* = 0.000002$ м²/добу. Форму першого модельного фільтру описано поверхнями:

$$f_1^1(x, y, z) = (x - 4.0777343)^2 + y^2 + z^2 - 0.3169799,$$

$$f_2^1(x, y, z) = x - 2,$$

$$f_3^1(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y - 6.1553671)^2 + z^2 - 41.8885438,$$

$$f_4^1(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y + 6.1553671)^2 + z^2 - 41.8885438,$$

$$f_5^1(x, y, z) = f_6^1(x, y, z) = (x^2 - 4x + y^2 + z^2)^2 + 16y^2 - 93.254834z^2$$

і вибрано п'ять положень поверхні розділу:

$$f_{*1}^{*1}(x, y, z) = (x - 4.168968)^2 + y^2 + z^2 - 0.7044223,$$

$$f_{*2}^{*1}(x, y, z) = (x - 4.3073801)^2 + y^2 + z^2 - 1.324003,$$

$$f_{*3}^{*1}(x, y, z) =,$$

$$= (x - 4.7154278)^2 + y^2 + z^2 - 3.3735479,$$

$$f_{*4}^{*1}(x, y, z) = (x - 5.4580334)^2 + y^2 + z^2 - 7.957995,$$

$$f_{*5}^{*1}(x, y, z) = (x - 7.5521066)^2 + y^2 + z^2 - 26.8258873.$$

Форму другого модельного фільтру описано поверхнями:

$$f_1^2(x, y, z) = f_2^1(x, y, z), f_2^2(x, y, z) = f_1^1(x, y, z), f_i^2(x, y, z) = f_i^1(x, y, z), (i = \overline{3, 6})$$

і вибрано також п'ять положень поверхні розділу:

$$f_{*i}^{*2}(x, y, z) = f_{*(6-i)}^{*1}(x, y, z), (i = 1, 2, 4, 5),$$

$$f_{*3}^{*2}(x, y, z) = (x - 4.5748068)^2 + y^2 + z^2 - 2.6296302.$$

Функції $f_i^1(x, y, z)$ ($i = \overline{1, 6}$) і $f_i^2(x, y, z)$ ($i = \overline{1, 6}$) підбрані так, щоб забезпечити відповідно „монотонне розширення“ і „монотонне звуження“ у напрямку від його входу до виходу та взаємну ортогональність граней уздовж ребер і у кутових точках. У результаті побудовано розрахункові сіткові області G_z^1 і G_z^2 з різними положеннями поверхні розділу при $n = n_1 + n_2 = 21$, $m = 9$, $l = 7$, $\varphi_* = 0$ (рис. 2). Значення φ^* вибиралися так, щоб середня швидкість фільтрації вздовж двошарового пористого середовища $v_{\text{сер}}(\varphi)$ становила 5 м/год (див. табл. 1). Для областей G_z^1 і G_z^2 знайдено фільтраційну витрату $Q = 1.78 \text{ м}^3/\text{год}$ і значення потенціалу φ^* на поверхнях розділу (табл. 1) та обчислено величини швидкостей фільтрації (рис. 3) і функції $b_i(\varphi, \psi, \eta)$ ($i = \overline{1, 5}$).

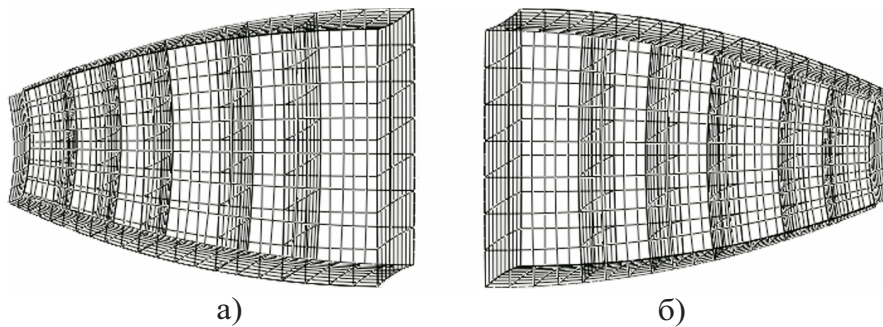


Рис 2. Розраховані сіткові області G_z^1 (а) і G_z^2 (б) з різними положеннями поверхонь розділу

Таблиця 1. Характеристики областей G_z^1 і G_z^2 при різних n_1 і n_2

№	n_1	n_2	$\varphi_{1^*}, \text{м}$	$\varphi_{*1}, \text{м}$	$t_{31}, \text{год}$	$\varphi_{2^*}, \text{м}$	$\varphi_{*2}, \text{м}$	$t_{32}, \text{год}$
1	4	17	28.12	3.72	15	29.30	3.87	18
2	7	14	26.67	6.52	23	27.79	6.79	32
3	10	11	25.21	9.33	24	26.27	9.73	35
4	14	7	23.26	13.11	27	24.23	13.67	36
5	17	4	21.78	15.96	31	22.69	16.65	35

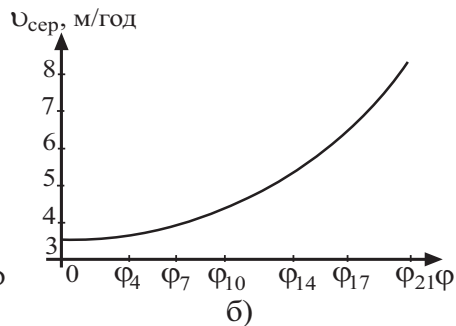
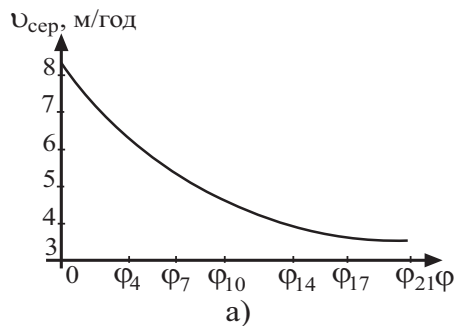


Рис 3. Розподіл $v_{\text{сер}}(\varphi)$ відповідно вздовж областей $G_{\mathbf{z}}^1$ (а) і $G_{\mathbf{z}}^2$ (б) для різних положень поверхні розділу

На рис. 4-6 представлено розподіли середніх величин концентрацій домішок $c_{\text{сер}}(\varphi, t)$ і $u_{\text{сер}}(\varphi, t)$ відповідно у фільтраційній течії і осаді, адсорбованому на зернах завантаження, та середньої величини активної пористості $\tilde{\sigma}_{\text{сер}}(\varphi, t)$ завантаження фільтру для областей $G_{\mathbf{z}}^1$ і $G_{\mathbf{z}}^2$ у момент часу t_3 (табл. 1) при $c_{\text{кр}} = 0.00005$ г/л, $c_* = 0.0005$ г/л, $c_0^0 = 0$, $u_0^0 = 0$, $\tilde{\alpha}_1 = 0.43 - 0.05 \cdot \tilde{v}$ c⁻¹, $\tilde{\alpha}_2 = 0.28 - 0.023 \cdot \tilde{v}$ c⁻¹, $\tilde{\beta}_s = 0.00001 \cdot \tilde{\alpha}_s$ c⁻¹ ($s = 1, 2$), $\tilde{\gamma}_1 = 0.000043$ л/(г · с), $\tilde{\gamma}_2 = 0.000036$ л/(г · с).

Згідно результатів експерименту найкращим із запропонованих є вибір поверхні розділу $f_{*4}^{*2}(x, y, z)$ для області $G_{\mathbf{z}}^2$, при якому час захисної дії фільтру становить 36 год, а найгіршим — вибір поверхні розділу $f_{*1}^{*1}(x, y, z)$ для області $G_{\mathbf{z}}^1$, при якому час захисної дії фільтру становить лише 15 год.

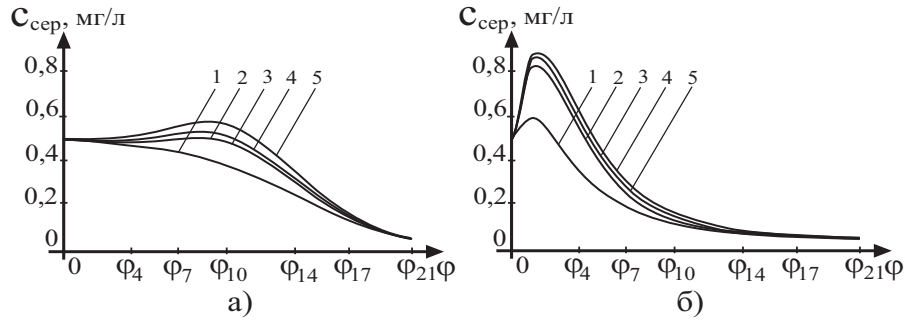


Рис 4. Розподіл $c_{\text{сер}}(\varphi, t)$ відповідно вздовж областей $G_{\mathbf{z}}^1$ (а) і $G_{\mathbf{z}}^2$ (б) для різних положень поверхні розділу у момент часу t_3

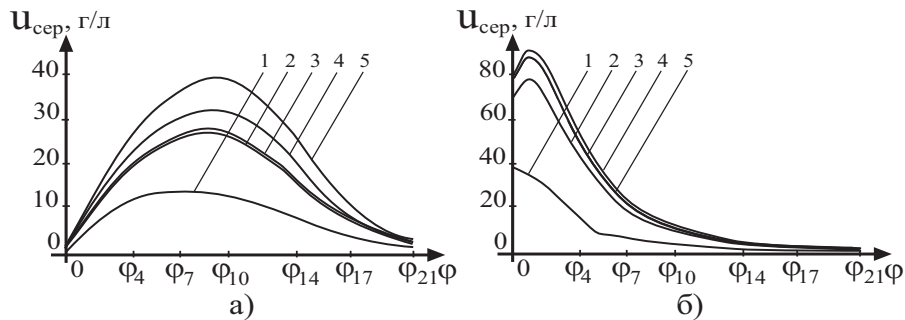


Рис 5. Розподіл $u_{\text{сер}}(\varphi, t)$ відповідно вздовж областей $G_{\mathbf{z}}^1$ (а) і $G_{\mathbf{z}}^2$ (б) для різних положень поверхні розділу у момент часу t_3

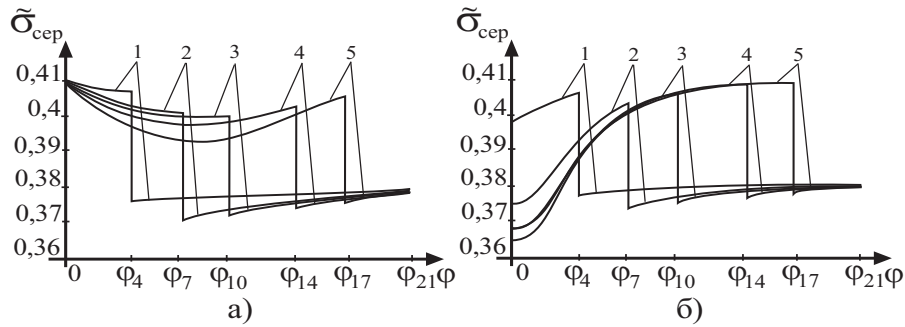


Рис 6. Розподіл $\tilde{\sigma}_{\text{сep}}(\varphi, t)$ відповідно вздовж областей G_z^1 (а) і G_z^2 (б) для різних положень поверхні розділу у момент часу t_3

Висновки

Сформовано просторову математичну модель процесу доочистки води від домішок у багат шарових швидких фільтрах з кусково-однорідними пористими завантаженнями, яка враховує зворотній вплив концентрацій домішок, адсорбованих на зернах завантаження, на активну пористість. Отримана модель дозволяє шляхом проведення комп'ютерних експериментів спрогнозувати оптимальні варіанти використання фільтрувальних матеріалів та збільшення тривалості фільтроциклу фільтрів за рахунок підбору їх форми та положення поверхонь розділу шарів. Згідно отриманих результатів комп'ютерних експериментів моделювання процесу доочистки води від домішок у швидкому двошаровому фільтрі найкращим із запропонованих є вибір поверхні розділу $f_{*4}^{*2}(x, y, z)$ для області G_z^2 , що забезпечує „монотонне звуження“ у напрямку від його входу до виходу, при якому час захисної дії фільтру становить 36 год, а найгіршим — вибір поверхні розділу $f_{*1}^{*1}(x, y, z)$ для області G_z^1 , що забезпечує „монотонне розширення“ у напрямку від його входу до виходу, при якому час захисної дії фільтру становить лише 15 год.

ЛІТЕРАТУРА

1. Орлов В. О. Водоочисні фільтри із зернистою засипкою. — Рівне : НУВГП, 2005. — 163 с.
2. Cheremisinoff N. P. Handbook of water and wastewater treatment technologies. — Boston : Butterworth-Heinemann, 2002. — 645 p. DOI:10.1016/B978-075067498-0/50000-0
3. Hendricks D. W. Fundamentals of water treatment unit processes : physical, chemical, and biological. — Boca Raton : CRC Press, 2011. — 883 p.
4. Quevauviller Ph., Thompson K. C. Analytical methods for drinking water: advances in sampling and analysis. — John Wiley & Sons Ltd, 2006. — 188 p. DOI:10.1002/0470094931

5. Бомба А. Я., Сафоник А. П. Математичне моделювання процесу аеробного очищення стічних вод в пористому середовищі // Математичне та комп'ютерне моделювання: Кам'янець-Подільський національний університет. — 2011. — Вип. 5. — С. 36–44.
6. Мельцер В. З. Фильтровальные сооружения в коммунальном водоснабжении / В. З. Мельцер. — М. : Стройиздат, 1995. — 176 с.
7. Минц Д. М. Теоретические основы технологии очистки воды. — М. : Стройиздат, 1964. — 156 с.
8. Шехтман Ю. М. Фильтрация малоконцентрированных суспензий. — М. : Изд-во АН СССР, 1961. — 212 с.
9. Ives K. J. Deep-bed water filters // New developments. Filtr. And Separ. — Vol. 6, № 1. — 1969. — P. 42–48.
10. Kalteh A. M., Hjorth P. and Berndtsson R. Review of the self-organizing map (SOM) approach in water resources: analysis, modelling and application // Environmental Modelling and Software. — Vol. 23, № 7. — 2008. — P. 835–845. DOI:10.1016/j.envsoft.2007.10.001
11. Maier H. R., Dandy G. C. Neural networks for the prediction and forecasting of water resources variables: a review of modelling issues and applications // Environmental Modelling and Software. — Vol. 15, № 1. — 2000. — P. 101–124. DOI:10.1016/s1364-8152(99)00007-9
12. Heikkinen M., Poutiainen H., Liukkonen M., Heikkinen T. and Hiltunen Y. Self-organizing maps in the analysis of an industrial wastewater treatment process // Mathematics and Computers in Simulation. — Vol. 82, № 3. — 2011. — P. 450–459. DOI:10.1016/j.matcom.2010.10.021
13. Бомба А. Я., Климюк Ю. Є., Сафоник А. П., Сівак В. М. Числово-асимптотичне наближення розв'язків просторових модельних задач процесу фільтрування // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2010. — Вип. 11. — С. 29–39.
14. Климюк Ю. Є., Сівак В. М. Моделювання процесу доочистки води від залишкових катіонів алюмінію фільтруванням через аніоноактивні завантаження із врахуванням зміни фільтраційних властивостей середовища // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. — Вип. 7 (16). — Рівне : РДГУ, 2010. — С. 93–109.
15. Климюк Ю. Є. Математичне моделювання процесу доочистки води від домішок у швидких фільтрах з однорідними пористими завантаженнями // Матеріали XVIII міжнародної науково-практичної інтернет-конференції „Тенденції та перспективи розвитку науки і освіти в умовах глобалізації“: Зб. наук. праць. — Переяслав-Хмельницький, 2016. — Вип. 18. — С. 272–277.
16. Бомба А. Я., Климюк Ю. Є. Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія: монографія. — Рівне : ТЗОВ фірма „Ассоль“, 2014. — 273 с.
17. Рауз Х. Механика жидкости. — М. : Стройиздат, 1967. — 390 с.

Надійшла 31.05.2017