Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2017, №1(124) | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.834
MSC 91A12

COOPERATIVE GAMES IN ASSIGNMENT PROBLEM

Sergei I. Dotsenko
Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: sergei204@ukr.net

КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ В ЗАДАЧАХ О НАЗНАЧЕНИИ

С. И. Доценко
Факультет компьютерных наук и кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина, E-mail: sergei204@ukr.net

Resume. The application of cooperative game theory to assignment problem is considered. Two cooperation models are induced, in which the most/less productive agents are exempt from work. Such models are called „boss game“ and „housekeeper game“ respectively. For the proposed models the Shapley value, the nucleolus and the τ-value are calculated.
Keywords: Assignment problem, cooperative game, Shapley value, nucleolus.

Резюме. Рассматривается применение теории кооперативных игр к задачам о назначении. Вводятся две постановки задачи кооперации, названные игрой в босса и домохозяина, в которых от выполнения работ освобождается агент с максимальной/минимальной продуктивностью соответственно. Для предложенных моделей вычисляются вектор Шепли, n-ядро и τ-ядро.
Ключевые слова: Задача о назначении, кооперативная игра, вектор Шепли, n-ядро.

Введение

Теория кооперативных игр рассматривает ситуации, в которых два или более агента имеют своей целью увеличение собственной прибыли либо сокращения расходов путем кооперации. Одним из приложений кооперативной теории игр является „новое прочтение“ классических оптимизационных задач в предположении, что в ней участвуют несколько агентов с самостоятельными интересами. В [1] дан обзор такого рода результатов и рассмотрена кооперация агентов в таких задачах, как задача линейного программирования, задачи теории расписаний, задача коммивояжера, задача построения минимального остовного дерева, задача о размещении и др.

В данной статье рассматривается применение теории кооперативных игр для исследования двух модификаций задачи о назначениях, названные игрой в домохозяина и игрой в босса. Статья имеет такую структуру. В разделе „предварительные сведения“ дается определение задачи о назначениях и на простом примере иллюстрируется необходимость перераспределения заработка между агентами с целью достижения справедливости. Затем дается определение и рассматриваются основные понятия кооперативных игр, такие, как С-ядро, вектор Шепли, n-ядро и τ-ядро. Затем точечные характеристики кооперативной игры (такие, как вектор Шепли, n-ядро и τ-ядро) вычисляются в явном виде для „игры в домохозяина“ и „игры в босса“ .

1. Предварительные сведения. Задача о назначениях

Задача о назначениях является одной из основных задач комбинаторной оптимизации. Она состоит в нахождении максимально (либо же минимально) взвешенного паросочетания на двудольном графе с весами ребер. В наиболее общей форме задача формулируется так: пусть есть n агентов и n заданий. Нужно распределить задания для агентов так, чтобы каждый агент выполнял ровно одно задание и каждое задание выполнялось ровно одним агентом так, чтобы суммарная эффективность всех работ была бы максимальной (либо же суммарные затраты были бы минимальными).

Наиболее известный алгоритм, решающий задачу о назначениях, в котором время решения задачи полиномиально относительно количества агентов — это так называемый венгерский алгоритм или алгоритм Эгевари.

Однако, после решения задачи может оказаться, что оптимальное решение в определенной степени несправедливо по отношению к агентам. Рассмотрим простой пример — задачу о назначениях 2×2.

		Работы	
		1	2
Агенты	A	6^*	2
	B	7	5^*

Очевидно, что назначение A на 1-ю работу, а B на 2-ю дает суммарную эффективность $6 + 5 = 11$, что больше, чем при другом возможном назначении: $7+2 = 9$. Таким образом, A получает 6, B получает 5. Это выглядит несправедливо, поскольку B выполняет лучше все работы, чем A. Одним из возможных способов устранения такого рода несправедливости — это рассмотрение задачи о назначениях и перераспределение заработков.

2. Кооперативные игры

Кооперативная игра — это пара (N, V), где $N = \{1, ..., n\}$ — конечное множество игроков V — отображение $V : 2^N \to R$ с условием $V(\phi) = 0$. Отображение ставит в соответствие каждой коалиции $S \subseteq N$ действительное число $V(S)$, называемое ценой S.

Ядром игры (N, V) называется множество

$$C(V) = \{x \in R^N \,| x(S) \leq V(S)\}$$

для всех $S \subseteq N$ и $x(N) = V(N)$, где $x(S)$ означает $\sum_{j \in S} x_j$.

Ядро игры может быть пустым.

Игра (N, V) называется монотонной, если $V(S) \subseteq V(T)$ для всех $S, T \subseteq N$ таких, что $S \subseteq T$.

Игра (N, V) называется супермодулярной (или супераддитивной), если $V(S \bigcup T) \geq V(S) + V(T)$ для всех $S, T \subseteq N$, $S \bigcap T = \phi$.

Игра (N, V) называется выпуклой, если $V(S) + V(T) \leq V(S \bigcup T) +$ $+ V(S \bigcap T)$ для всех $S, T \subseteq N$.

Вкладом игрока i в коалицию S называется величина

$$Add(i, S) = V(S \bigcup i) - V(S).$$

Говорят, что игра (N, V) обладает эффектом „снежного кома“ , если $Add(i, S) \leq Add(i, T)$ для всех $S \subseteq T$, $i \notin T$.

Оказывается, что условие выпуклости и эффект „снежного кома“ эквивалентны (см. например [2]), но как правило эффект „снежного кома“ более легко проверить.

Решением кооперативной игры называется отображение $F : (N, V) \to R^N$. F ставит в соответствие каждой кооперативной игре n-мерный вектор $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$, где i-я компонента x_i означает заработок i-го игрока.

Наиболее известным решением кооперативной игры является ВШ, вычисляемый следующим образом

$$\varphi_i(N, V) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} \frac{s!(n - s - 1)!}{n!} Add(i, S).$$

Данная формула имеет простую вероятностную интерпретацию — i-я компонента ВШ — это вклад i-го игрока в „случайную коалицию случайного размера“ . Это означает, что если вначале разыграть размер коалиции t согласно равномерного дискретного распределения от 0 до $n-1$, затем сформировать коалицию из t игроков, выбрав их случайным образом из $\{N/i\}$, то величина $\varphi_i(N, V)$ будет равна математическому ожиданию вклада i-го игрока в коалицию, разыгранную таким образом.

ВШ можно интерпретировать еще и по другому. Пусть $\pi = (i_1, ..., i_n)$ — некоторая перестановка игроков, $\pi(i)$ — позиция i-го игрока в π, $S(i, \pi) = \{k \,| \pi(k) < \pi(i)\}$ — множество предшественников i в π. Оказывается, что i-я компонента ВШ — это вклад i-го игрока в коалицию, состоящую из его предшественников, усредненный по всем возможным $n!$

перестановкам, т.е.

$$\varphi_i(N,V) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi} Add(i, S(i,\pi)).$$

Оказывается, что если игра выпуклая, то ВШ всегда принадлежит ядру, и более того, является „центром масс“ ядра в геометрическом смысле. Если же игра не выпуклая, то, к сожалению, ВШ может не принадлежать ядру, даже если ядро не пусто.

Другими известными решениями кооперативных игр являются n-ядро и τ-значение.

3. τ-значение

Понятие τ-значения было введено в [3] как компромисс между максимальными и минимальными заработками игроков в эффективном распределении. Вектор $M(v)$, называемый N-маргинальным вектором с координатами $M_i := V(N) - V(N/i)$, равными маргинальными вкладам игроков в гранд-коалицию. Это значит, что i-й игрок не может претендовать на заработок больший, чем M_i. Действительно, пусть i-й игрок претендует на $M_i + \Delta$. Значит, суммарный заработок коалиции N/i равен $V(N/i) - \Delta$. Значит, у этой коалиции есть мотив выйти из гранд-коалиции и получить больший заработок, равный $V(N/i)$. Значение $R_v(S,i) := V(S) - \sum_{j\in S\setminus i} M_j$ называется остаточным заработком i-го игрока в коалиции S. Вектором минимальных прав называется вектор с координатами $m_i := \max\limits_{S:i\notin S}\Big(V(S) - \sum_{j\in S/i} M_j\Big)$. Это значит, что i-му игроку нельзя платить меньше, чем m_i, поскольку в противном случае он подговорит членов коалиции $S_0 = \arg\max\limits_{S:i\notin S}\Big(V(S) - \sum_{j\in S/i} M_j\Big)$ выйти из гранд-коалиции, пообещав каждому из них M_j, оставив себе m_i.

τ-значение определяется как пересечение отрезка с концами в точках $\vec{m}$ и $\vec{M}$ и гиперплоскости эффективных решений $\sum_{i\in N} x_i = V(N)$.

4. n-ядро

Понятие n-ядра было введено в [4]. Его определение базируется на определениях эксцесса и лексикографического минимума.

Определение 1. Эксцессом коалиции называется величина

$$e(x,S) = V(S) - \sum_{i\in S} x_i,\ \vec{x}\in D(V), S\in 2^N,$$

где $D(V)$ — множество распределений $\vec{x} = (x_1,...,x_n)$, удовлетворяющих условию эффективности и индивидуальной рациональности, т. е., $\sum_{i\in N} x_i = V(N)$ и $x_i \geq V(i)$, $i = 1, n$ соответственно.

Эту величину можно интерпретировать как меру сожаления того, что суммарный заработок коалиции недостаточно большой.

Определение 2. Вектор $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ лексикографически меньше, чем $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)$, если существует некоторое $k \in \{1, ..., n\}$ такое, что $x_k < y_k$ и $x_i = y_i$ для всех $i < k$.

Определение 3. n-ядром кооперативной игры называется эффективное распределение $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$, для которого достигается лексикографический эксцесс на множестве всех непустых коалиций $S \in 2^N \backslash \phi$, выписанный в убывающем порядке.

Оказывается, что для любой кооперативной игры n-ядро существует и единственно. Кроме того, если C-ядро игры не пусто, то n-ядро гарантированно принадлежит ему. Если C-ядро непусто, то n-ядро можно найти как элемент C-ядра, приняв во внимание, что все эксцессы будут отрицательными. Тогда можно записать вспомогательную задачу максимизации минимума эксцессов, взятых с обратным знаком на множестве всех непустых коалиций, которая по сути является задачей линейного программирования

$$\Psi(\vec{x}) = \min_{S \in 2^N / \phi} (-ex(\vec{x}, S)) \to \max, \ \vec{x} \in Core.$$

Если окажется, что решение данной задачи единственно, то это и есть n-ядро. Если нет, то составляется редуцированная задача, допустимой областью которой является множество оптимальных решений предыдущей задачи и т.д.

5. Игра в домохозяина

Пусть задано кооперативную игру с множеством игроков $N = \{1, ..., n\}$ и пусть i-й игрок работает с продуктивностью a_i. Не нарушая общности рассуждений, можно упорядочить игроков в неубывающем порядке продуктивностей, так, что $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq 0$. Предположим, что в произвольной коалиции S каждый из игроков данной коалиции, кроме одного, например k-го, может работать с заданой продуктивностью при условии, что k-й игрок освобожден от своей работы, т.е. работает с нулевой продуктивностью. Данную ситуацию можно интерпретировать таким образом: один из членов коалиции освобождается от работы для того, чтобы обеспечить жизнедеятельность всей коалиции, например, работая поваром или занимаясь обеспечением быта остальных игроков. Пусть освобожденный игрок называется домохозяином, а соответствующая кооперативная игра — игрой в домохозяина.

Такая игра может иметь интересную историческую интерпретацию. На ранней стадии промышленной революции некоторые гильдии ремесленников следовали такой традиции для повышения культурного уровня работников. Один из членов гильдии читал остальным вслух книги, в то время как они работали. За это каждый из членов гильдии отдавал чтецу часть своего заработка.

Легко видеть, что для каждой коалиции наилучшим решением будет назначить домохозяином наименее квалифицированного члена. Назовем наименее продуктивного члена коалиции домохозяином, а всех остальных

— работниками. Таким образом, характеристическая функция игры имеет вид

$$V(S) = \sum_{i \in S} a_i - \min_{i \in S}(a_i). \qquad (1)$$

Кооперативная игра с такой характеристической функцией обладает следующими свойствами:

1. Ядро игры не пусто.

   Доказательство. Вектор платежей$(a_1, ...a_{n-1}, 0)$, в котором наихудший работник ничего не получает, а все остальные игроки получают величины, равные своим продуктивностям, принадлежит ядру. □

2. Характеристическая функция игры обладает свойством супераддитивности, т.е.,

   $$\left(\forall S_1, S_2,\, S_1 \bigcap S_2 = \phi\right) \left(V(S_1 \bigcup S_2) \geq V(S_1) + V(S_2)\right).$$

   Доказательство. Пусть $a^{'}$, $a^{''}$ — минимальные продуктивности игроков в S_1, S_2 соответственно. Тогда

$$V\left(S_1 \bigcup S_2\right) = \sum_{i \in S_1 \bigcup S_2} (a_i) \; - \; \min\left(a', a''\right),$$

$$V(S_1) + V(S_2) = \sum_{i \in S_1 \bigcup S_2} (a_i) - a' - a'' \leq V(S_1 \bigcup S_2).$$

□

3. Условие выпуклости характеристической функции может нарушаться.

   $$(\forall S_1, S_2)\left(V(S_1 \bigcup S_2) + V(S_1 \bigcap S_2) \geq V(S_1) + V(S_2)\right).$$

   Доказательство. Рассмотрим пример с тремя игроками. Пусть

   $$a_1 = a,\; a_2 = b,\; a_3 = c,\; a > b > c,\; S_1 = \{1, 3\},\; S_2 = \{1, 2\},$$

   тогда

   $$S_1 \bigcup S_2 = \{1, 2, 3\},\, S_1 \bigcap S_2 = \{1\},$$

   $$V(S_1 \bigcup S_2) + V\left(S_1 \bigcap S_2\right) = (a + b) + 0 = a + b,$$

   $$V(S_1) + V(S_2) = a + a = 2a.$$

   Таким образом, условие выпуклости нарушается. □

6. Вектор Шепли

Вначале предположим, что продуктивности никаких двух из игроков не совпадают между собой, т.е., $a_1 > a_2 > ... > a_n \geq 0$.

Вычислим ВШ, исходя из одного из определений, а именно как среднее значение маргинальных вкладов, усредненное по всем возможым $n!$ перестановкам игроков.

Пусть $\pi = (i_1, ..., i_n)$ — некоторая перестановка игроков, $\pi(i)$ — номер позиции игрока i в перестановке π, $S(\pi, k) = \{j | \pi(j) < \pi(i)\}$ — множество игроков, предшествующих k в перестановке π, $Add(k, \pi) = V(S(\pi, k) \bigcup k) - V(S(\pi, k))$ — маргинальный вклад игрока в π (или, другими словами, приращение характеристической функции при добавлении k в коалицию, состоящую из игроков, предшествующих ему в перестановке π

$$\sigma_k = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} Add(k, \pi). \tag{2}$$

Обозначим компоненту ВШ k-го игрока через σ_k.

Вначале найдем σ_1. Согласно (1), первый игрок вносит нулевой вклад во все перестановки, в которых он стоит первым (т.е., $\pi(1) = 1$, доля таких перестановок равна $\frac{1}{n}$) и вклад a_1 во все остальные перестановки (т.е., $\pi(1) \neq 1$, доля таких перестановок равна $\frac{n-1}{n}$), отсюда $\sigma_1 = \frac{n-1}{n} a_1$.

Найдем компоненты ВШ при $k \geq 2$. Зафиксируем k и разобьем все множество перестановок на три непересекающиеся группы, образующие полную группу перестановок.

Первая группа — это перестановки, в которых $\pi(k) = 1$. Доля таких перестановок равна $\frac{1}{n}$ и вклад k-го игрока в такие перестановки равен $Add(k, \pi) = 0$.

Вторая группа — это группа, в которой среди игроков $(k+1), ..., n$ хотя бы один стоит левее k (поскольку доля дополнительной группы, в которой k стоит левее всех игроков $(k+1), ..., n$, равна $\frac{1}{n-k+1}$), тогда искомая доля перестановок равна $\frac{n-k}{n-k+1}$.

Для всех перестановок второй группы k-й игрок, присоединяясь к коалиции, становится работником, поэтому $Add(k, \pi) = a_k$.

Третья группа — это перестановки, в которых k стоит не на первом месте и все игроки $(k+1), ..., n$ стоят правее k. Для любой перестановки из данной группы всегда найдется по крайней мере один игрок из множества $\{1, ..., k-1\}$, стоящих левее k.

Разобьем множество перестановок третьей группы на $k-1$ непересекающихся подгрупп. В i-ю подгруппу отнесем все перестановки, в которых i стоит левее k, а все игроки из множества $\{i+1, ..., k-1; k+1, ..., n\}$ — правее (или формально $\pi(i) < \pi(k) < \pi(j), j \in \{i-1, ..., k-1\} \bigcup \{k+1, ..., n\}$).

Поскольку на множестве перестановок i-й подгруппы третьей группы накладывается условие относительно взаимного расположения $(n-k+1)$ игроков, причем позиции двух игроков (а именно i и k) фиксированы, а порядок остальных игроков произвольный, то доля таких перестановок среди общего числа равна

$$\frac{(n-i-1)!}{(n-i+1)!} = \frac{1}{(n-i)(n-i+1)}.$$

Для всех перестановок третьей группы k-й игрок, присоединяясь к коалиции, становится домохозяином, высвобождая i-го игрока, который переходит из домохозяина в работники, поэтому $Add\,(k,\pi) = a_i$.

Таким образом,

$$\sigma_k = \frac{n-k}{n-k+1}a_k + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{(n-i)(n-i+1)}a_i. \tag{3}$$

Заметим, что найденное как отдельный случай значение σ_1 может быть также найдено исходя из данной формулы, если полагать сумму равной нулю в случае, когда нижний индекс суммирования превышает верхний.

Покажем теперь, что данная формула вычисления компонент ВШ применима и в случае, когда некоторые из продуктивностей игроков совпадают. Для этого достаточно показать, что $\sigma_k = \sigma_{k+1}$ при $a_k = a_{k+1}$ для всех $k \in \{1,..,n-1\}$.

Пусть $a_2 = a_1$, тогда $\sigma_2 = \frac{n-2}{n-1}a_1 + \frac{1}{(n-1)n}a_1 = \frac{n-1}{n}a_1 = \sigma_1$.

Пусть $a_{k+1} = a_k$, $k = 2,...,n-1$, тогда

$$\sigma_{k+1} = \frac{n-k-1}{n-k}a_k + \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(n-i)(n-i+1)}a_i =$$

$$= \left[\frac{n-k-1}{n-k} + \frac{1}{(n-k)(n-k+1)}\right]\cdot a_k + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{(n-i)(n-i+1)}a_i =$$

$$= \frac{n-k}{n-k+1}a_k + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{(n-i)(n-i+1)}a_i = \sigma_k.$$

Частные случаи (3) при $n = 2$, 3 и 4 имеют вид

$$n=2:\sigma_1=\sigma_2=\frac{1}{2}a_1,\ n=3:\sigma_1=\frac{2}{3}a_1,\sigma_2=\sigma_3=\frac{1}{6}a_1+\frac{1}{2}a_2,$$

$$n=4:\sigma_1=\frac{3}{4}a_1,\sigma_2=\frac{1}{12}a_1+\frac{2}{3}a_2,\sigma_3=\sigma_4=\frac{1}{12}a_1+\frac{1}{6}a_{21}+\frac{1}{2}a_3.$$

Заметим, что ВШ может и не принадлежать C-ядру. Действительно, пусть $n \geq 3$, $a_1 = 1$; $a_i = 0, i = 2,...,n$. Тогда из (3) находим: $\sigma_1 = \frac{n-1}{n}$; $\sigma_i = \frac{1}{n(n-1)}, i = 2,...,n$, и для коалиций, содержащих первого и любого другого игрока, нарушается условие устойчивости: $\left(\sigma_1 + \sigma_i = \frac{n-2}{n-1}\right) <$ $< (V(1\bigcup i) = 1)$.

7. τ-ядро

Рассмотрим так называемый маргинальный вектор $M(v)$ с координатами $M_i := V(N) - V(N/i)$, тогда $\vec{M} = (a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_{n-1})$.

Вектор минимальных прав $m(V)$ — это вектор с координатами

$$m_i := \max_{S: i\in S}\left(V(S) - \sum_{j\in S/i} M_j\right). \tag{4}$$

Вычислим компоненты данного вектора в явном виде.

Для n-го игрока все выражения, стоящие под знаком максимума в (4), равны нулю, следовательно $m_n = 0$

$$V(S) - \sum_{j\in S\backslash n} M_j = \sum_{j\in S\backslash n} a_j - \sum_{j\in S\backslash n} a_j = 0.$$

Вычислим остальные компоненты m_i.

Пусть $n \notin S$, тогда

$$V(S) - \sum_{j\in S\backslash i} M_j = \left(\sum_{j\in S} a_j - \min_{j\in S} a_j\right) - \left(\sum_{j\in S} a_j - a_i\right) = a_i - \min_{j\in S} a_j.$$

Данное выражение достигает максимума, когда $(n-1) \in S$ и равно $a_i - a_{n-1}$.

Пусть $n \in S$, тогда

$$V(S) - \sum_{j\in S\backslash i} M_j = \left(\sum_{j\in S\backslash n} a_j\right) - \left(\sum_{j\in S\backslash n} a_j - a_i + a_{n-1}\right) = a_i - a_{n-1}.$$

Таким образом, $m_i = a_i - a_{n-1}$,

$$\vec{m} = (a_1 - a_{n-1},\, a_2 - a_{n-1}, ..., a_{n-2} - a_{n-1},\, 0,\, 0),$$

$$\vec{l} = \vec{M} - \vec{m} = (a_{n-1}, ..., a_{n-1}) \sim (1, ..., 1).$$

τ-ядро находится как пересечение луча

$$\vec{p} = \vec{m} + \vec{l}t = (a_1 - a_{n-1} + t, ..., a_{n-2} - a_{n-1} + t, t, t)$$

и гиперплоскости эффективных решений

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = V(N) = a_1 + ... + a_{n-1}$$

и равно

$$\tau = \left(a_1 - \frac{a_{n-1}}{n}, a_2 - \frac{a_{n-1}}{n}, ..., \frac{n-1}{n}a_{n-1}, \frac{n-1}{n}a_{n-1}\right).$$

8. n-ядро

Покажем, что в точке τ к тому же достигается и лексикографический минимум эксцессов на наборе множеств $2^N\backslash N$, упорядоченных в порядке убывания.

Заметим, что $\sum_{i\in S} \tau_i = \sum_{i\in S} a_i - \frac{|S|}{n} a_{n-1}$, тогда

$$ex(\tau, S) = V(S) - \sum_{i\in S} \tau_i = \frac{|S|}{n} a_{n-1} - \min_{i\in S}(a_i).$$

Данное выражение достигает максимума, равного $-\frac{1}{n}a_{n-1}$ для всех $(n-1)$-элементных коалиций, а для всех прочих коалиций значение эксцесса будет строго меньше, чем $-\frac{1}{n}a_{n-1}$.

Пусть τ' — произвольный эффективный дележ, отличный от τ, тогда τ' можно представить в виде $\tau'=\tau+(u_1,...,u_n)$, где $\sum u_i=0$, $|u_1|+...+|u_n|>0$, таким образом найдется такой индекс k, что $u_k>0$, тогда

$$ex(\tau',N\backslash k)=V(N\backslash k)-\sum_{i\in N\backslash k}\tau'_i=ex(\tau,N\backslash k)+u_k=-\frac{1}{n}a_{n-1}+u_k.$$

Значит, в дележе τ' существует коалиция, в которой эксцесс превышает максимальный эксцесс в дележе τ. В силу произвольности выбора τ' приходим к заключению, что лексикографический минимум на множестве упорядоченных в порядке убывания эксцессов достигается при дележе τ, т.е., τ является n-ядром для данной кооперативной игры.

9. Игра в босса

Пусть в игре, подобно ранее рассмотренной игре в домохозяина, принимает участие n игроков с продуктивностями $a_1\geq a_2\geq...\geq a_n\geq 0$. Пусть первый игрок, который имеет максимальную продуктивность, назначается боссом. Босс сам ничего не производит, он лишь контролирует работу остальных. Тогда характеристическая функция игры имеет вид

$$V(S)=\sum_{i\in S}a_i-\max_{i\in S}(a_i)\,. \tag{5}$$

Покажем, что такая характеристическая функция является выпуклой. Для этого нужно проверить условие выпуклости

$$(\forall S,T)\left(V(S)+V(T)\leq V\left(S\bigcup T\right)+V\left(S\bigcap T\right)\right).$$

Подставляя (5) в данное неравенство, имеем

$$\sum_{i\in S}a_i-\max_{i\in S}a_i+\sum_{i\in T}a_i-\max_{i\in T}a_i\leq\sum_{i\in S\bigcup T}a_i-\max_{i\in S\bigcup T}a_i+\sum_{i\in S\bigcap T}a_i-\max_{i\in S\bigcap T}a_i.$$

Это равносильно неравенству

$$\max_{i\in S}a_i+\max_{i\in T}a_i\geq\max_{i\in S\bigcup T}a_i+\max_{i\in S\bigcap T}a_i.$$

Заметим, что оба слагаемых в левой части неравенства не меньше, чем второе слагаемое правой части, и, кроме того, либо первое, либо второе слагаемое левой части равно первому слагаемому правой части, следовательно, даное неравенство и равносильное ему условие справедливо.

Выпуклость функции (5) можно также доказать, доказав выполнение эквивалентного условию выпуклости так называемого „эффекта снежного кома“

$$(\forall S\subset T,k\notin T)\left(Add(k,S)\leq Add(k,T)\right). \tag{6}$$

Для характеристической функции (2) маргинальный вклад игрока в коалицию, если полагать, что максимум по пустой коалиции равен нулю, представим в виде: $Add(k,S) = \min\left(\max_{i\in S}(a_i)\ ; a_k\right)$. И поскольку $(S \subset T) \Rightarrow \left(\max_{i\in S}(a_i) \le \max_{k\in S}(a_k)\right)$, то эффект снежного кома (6) и эквивалентное ему условие выпуклости выполняется.

10. Вектор Шепли

Подобно предыдущему случаю предположим, что продуктивности никаких двух из игроков не совпадают между собой, т.е., $a_1 > a_2 > ... > a_n \ge 0$. Снова вычислим ВШ, как среднее значение маргинальных вкладов, усредненное по всем возможым $n!$ перестановкам игроков.

Если в перестановке π хотя бы один игрок с номером, меньшим k, входит в перестановку раньше k (т.е., $(\exists j)\,((j < k) \wedge (\pi(j) < \pi(k)))$, то маргинальный вклад k в π равен $Add(k,\pi) = a_k$ и доля таких перестановок равна

$$1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}.$$

Множества перестановок будем описывать с помощью вектора, в котором если элементы разделены точкой с запятой, то их взаимное расположение существенно, и запятой в противном случае, например, запись $(k{+}1; k; 1, ..., k{-}1)$ означает совокупность условий $\pi(k{+}1){<}\pi(k){<}\pi(j)$, $j = 1, ..., k-1$. Доля таких перестановок равна $\frac{(k-1)!}{(k+1)!} = \frac{1}{k(k+1)}$ и $Add(k,\pi) = a_{k+1}$.

Доля перестановок вида $(k+2; k; 1, ..., k-1, k+1)$ равна $Add(k,\pi) = a_{k+2}$, и т.д., доля перестановок вида

$$(n; k; 1, ..., k-1, .k+1, ..., n-1)$$

равна $\frac{1}{(n-1)n}$ и $Add(k,\pi) = a_n$ и наконец, доля перестановок вида

$$(k;\ 1, ..., k-1, k+1, ..., n)$$

(т.е., перестановок, в которых k-й элемент стоит на первом месте, а порядок остальных произвольный) равна $\frac{1}{n}$ и $Add(k,\pi) = 0$.

Поскольку все множество перестановок было разбито на непересекающиеся группы, образующие полную группу перестановок, то k-я компонента ВШ равна сумме произведений долей перестановок на соответствующие им маргинальные вклады

$$\sigma_k = \frac{k-1}{k}a_k + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j(j-1)}a_j. \tag{7}$$

Покажем теперь, что данная формула вычисления компонент ВШ применима и в случае, когда некоторые из продуктивностей игроков совпадают. Для этого достаточно показать, что $\sigma_k = \sigma_{k+1}$ при $a_k = a_{k+1}$ для всех $k \in \{1, .., n-1\}$.

Пусть $a_{k+1} = a_k$, $k = 1, ..., n-1$, тогда

$$\sigma_{k+1} = \frac{k}{k+1} a_k + \sum_{j=k+2}^{n} \frac{1}{j(j-1)} a_j =$$
$$= \left[\frac{k}{k+1} - \frac{1}{k(k+1)} \right] \cdot a_k + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j(j-1)} \cdot a_j = \frac{k-1}{k} a_k +$$
$$+ \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j(j-1)} a_j = \sigma_k.$$

Частные случаи (7) при $n = 2$, 3 и 4 имеют вид
$n = 2 : \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2} a_2$, $n = 3 : \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{6} a_3, \sigma_3 = \frac{2}{3} a_3$,
$n = 4 : \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{6} a_3 + \frac{1}{12} a_4, \sigma_3 = \frac{2}{3} a_3 + \frac{1}{12} a_4, \sigma_4 = \frac{3}{4} a_4$.

11. n-ядро

В данной задаче нахождение формулы для вычисления n-ядра в символьном виде для произвольного числа игроков представляется затруднительным. Оказывается, что даже для случая трех игроков n-ядро вычисляется по двум различным формулам в зависимости от соотношения параметров a_i. Воспользуемся формулой вычисления n-ядра для кооперативной игры трех игроков в 0-1-редуцированной форме, которая была приведена в [6, с. 316].

Пусть $N = \{1, 2, 3\}, V(1) = V(2) = V(3) = 0, V(1, 2) = c_3, V(1, 3) = c_2$, $V(2, 3) = c_1$, $c_1 \le c_2 \le c_3 \le 1$, $V(1, 2, 3) = 1$. Тогда

$$Nc = \begin{cases} 100\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \ if \ c_1 \le c_2 \le c_3 \le \frac{1}{3}; \\ \left(\frac{1+c_3}{4}, \frac{1+c_3}{4}, \frac{1-c_3}{2}\right), \ if \ c_3 > \frac{1}{3}, \ c_2 \le \frac{1-c_3}{2}; \\ \left(\frac{c_2+c_3}{2}, \frac{1-c_2}{2}, \frac{1-c_3}{2}\right), \ if \ c_3 > \frac{1}{3}, \ c_2 > \frac{1-c_2}{2}, \ c_2 \le \frac{1-c_3}{2}; \\ \left(\frac{1-2c_1+2c_2+c_3}{4}, \ \frac{1+2c_1-2c_2+c_3}{4}, \ \frac{1-c_3}{2}\right); \\ if \quad c_3 > \frac{1}{3}, c_1 > \frac{1-c_3}{2}, c_1 + c_2 \le \frac{1+c_3}{2}; \\ \left(\frac{1-2c_1+c_2+c_3}{3}, \ \frac{1+c_1-2c_2+c_3}{3}, \ \frac{1+c_1+c_2-2c_3}{3}\right); \\ if \quad c_3 > \frac{1}{3}, c_1 > \frac{1-c_3}{2}, c_1 + c_2 > \frac{1+c_3}{2}. \end{cases} \tag{8}$$

Применительно к игре в босса $c_3 = \frac{a_2}{a_2+a_3}$, $c_2 = c_1 = \frac{a_3}{a_2+a_3}$. Подставляя данные значения c_1, c_2, c_3 в (8), получаем, что первые три условия не могут выполняться ни при каких значениях a_2, a_3, а выполняются четвертое либо пятое условие при $a_3 \le \frac{2}{3}a_2$ либо $a_3 > \frac{2}{3}a_2$ соответственно. При этом значение n-ядра исходной характеристической функции равно

$$Nc = \begin{cases} \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{4}; \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{4}; \frac{a_3}{2}\right),\ if\ a_3 \le \frac{2}{3}a_2; \\ \left(\frac{2}{3}a_2;\ \frac{2}{3}a_2;\ a_3 - \frac{1}{3}a_2\right),\ if\ a_3 > \frac{2}{3}a_2. \end{cases} \tag{9}$$

Литература

1. Curiel I. Cooperative combinatorial games. Глава из сборника Springer optimization and it's applications — Springer, 2008. — V. 17.— P. 131–159.
2. Moulin H. Axioms of cooperative decision making — Cambridge university press, 1991. — 332 p.
3. Tijs. S. Bounds for the core of a game and T-value. Game theory and Mathematical Economics — Amsterdam: North Holland, 1981. — P. 123–132.
4. Schmeidler D. The nucleolus of a characteristic function game // SI AM Journal of applied mathematics. — 1969. — V. 17. — P. 1163–1170.
5. Tijs S. Introduction to Game theory — Hindustan Book Agency, 2003. — 176 p.
6. Мазалов В. Математическая теория игр и проиложения — Спб., изд-во „Лань“ , 2010. — 446 с.

Поступила 01.06.2017