Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2017, №1(124)** | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.8

MSC 91A12, 90C70

BERGE'S EQUILIBRUM IN GAMES WITH FUZZY COALITION STRUCTURE

Serhii Mashchenko, Volodymyr Morenets

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine. E-mail: msomail@yandex.ua, v.i.morenets@gmail.com

РІВНОВАГА ЗА БЕРЖЕМ В ІГРАХ З НЕЧІТКОЮ КОАЛІЦІЙНОЮ СТРУКТУРОЮ

С. О. Мащенко, В. І. Моренець

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна. E-mail: msomail@yandex.ua, v.i.morenets@gmail.com

Abstract. The concept of Berge equilibrium in a non-cooperative games is generalized to the case of fuzzy coalitions of „sympathizers“ players. For this game it is shown that the set of Berge equilibria is a fuzzy set of type 2 (FST-2) in special form (a fuzzy set whose membership function takes fuzzy values). Furthermore, the corresponding membership function is given. The approaches to the construction of FST-2 of Berge equilibria are proposed with maximal reliability of their feasibility and the reliability of unfeasibility not exceeding a given threshold.

Резюме. Узагальнюється поняття рівноваги за Бержем в некооперативних іграх на випадок нечітких коаліцій „співчуваючих“ гравців. Показано, що множина рівноваг за Бержем цієї гри буде нечіткою множиною типу 2 (НМТ-2) спеціального вигляду (нечітка множина, функція належності якої приймає нечіткі значення). Побудованц її функцію належності. Запропоновано підходи до побудови НМТ-2 рівноваг за Бержем з максимальною достовірністю належності до неї та також з достовірністю неналежності, яка не перевищує задану величину.

Вступ

На відміну від рівноваги за Нешем, сенс якої інколи позиціонують як „егоїстичний“, концепція рівноваги за Бержем [1] є досить привабливою в силу її „альтруїстичного“ характеру. Рівновага за Бержем базується на ідеї некооперативної поведінки гравців для випадків, коли агентами гри можуть бути не тільки окремі гравці, а і деякі їхні коаліції, і також, коли одна коаліція гравців може максимізувати функції виграшу гравців іншої коаліції. Зокрема, в [1, 2] доповнююча коаліція кожного гравця максимізує його функцію виграшу. Ця рівновага може використовуватися як альтернативне рішення конфлікту, коли рівноваги за Нешем не існує, або, коли їх багато. У рівновазі за Бержем кожний гравець одержує свій максимальний виграш, якщо ситуація для нього сприятлива зобов'язанням або готовністю інших гравці вибирати стратегії, сприятливі для нього. У даній роботі розглядається випадок, коли для кожного окремого гравця існує нечітка коаліція гравців, які намагаються покращити його виграш (співчувають йому).

Розглянемо гру G у нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$, де $N = \{1, 2, ...n\}$ — множина з n гравців; X_i — множина стратегій гравця $i \in N$; $u_i(x)$ — функція його виграшу, яка визначена на множині ситуацій гри $X = \prod_{i \in N} X_i$, приймає дійсні значення і максимізується.

Ситуація $\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i \in N}$ гри називається рівновагою за Бержем [1], якщо

$$u_i(\hat{x}_{S_i}, \hat{x}_{U_i}) \geq u_i(x_{S_i}, \hat{x}_{U_i}),\ \forall x_{S_i} \in X_{S_i},\ i \in N,$$

де $S_i \subseteq N$ — коаліція гравців, які співчувають гравцю $i \in N$; $U_i = N \backslash S_i$ — коаліція гравців, які не співчувають гравцю $i \in N$; $X_{S_i} = \prod_{j \in S_i} X_j$ — множина наборів стратегій $x_{S_i} = (x_j)_{j \in S_i}$ коаліції S_i, а $X_{U_i} = \prod_{j \in U_i} X_j$ — множина наборів стратегій $x_{U_i} = (x_j)_{j \in U_i}$ коаліції U_i.

Отже, у рівновазі за Бержем співчуваюча коаліція S_i кожного гравця $i \in N$ максимізує його виграш за умови, що стратегії гравців, які не співчувають йому (з коаліції U_i), залишаються незмінними.

Це означення іноді зручно записувати у вигляді системи взаємозв'язаних задач оптимізації

$$u_i(\hat{x}_{S_i}, \hat{x}_{U_i}) = \max_{x_{S_i} \in X_{S_i}} u_i(x_{S_i}, \hat{x}_{U_i}),\ i \in N.$$

Позначимо множину рівноваг за Бержем гри G через BE. Цілком зрозуміло, що її можна представити у вигляді

$$BE = \bigcap_{i \in N} BS_i, \qquad (1)$$

де $BS_i = \{(\hat{x}_{S_i}, \hat{x}_{U_i}) : \ u_i(\hat{x}_{S_i}, \hat{x}_{U_i}) = \max_{x_{S_i} \in X_{S_i}} u_i(x_{S_i}, \hat{x}_{U_i}),\ \ \hat{x}_{U_i} \in X_{U_i}\}$ — множина ситуацій гри, яка складається з найкращих для гравця $i \in N$ наборів стратегій гравців, які йому співчувають, при фіксованих наборах стратегій інших гравців (які йому не співчувають).

Для побудови множини BS_i необхідно для кожного фіксованого набору стратегій $\hat{x}_{U_i} \in X_{U_i}$ гравців, які не співчувають гравцю $i \in N$, розв'язати задачу $\hat{x}_{S_i} = \arg \max_{x_{S_i} \in X_{S_i}} u_i(x_{S_i}, \hat{x}_{U_i})$ та побудувати вектор $(\hat{x}_{S_i}, \hat{x}_{U_i})$.

Практичне застосування рівноваги Бержа для розв'язання та дослідження конфліктів в економічних, соціальних, політичних, екологічних та багатьох інших системах з одного боку показало їх високу адекватність реальним умовам багатьох конфліктів [2], з іншого — дозволило виділити ряд таких класів ігор, для яких її можна успішно узагальнити [1]. Зокрема, у цій роботі досліджуватимуться рівноваги за Бержем в іграх з нечіткими коаліціями співчуваючих гравців.

1. Рівновага за Бержем в іграх з нечіткими коаліціями неспівчуваючих гравців

Припустимо, що важко чітко сказати, які гравці не співчувають гравцю $i \in N$, а можна лише задати функцію належності $\eta_i(j)$, $j \in N$ деякої нечіткої коаліції (множини) гравців $\tilde{U}_i = \bigcup_{i \in N} (j, \eta(j))$, що йому не співчувають. Тоді множина рівноваг за Бержем гри G (позначимо її через FBE) може бути узагальнена так

$$FBE^* = \bigcap_{i \in N} FBS_i^*, . \qquad (2)$$

де FBS_i^* — нечітка множина ситуацій гри, носій якої складається з „найкращих“ для гравця $i \in N$ наборів стратегій гравців, які йому співчувають, при фіксованих наборах стратегій інших гравців (які йому не співчувають). Далі будемо називати її нечіткою множиною сприятливих ситуацій для гравця $i \in N$. Для побудови множини FBS_i^* необхідно для кожної фіксованої ситуації $\hat{x} \in X$ розв'язати таку задачу

$$\max_{x \in X} \{u_i(x) : \ x_j = \hat{x}_j, \ (j, \eta_i(j)) \in \tilde{U}_i\}. \qquad (3)$$

Формулювання такої задачі потребує пояснення. Для цього позначимо через $R_j(\hat{x}) = \{x = (x_1, ..., x_n) \in X \,|\, x_j = \hat{x}_j\}$ множину ситуацій $x = (x_1, ..., x_n) \in X$, які можуть бути отримані з ситуації $\hat{x}$ при фіксованій стратегії $x_j = \hat{x}_j$ гравця $j \in N$. Тоді запис $x_j = \hat{x}_j$, $(j, \eta_i(j)) \in \tilde{U}_i$ задає множину $\tilde{D}_i(\hat{x}) = \tilde{\bigcap}_{(j,\eta_i(j)) \in \tilde{U}_i} R_j(\hat{x})$, де згідно [3] $\tilde{\bigcap}_{(j,\eta_i(j)) \in \tilde{U}_i} R_j(\hat{x})$ — перетин нечіткої множини $\tilde{U}_i$ чітких множин $R_j(\hat{x})$, який є нечіткою множиною типу 2 (НМТ-2). Отже, задача (3) полягає в максимізації цільової функції $u_i(x)$ на НМТ-2 $\tilde{D}_i(\hat{x})$.

НМТ-2 було уведено Л.А. Заде у 1975 році як розширення нечітких множин типу 1. У той час, коли ступені належності елементів в нечіткій множині типу 1 (НМТ-1) є значеннями з інтервалу $[0, 1]$, ступені належності елементів в НМТ-2 є нечіткою множиною на $[0, 1]$. НМТ-2 визначається функцією належності $\lambda : X \to [0, 1] \times [0, 1]$, де $[0, 1] \times [0, 1]$ — множина відображень з $[0, 1]$ в $[0, 1]$.

У [3, 4] запропоновано означення НМТ-2, у якому поняття функції належності з нечіткою множиною значень визначено як нечітке відображення.

Згідно [3, 4] НМТ-2 A, яке визначено на X, називається сукупністю трійок вигляду $(x, y, \psi(x, y))$, де

x — елемент множини X;

y — елемент множини $[0, 1]$ ступенів належності НМТ-2 ;

$\psi : X \times [0, 1] \to [0, 1]$ — функція належності нечіткого відображення, яке задає нечітку функцію належності НМТ-2 A.

Оскільки функція приналежності $\psi(x, y)$ чітка і однозначно визначає НМТ-2 A, то зручно працювати з нею. Щоб не плутати $\psi(x, y)$ з нечіткою функцією належності, у [3, 4] вона називається функцією достовірності значення ступеня належності $y \in Y = [0,1]$ елемента $x \in X$ НМТ-2 або просто функцією достовірності НМТ-2 A.

Нехай $\tilde{N}$ — нечітка множина індексів на N з функцією належності $\eta(j)$, $j \in N$. Згідно [3, 4] перетин $\tilde{D} = \tilde{\bigcap\limits_{(j,\eta(j))\in\tilde{N}}} R_j$ нечіткої множини $\tilde{N}$ чітких множин R_j є НМТ-2 спеціального виду з дискретним носієм $Y = \{0,1\}$ нечіткої множини ступенів належності. Функція достовірності $\psi(x,y)$, $x \in X$, $y \in Y = \{0,1\}$, НМТ-2 $\tilde{D}$ може бути заданою у вигляді

$$\psi(x,0) = \begin{cases} \max\limits_{j\in N}\{\eta(j) \mid x \notin R_j\}, & \exists j \in N \ \ x \notin R_j, \\ 0, & \forall j \in N \ \ x \in R_j; \end{cases}$$

$$\psi(x,1) = \begin{cases} \max\limits_{j\in N} \eta(j), & \forall j \in J^* \ \ x \in R_j, \\ 0, & \exists j \in J^* \ \ x \notin R_j, \end{cases}$$

де $J^* = \operatorname{Arg}\max\limits_{j\in N} \eta(j)$ — множина індексів з максимальним ступенем належності до нечіткої множини $\tilde{N}$.

2. Нечітка множина сприятливих ситуацій

Позначимо через $U_i^* = \operatorname{Arg}\max\limits_{j\in N} \eta_i(j)$ множину гравців з максимальним ступенем належності до нечіткої коаліції гравців $\tilde{U}_i$, які не співчувають гравцю $i \in N$. З викладених вище міркувань стає зрозуміло, що множина $\tilde{D}_i(\hat{x}) = \tilde{\bigcap\limits_{(j,\eta_i(j))\in\tilde{U}_i}} R_j(\hat{x})$ допустимих розв'язків (3) являється НМТ-2, яка задається функцією достовірності $\psi_i^{\hat{x}}(x,y)$, $x \in X$, $y \in \{0,1\}$, де

$$\psi_i^{\hat{x}}(x,0) = \begin{cases} \max\limits_{j\in N}\{\eta_i(j) \mid x_j \neq \hat{x}_j\}, & \exists j \in N \ \ x_j \neq \hat{x}_j, \\ 0, & \forall j \in N \ \ x_j = \hat{x}_j; \end{cases} \tag{4}$$

$$\psi_i^{\hat{x}}(x,1) = \begin{cases} \max\limits_{j\in N} \eta_i(j), & \forall j \in U_i^* \ \ x_j = \hat{x}_j, \\ 0, & \exists j \in U_i^* \ \ x_j \neq \hat{x}_j. \end{cases} \tag{5}$$

Слід зазначити, що величину $\psi_i^{\hat{x}}(x,1)$ можна інтерпретувати як достовірність допустимості ситуації $x \in X$, одержаної з $\hat{x}$ у задачі (3). Відповідно, значення $\psi_i^{\hat{x}}(x,0)$ — достовірність недопустимості.

Можна встановити залежність значень $\psi_i^{\hat{x}}(x,y)$ від умови $x = \hat{x}$. З (4) та (5) випливає

$$\psi_i^{x}(x,0) = 0, \qquad \psi_i^{x}(x,1) = \max_{j\in N} \eta_i(j). \tag{6}$$

Розв'язуючи задачу (3), гравці, які співчувають гравцю $i \in N$, будуть намагатися максимізувати окрім його цільової функції ще й достовірність допустимості $\psi_i^{\hat{x}}(x,1)$ ситуації $x \in X$ у задачі (3), а також мінімізувати достовірність $\psi_i^{\hat{x}}(x,0)$ її недопустимості. Отже, перед гравцями постає така трикритеріальна задача

$$u_i(x) \to \max, \tag{7}$$

$$\psi_i^{\hat{x}}(x,1) \to \max, \tag{8}$$

$$\psi_i^{\hat{x}}(x,0) \to \min, \tag{9}$$

$$x \in X. \tag{10}$$

Позначимо через $SO_i(\hat{x})$ множину оптимальних за Слейтером розв'язків задачі (7)–(10). Нагадаємо, що ситуація x^* називається оптимальною за Слейтером для задачі вигляду (7)–(10). якщо $\not\exists x \in X$, для якої мають місце нерівності: $u_i(x) > u_i(x^*)$, $\psi_i^{\hat{x}}(x,1) > \psi_i^{\hat{x}}(x^*,1)$, $\psi_i^{\hat{x}}(x,0) < \psi_i^{\hat{x}}(x^*,0)$.

Нечіткою множиною сприятливих ситуацій для гравця $i \in N$, які одержано з фіксованої ситуації $\hat{x}$ (це буде множина „оптимальних" розв'язків задачі (3)), будемо називати НМТ-2 із функцією достовірності $\tilde{\psi}_i^{\hat{x}}(x,y)$, $x \in X$, $y \in \{0,1\}$, де

$$\tilde{\psi}_i^{\hat{x}}(x,1) = \begin{cases} \psi_i^{\hat{x}}(x,1), & x \in SO_i(\hat{x}); \\ 0, & x \notin SO_i(\hat{x}), \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}_i^{\hat{x}}(x,0) = \begin{cases} \psi_i^{\hat{x}}(x,0), & x \in SO_i(\hat{x}); \\ 1, & x \notin SO_i(\hat{x}). \end{cases}$$

Для побудови нечіткої множини сприятливих ситуацій для гравця $i \in N$, які одержано з фіксованої ситуації $\hat{x}$, необхідно задатися питанням знаходження елементів її носія $SO_i(\hat{x})$. У загальному випадку для розв'язання трикритеріальної задачі (7)–(10) можна використовувати відомі методи багатокритеріальної оптимізації. Оскільки цільові функції (8)–(9) є достатньо складними, то доцільно розробити метод, який врахує їхню специфіку і дозволить знаходити хоча б частину розв'язків (7)–(10).

Оптимальний за Слейтером розв'язок x^* задачі (7)–(10) будемо називати частково сприятливою ситуацією для гравця $i \in N$, яку одержано з фіксованої ситуації $\hat{x}$ із достовірностями $\psi_i^{\hat{x}}(x^*,0)$ та $\psi_i^{\hat{x}}(x^*,1)$ відповідно її недопустимості та допустимості.

3. Максимально достовірні рівноваги за Бержем

Спробуємо спростити задачу (7)–(10). Позначимо через

$$\eta_i^{\max} = \max_{j \in N} \eta_i(j), i \in N, \tag{11}$$

максимальний ступень належності до нечіткої коаліції гравців, які не співчувають гравцю $i \in N$. Нагадаємо, що $U_i^* = \operatorname{Arg}\max_{j \in N} \eta_i(j)$.

Теорема 1. *Якщо задача*

$$\max_{x_{N \setminus U_i^*} \in X_{N \setminus U_i^*}} u_i(x_{N \setminus U_i^*}, \hat{x}_{U_i^*}) \tag{12}$$

має оптимальний розв'язок x^*, то він буде частково сприятливою ситуацією для гравця $i \in N$, одержаною з фіксованої ситуації $\hat{x}$ з достовірністю допустимості $\psi_i^{\hat{x}}(x^*,1) = \eta_i^{\max}$.

Доведення. Перепишемо задачу (12) у вигляді $\max_{x \in X}\{u_i(x) \mid x_j = \hat{x}_j, j \in U_i^*\}$. Згідно (5) цю задачу можна представити як

$$u_i(x) \to \max,$$

$$\psi_i^{\hat{x}}(x,1) = \eta_i^{\max}, \tag{13}$$

$$x \in X. \tag{14}$$

Позначимо через x^* оптимальний розв'язок цієї задачі. Для доведення теореми достатньо показати, що $x^* \in SO(\hat{x})$.

Припустимо супротивне, що $x^* \notin SO(\hat{x})$. Тоді $\exists\, \bar{x}$, який задовольняє умовам (13)–(14), і для якого мають місце такі нерівності: $u_i(\bar{x}) > u_i(x^*)$, $\psi_i^{\hat{x}}(\bar{x},1) > \psi_i^{\hat{x}}(x^*,1)$, $\psi_i^{\hat{x}}(\bar{x},0) < \psi_i^{\hat{x}}(x^*,0)$. Звідси, в силу умови (13) $\psi_i^{\hat{x}}(\bar{x},1) > \psi_i^{\hat{x}}(x^*,1) = \eta_i^{\max}$. Отримали суперечність.

Теорему доведено.

Отже, для побудови носія НМТ-2 сприятливих ситуацій x для гравця $i \in N$ з достовірністю допустимості $\psi_i^{\hat{x}}(x,1) = \eta_i^{\max}$ (позначимо її FBS_i) треба для кожного набору стратегій $\hat{x}_{U_i^*} \in X_{U_i^*}$ розв'язати задачу (12). Стосовно достовірності недопустимості $\psi_i^{\hat{x}}(x,0)$ цих ситуацій можна сказати лише те, що вона може приймати відповідні значення згідно формули (4).

Нечіткою множиною максимально достовірних сприятливих ситуацій для гравця $i \in N$, які одержано з фіксованої ситуації $\hat{x}$ (це буде підмножина „оптимальних" розв'язків задачі (3), які мають максимальну достовірністю допустимості $\psi_i^{\hat{x}}(x,1) = \eta_i^{\max}$), будемо називати НМТ-2 (позначимо її $FBS_i(\hat{x})$) із функцією достовірності $\tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x,y)$, $x \in X$, $y \in \{0,1\}$ такого вигляду

$$\begin{gathered}
\tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x,1) = \begin{cases} \eta_i^{\max}, & x \in \operatorname{supp}(FBS_i(\hat{x})); \\ 0, & x \notin \operatorname{supp}(FBS_i(\hat{x})), \end{cases} \\
\tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x,0) = \begin{cases} \psi_i^{\hat{x}}(x,0), & x \in \operatorname{supp}(FBS_i(\hat{x})); \\ 1, & x \notin \operatorname{supp}(FBS_i(\hat{x})), \end{cases}
\end{gathered} \tag{15}$$

де $\operatorname{supp}(FBS_i(\hat{x}))$ — множина оптимальних розв'язків задачі (12).

Тоді множиною сприятливих ситуацій x для гравця $i \in N$ буде НМТ-2 $FBS_i = \bigcup\limits_{\hat{x} \in X} FBS_i(\hat{x})$. Зрозуміло, що носієм FBS_i (позначимо його $\operatorname{supp}(FBS_i)$) буде множина

$$\operatorname{supp}(FBS_i) = \bigcup_{\hat{x} \in X} \operatorname{supp}(FBS_i(\hat{x})). \tag{16}$$

Теорема 2. *Функція достовірності $\varphi_i(x,y)$, $x \in X$, $y \in \{0,1\}$ НМТ-2 FBS_i, $i \in N$ має такий вигляд*

$$\varphi_i(x,1) = \begin{cases} \eta_i^{\max}, & x \in \operatorname{supp}(FBS_i); \\ 0, & x \notin \operatorname{supp}(FBS_i), \end{cases} \tag{17}$$

$$\varphi_i(x,0) = \begin{cases} 0, & x \in \operatorname{supp}(FBS_i); \\ 1, & x \notin \operatorname{supp}(FBS_i). \end{cases} \tag{18}$$

Доведення. Нехай A_k — НМТ-2 на X з функціями достовірності відповідно $\varphi_k(x,y)$, $x \in X$, $y \in [0,1]$, $k \in K$. Тоді функція достовірності об'єднання

$A = \bigcup\limits_{k\in K} A_k$ має вигляд [5]

$$\varphi^{\bigcup}(x,y) = \max_{v_l\in[0,1],\ l\in K:\ \max\limits_{k\in K} v_k = y}\ \min_{j\in K} \varphi_j(x,v_j), x\in X, y\in[0,1].$$

Використаємо цю формулу для побудови функції достовірності НМТ-2 FBS_i. Відмітимо, що в нашому випадку $y\in\{0,1\}$. Позначимо множину векторів

$$V^{\cup}(y) = \{v = (v_z)_{z\in X}:\ v_z\in\{0,1\},\ z\in X;\ \max_{z\in X} v_z = y\},\ y\in\{0,1\}. \quad (19)$$

Для достовірності недопустимості ситуації $x\in X$ одержимо $\varphi_i(x,0) = \max\limits_{v\in V^{\cup}(0)} \min\limits_{\hat{x}\in X} \tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x,v_{\hat{x}})$. Оскільки умова $v\in V^{\cup}(0)$ виконується лише у випадку $\forall z\in X\ v_z = 0$, то

$$\varphi_i(x,0) = \min_{\hat{x}\in X} \tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x,0). \quad (20)$$

Покажемо, що виконується (18). Спочатку припустимо, що $x\notin \mathrm{supp}(FBS_i)$. Тоді за (16) для $\forall\hat{x}\in X\ x\notin \mathrm{supp}(FBS_i(\hat{x}))$. Звідси за (15) $\tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x,0) = 1$. Тому $\varphi_i(x,0) = \min\limits_{\hat{x}\in X} \tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x,0) = 1$.

Тепер припустимо, що $x\in \mathrm{supp}(FBS_i)$. Тоді за (16) $\exists\,\hat{x}^*\in X$, $x\in \mathrm{supp}(FBS_i(\hat{x}^*))$. У цьому випадку за (15) формула (20) набуває вигляду

$$\varphi_i(x,0) = \min_{\hat{x}\in X} \psi_i^{\hat{x}}(x,0). \quad (21)$$

Позначимо множину $\hat{X}(x) = \{\hat{x}\in X:\ x\in \mathrm{supp}(FBS_i(\hat{x}))\}$. Покажемо, що $x\in\hat{X}(x)$ також. Припустимо супротивне, що $x\notin\hat{X}(x)$. Тоді для кожного $\hat{x}\in\hat{X}$, тобто, і для $\hat{x}^*$ можливі два випадки: $\exists j\in U_i^*$, для якого $x_j\neq\hat{x}_j^*$, або (і) $u_i(x) > u_i(\hat{x}^*)$.

Множиною оптимальних розв'язків задачі (12) є носій $\mathrm{supp}(FBS_i(\hat{x}^*))$. Крім того

$$x\in \mathrm{supp}(FBS_i(\hat{x}^*)) \ \Leftrightarrow\ \forall\, j\in U_i^*\ x_j = \hat{x}_j^* \ \text{ та }\ u_i(x) = u_i(\hat{x}^*).$$

В обох випадках маємо $x\notin \mathrm{supp}(FBS_i(\hat{x}^*))$ і отримуємо суперечність. Отже, $x\in\hat{X}(x)$.

Продовжимо далі. Оскільки $\hat{X}(x)\subseteq X$, то з (21) очевидно випливає $\varphi_i(x,0) \le \min\limits_{\hat{x}\in X(x)} \psi_i^{\hat{x}}(x,0) \le \psi_i^{x}(x,0)$. Тоді за (6) $\varphi_i(x,0)\le 0$. Оскільки $\varphi_i(x,0)\ge 0$, то очевидно, що $\varphi_i(x,0) = 0$. Отже, формула (18) є справедливою.

Для достовірності допустимості ситуації $x\in X$ одержимо

$$\varphi_i(x,1) = \max_{v\in V^{\cup}(1)} \min_{\hat{x}\in X} \tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x,v_{\hat{x}}). \quad (22)$$

Розглянемо два випадки. Спочатку припустимо, що $x\notin \mathrm{supp}(FBS_i)$. Покажемо, що $\varphi_i(x,1) = 0$. Припустимо супротивне, що $\varphi_i(x,1) > 0$. Тоді з (22) випливає, що $\max\limits_{v\in V^{\cup}(1)} \min\limits_{\hat{x}\in X} \tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x,v_{\hat{x}}) > 0$. Оскільки $v\in V^{\cup}(1)$, то за (19) це означає, що $\exists\hat{x}\in X\ v_{\hat{x}} = 1$, для якого $\tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x,1) > 0$. Тоді за (15)

$x \in \mathrm{supp}(FBS_i(\hat{x})$. Звідси за (16) $x \in \mathrm{supp}(FBS_i)$. Одержали суперечність. Отже, $\varphi_i(x,1) = 0$ для $x \notin \mathrm{supp}(FBS_i)$.

Тепер припустимо, що $x \in \mathrm{supp}(FBS_i)$. Тоді за (16) $\exists\,\hat{x} \in X$, для якого $x \in \mathrm{supp}(FBS_i(\hat{x}))$. Позначимо множину таких ситуацій $\hat{X} = \{z \in X : z \in \mathrm{supp}(FBS_i(\hat{x}))\}$. Виберемо $v_{\hat{x}} = 1$ для $\hat{x} \in \hat{X}$ та $v_{\hat{x}} = 0$ для $\hat{x} \in X\backslash\hat{X}$. Тоді з (22) випливає

$$\varphi_i(x,1) \geq \min\{\min_{\hat{x}\in X}\{\tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x,1) \mid \hat{x} \in \hat{X}\}, \min_{\hat{x}\in X}\{\tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x,0) \mid \hat{x} \in X\backslash\hat{X}\}\}.$$

Оскільки за (15) $\tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x,1) = \eta_i^{\max}\ \forall\hat{x} \in \hat{X}$ та $\tilde{\varphi}_i^{\hat{x}}(x,0) = 1\ \forall\hat{x} \in X\backslash\hat{X}$, то $\varphi_i(x,1) \geq \min\{\eta_i^{\max}, 1\} = \eta_i^{\max}$. Отримали формулу (17).

Теорему 2 доведено.

Узагальнення поняття множини рівноваг за Бержем гри G відповідно (2) приводить до такого означення.

Будемо говорити, що FBE називається НМТ-2 максимально достовірних рівноваг за Бержем, якщо $FBE = \bigcap\limits_{i\in N} FBS_i$.

Очевидно, що носій FBE (позначимо його $\mathrm{supp}(FBE)$) буде також представлено у вигляді

$$\mathrm{supp}(FBE) = \bigcap_{i\in N} \mathrm{supp}(FBS_i). \tag{23}$$

Тому на підставі теореми 1 $\mathrm{supp}(FBE)$ складається з розв'язків системи взаємозв'язаних оптимізаційних задач

$$u_i(\hat{x}_{N\backslash U_i^*}, \hat{x}_{U_i^*}) = \max_{x_{N\backslash U_i^*}\in X_{N\backslash U_i^*}} u_i(x_{N\backslash U_i^*}, \hat{x}_{U_i^*}),\ i \in N. \tag{24}$$

Знайдемо функцію достовірності НМТ-2 FBE, яку ми позначимо через $\varphi^{FBE}(x,y)$, $x \in X$, $y \in \{0,1\}$.

Теорема 3. *Функція достовірності* $\varphi^{FBE}(x,y)$, $x \in X$, $y \in \{0,1\}$ *НМТ-2* FBE *має такий вигляд*

$$\varphi^{FBE}(x,1) = \begin{cases} \min\limits_{i\in N}\max\limits_{j\in N}\eta_i(j), & x \in \mathrm{supp}(FBE); \\ 0, & x \notin \mathrm{supp}(FBE), \end{cases} \tag{25}$$

$$\varphi^{FBE}(x,0) = \begin{cases} 0, & x \in \mathrm{supp}(FBE); \\ \max\limits_{v\in V}\min\limits_{i\in N}\varphi_i(x,v_i), & x \notin \mathrm{supp}(FBE). \end{cases} \tag{26}$$

Доведення. Нехай A_i — НМТ-2 на X з функціями достовірності відповідно $\varphi_i(x,y)$, $x \in X$, $y \in [0,1]$, $i \in N$. Тоді функція достовірності перетину $A = \bigcap\limits_{i\in N} A_i$ має вигляд [5]

$$\varphi^A(x,y) = \max_{v_k\in[0,1],\ k\in N:\ \min\limits_{j\in N} v_j = y}\ \min_{i\in N}\varphi_i(x,v_i), x \in X, y \in [0,1]. \tag{27}$$

Використаємо цю формулу для побудови функції достовірності НМТ-2 FBE. Відмітимо, що у нашому випадку $y \in \{0,1\}$. Позначимо множину векторів

$$V^{\cap}(y) = \{v = (v_i)_{i\in N} :\ v_i \in \{0,1\},\ i \in N;\ \min_{i\in N} v_i = y\},\ y \in \{0,1\}. \tag{28}$$

Для достовірності допустимості ситуації $x \in X$ одержимо $\varphi^{FBE}(x,1) = = \max\limits_{v \in V^{\cap}(1)} \min\limits_{i \in N} \varphi_i(x, v_i)$. Оскільки за (28) умова $v \in V^{\cap}(1)$, виконується лише у випадку $\forall i \in N$ $v_i = 1$, то $\varphi^{FBE}(x,1) = \min\limits_{i \in N} \varphi_i(x,1)$. Тоді з (11) та (17) одержимо $\varphi^{FBE}(x,1) = \min\limits_{i \in N} \eta_i^{\max} = \min\limits_{i \in N} \max\limits_{j \in N} \eta_i(j)$ для $x \in \mathrm{supp}(FBE)$ і $\varphi^{FBE}(x,1) = 0$ для $x \notin \mathrm{supp}(FBE)$. Одержали формулу (25).

Достовірність недопустимості ситуації $x \in X$ за (27) буде такою

$$\varphi^{FBE}(x,0) = \max_{v \in V^{\cap}(0)} \min_{i \in N} \varphi_i(x, v_i). \tag{29}$$

Розглянемо два випадки.

Нехай спочатку $x \in \mathrm{supp}(FBE)$. Покажемо, що $\varphi^{FBE}(x,0) = 0$. Припустимо супротивне, що $\varphi^{FBE}(x,0) > 0$. Тоді $\exists \bar{v} = (\bar{v}_k)_{k \in N} \in V$, що $\forall i \in N$ $\varphi_i(x, \bar{v}_i) > 0$. Оскільки $\bar{v} \in V$, то за (28) $\exists j \in N$, для якого $v_j = 0$. Тому $\varphi_j(x,0) > 0$. Звідси за (18) $x \notin \mathrm{supp}(FBS_i)$. Тому $x \notin \bigcap\limits_{i \in N} \mathrm{supp}(FBS_i)$. Тоді за (23) $x \notin \mathrm{supp}(FBE)$. Отримали суперечність. Звідси та з (29) випливає (26).

Теорему 3 доведено.

Певний інтерес може представляти оцінка знизу значення достовірності недопустимості НМТ-2 максимально достовірних рівноваг за Бержем у випадку $x \notin \mathrm{supp}(FBE)$. Дійсно, у цьому випадку за (23) $\exists i \in N$, для якого $x \notin \mathrm{supp}(FBS_i)$. Позначимо $N_0(x) = \{i \in N : \ x \notin \mathrm{supp}(FBS_i)\} \neq \emptyset$ та $N_1(x) = \{i \in N : \ x \in \mathrm{supp}(FBS_i)\}$. Побудуємо вектор $\bar{v} = ((0)_{k \in N_0}, (1)_{k \in N_1})$. Тоді з (29) випливає

$$\varphi^{FBE}(x,0) \geq \min_{i \in N} \varphi_i(x, \bar{v}_i) = \min\{ \min_{i \in N_0(x)} \varphi_i(x,0), \min_{i \in N_1(x)} \varphi_i(x,1)\}.$$

Звідси за (18) $\varphi^{FBE}(x,0) \geq \min\limits_{i \in N_1(x)} \eta_i^{\max}$.

4. Максимально достовірні рівноваги за Бержем із заданим рівнем достовірності недопустимості

Якщо НМТ-2 FBE максимально достовірних рівноваг за Бержем достатньо інформативна для гравців, то її можна вважати розв'язком поставленої задачі. У протилежному випадку її можна звузити, якщо задати рівень достовірності недопустимості ситуацій з її носія.

Повернемося знову до задачі (7)–(10). Будемо шукати не просто максимально достовірні сприятливі ситуації для гравця $i \in N$, одержані з фіксованої ситуації $\hat{x}$, а такі, що мають ступені належності нечіткій множині гравців $\tilde{U}_i$, які не співчувають гравцю $i \in N$, не більше за задане число $\xi \in (0,1)$ (позначимо цю множину через $U_i^{\xi} = \{j \in N \mid \eta_i(j) \leq \xi\}$) .

Позначимо також множини

$$D_i^{+}(\hat{x}, k, \xi) = \{x \in X \mid x_k > \hat{x}_k; \ x_j = \hat{x}_j, \ j \in N \backslash U_i^{\xi}\}, k \in U_i^{\xi}, \tag{30}$$

$$D_i^{-}(\hat{x}, k, \xi) = \{x \in X \mid x_k < \hat{x}_k; \ x_j = \hat{x}_j, \ j \in N \backslash U_i^{\xi}\}, k \in U_i^{\xi}. \tag{31}$$

Доведемо таку теорему.

Теорема 4. *Нехай $\xi \in (0,1)$ — задане значення параметра, тоді, якщо задача*

$$\min_{k \in U_i^{\xi}} \max\{ \max_{x \in D_i^-(\hat{x},k,\xi)} u_i(x), \max_{x \in D_i^+(\hat{x},k,\xi)} u_i(x)\}, x \in X \tag{32}$$

має оптимальний розв'язок x^*, то він буде частково сприятливою ситуацією для гравця $i \in N$, одержаною з фіксованої ситуації $\hat{x}$ з достовірністю допустимості $\psi_i^{\hat{x}}(x^*, 1) = \eta_i^{\max}$ та з достовірністю недопустимості $\psi_i^{\hat{x}}(x^*, 0)$ не більше за ξ.

Доведення. Розглянемо множину

$$Q_i(\hat{x}, \xi) = \{x \in X \mid 0 < \psi_i^{\hat{x}}(x, 0) \leq \xi;\ x_j = \hat{x}_j,\ j \in N \backslash U_i^{\xi}\}. \tag{33}$$

Позначимо $P_i(\hat{x}, \xi) = \bigcup\limits_{k \in U_i^{\xi}} (D_i^+(\hat{x}, k, \xi) \bigcup D_i^+(\hat{x}, k, \xi))$. Звідси, ураховуючи (30), (31) отримаємо

$$\begin{gathered} P_i(\hat{x}, \xi) = \bigcup_{k \in U_i^{\xi}} \{x \in X \mid x_k \neq \hat{x}_k;\ x_j = \hat{x}_j,\ j \in N \backslash U_i^{\xi}\} = \\ = \{x \in X \mid x_j = \hat{x}_j,\ j \in N \backslash U_i^{\xi}\} \bigcap \left(\bigcup_{k \in U_i^{\xi}} \{x \in X \mid x_k \neq \hat{x}_k\} \right). \end{gathered} \tag{34}$$

Спочатку доведемо

$$P_i(\hat{x}, \xi) = Q_i(\hat{x}, \xi). \tag{35}$$

Покажемо включення $P_i(\hat{x}, \xi) \subseteq Q_i(\hat{x}, \xi)$. Якщо $P_i(\hat{x}, \xi) = \emptyset$, то воно очевидне. Нехай $x^* \in P_i(\hat{x}, \xi) \neq \emptyset$. Припустимо супротивне, якщо $x^* \notin Q_i(\hat{x}, \xi)$. Тоді відповідно (33) можливі два випадки. У першому випадку $\psi_i^{\hat{x}}(x^*, 0) > \xi$. Звідси із (4) отримаємо $\psi_i^{\hat{x}}(x^*, 0) = \max\limits_{j \in N}\{\eta_i(j) \mid x_j^* \neq \hat{x}_j\} > \xi$. Тоді $\exists j \in N \backslash U_i^{\xi}$, для якого $x_j^* \neq \hat{x}_j$. Тому відповідно до (34) $x^* \notin P_i(\hat{x}, \xi)$. Отримали суперечність.

У другому випадку $\exists j \in N \backslash U_i^{\xi}$, для якого $x_j^* \neq \hat{x}_j$. Звідси, із (34) отримаємо $x^* \notin P_i(\hat{x}, \xi)$. У цьому випадку також отримали суперечність. Отже, $x^* \in Q_i(\hat{x}, \xi)$, а отже $P_i(\hat{x}, \xi) \subseteq Q_i(\hat{x}, \xi)$.

Покажемо включення $Q_i(\hat{x}, \xi) \subseteq P_i(\hat{x}, \xi)$. Якщо $Q_i(\hat{x}, \xi) = \emptyset$, то воно очевидне. Нехай $x^* \in Q_i(\hat{x}, \xi) \neq \emptyset$. Припустимо супротивне. Нехай $x^* \notin P_i(\hat{x}, \xi)$. Тоді відповідно до (34) можливі два випадки. У першому випадку $\exists j \in N \backslash U_i^{\xi}\ x_j^* \neq \hat{x}_j$. Звідси із (33) випливає, що $x^* \notin Q_i(\hat{x}, \xi)$. Отримали суперечність. У другому випадку $x^* \notin \bigcup\limits_{k \in U_i^{\xi}} \{x \in X \mid x_k \neq \hat{x}_k\}$. Тоді $\forall k \in U_i^{\xi}\ x_k^* = \hat{x}_k$. Оскільки $U_i^{\xi} = \{j \in N \mid \eta_i(j) \leq \xi\}$, то із (4) очевидно випливає, що або $\psi_i^{\hat{x}}(x^*, 0) = \max\limits_{j \in N}\{\eta_i(j) \mid x_j^* \neq \hat{x}_j\} > \xi$, або $\psi_i^{\hat{x}}(x^*, 0) = 0$. В обох випадках згідно (33) $x^* \notin Q_i(\hat{x}, \xi)$. Також отримали суперечність. Отже, $x^* \in P_i(\hat{x}, \xi)$ і тому $Q_i(\hat{x}, \xi) \subseteq P_i(\hat{x}, \xi)$. Рівність (35) доведено.

Завершимо доведення теореми. Із (35) очевидно випливає еквівалентність задач (32) та такої

$$u_i(x) \to \max_{x \in Q_i(\hat{x}, \xi)} \tag{36}$$

Покажемо, що для будь-якого заданого значення параметра $\xi \in (0,1)$, при якому задача (36) має оптимальний розв'язок, він буде частково сприятливою ситуацією для гравця $i \in N$, яку одержано з фіксованої ситуації $\hat{x}$ із достовірністю допустимості $\eta_i^{\max} = \max\limits_{j \in N} \eta_i(j)$ і з достовірністю недопустимості не більше за ξ. Позначимо через x^* оптимальний розв'язок задачі (36) для деякого значення $\xi \in (0,1)$. Тоді із (33) та (5) випливає

$$\psi_i^{\hat{x}}(x^*, 1) = \max_{j \in N} \eta_i(j) = \eta_i^{\max}. \tag{37}$$

Також із (33) очевидно, що $0 < \psi_i^{\hat{x}}(x^*, 0) \leq \xi$.

Покажемо, що $x^* \in SO_i(\hat{x})$. Припустимо супротивне, що $x^* \notin SO_i(\hat{x})$. Тоді $\exists \bar{x} \in X$, для якого виконуються нерівності $u_i(\bar{x}) > u_i(x^*)$, $\psi_i^{\hat{x}}(\bar{x}, 1) > \psi_i^{\hat{x}}(x^*, 1)$, $\psi_i^{\hat{x}}(\bar{x}, 0) < \psi_i^{\hat{x}}(x^*, 0)$. Звідси отримаємо $\psi_i^{\hat{x}}(\bar{x}, 1) > \psi_i^{\hat{x}}(x^*, 1) = \eta_i^{\max}$. Отримали суперечність із (37). Отже, $x^* \in SO_i(\hat{x})$. Причому $\psi_i^{\hat{x}}(x^*, 1) = \max\limits_{j \in N} \eta_i(j) = \eta_i^{\max}$ та $0 < \psi_i^{\hat{x}}(x^*, 0) \leq \xi$.

Теорему 4 доведено.

Отже, носій НМТ-2 (позначимо через FBS_i^{ξ}) сприятливих ситуацій x для гравця $i \in N$, отриманих з фіксованої ситуації $\hat{x}$ з достовірністю допустимості $\psi_i^{\hat{x}}(x, 1) = \eta_i^{\max}$ та з достовірністю недопустимості $\psi_i^{\hat{x}}(x, 0)$ не більше за ξ, буде об'єднанням розв'язків задачі (32), отриманих для кожної ситуації $\hat{x} \in X$. Функція достовірності FBS_i^{ξ} буде звуженням функції достовірності $\varphi_i(x, y)$ на носій $\mathrm{supp}(FBS_i^{\xi})$ і може бути знайденою за формулами (17), (18).

НМТ-2 рівноваг за Бержем рівня $\xi \in (0,1)$ визначимо як $FBE^{\xi} = \bigcap\limits_{i \in N} FBS_i^{\xi}$. Очевидно, що носій FBE^{ζ} (позначимо його $\mathrm{supp}(FBE^{\zeta})$) буде мати вигляд $\mathrm{supp}(FBE^{\zeta}) = \bigcap\limits_{i \in N} \mathrm{supp}(FBS_i^{\xi})$ і на підставі теореми 4 буде складатись із розв'язків системи взаємозв'язаних оптимізаційних задач

$$u_i(\hat{x}) = \min_{k \in U_i^{\xi}} \max\{ \max_{x \in D_i^-(\hat{x}, k, \xi)} u_i(x), \max_{x \in D_i^+(\hat{x}, k, \xi)} u_i(x) \}, i \in N.$$

Функція достовірності FBE^{ξ} буде звуженням функції достовірності $\varphi^{FBE}(x, y)$ на носій $\mathrm{supp}(FBE^{\zeta})$ і може бути знайденою за формулами (25), (26).

Висновки

У даній роботі основну увагу зосереджено на побудові концепції рівноваги за Бержем у некооперативних іграх, у яких коаліції гравців, що співчувають один іншому, є нечіткими. Згідно до запропонованого підходу ця множина розглядається як НМТ-2, яку отримано шляхом відомої операції перетину нечіткої множини чітких множин. Особливістю такого представлення є те, що елементи носія цієї множини характеризуються двома показниками: достовірністю їхньої належності множині рівноваг за Бержем та достовірністю неналежності. Безпосередньо носій представляє собою множину оптимальних за Слейтером розв'язків трикритеріальної задачі оптимізації. Розроблено методи знаходження його елементів із максимальною достовірністю належності НМТ-2 рівноваг за Бержем, а також з достовірністю неналежності не більше за задане число. Розроблений підхід розширює область застосування теорії нечітких множин на випадок некооперативних ігор з нечіткою коаліційною структурою і може дати новий підхід до розв'язання інших задач теорії ігор в умовах нечіткої інформації.

Література

1. Мащенко С. О. Концепция равновесия по Нэшу и ее развитие / С.О. Мащенко // Журнал обчисл. та прикладн. матем. — 2012. — № 1(107). — С. 40–65.
2. Гусейнов А. А. Математические основы Золотого правила нравственности / А. А. Гусейнов, В. И. Жуковский , К. Н. Кудрявцев; под ред. В. И. Заляпина. — М.: URSS, 2016. — 275 с.
3. Мащенко С. О. Задача оптимизации с нечетким множеством нечетких ограничений / С. О. Мащенко, Мохаммед Саад Ибрахим Аль-Саммарраи // Международный научно-технический журнал „Проблемы управления и информатики“. — 2014. — № 4 . — С. 47–57.
4. Мащенко С. О. Задача математического программирования с нечетким множеством индексов ограничений / Мащенко С. О. // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 1. — С. 62 – 68.
5. Мащенко С. О. Принятие решений при нечетком множестве состояний природы. Теория и методы / Сергей Мащенко. — GmbH: LAP Lambert Academic Publishing, 2013. — 112 с.

Надійшла 03.03.2017