Журнал обчислювальної та прикладної математики
2017, №1(124)
Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.9

MSC 34E05, 34E13, 34L15

HOMOGENIZATION OF MATHIEU EQUATION WITH RAPIDLY OSCILLATION POTENTIAL

Gennadiy Sandrakov, Mariana Bazileva

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: gsandrakov@gmail.com, mbazileva91@gmail.com

ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Г. В. Сандраков, М. И. Базилева

Факультет компьютерніх наук и кибернетики, Киевский национальній университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,
E-mail: gsandrakov@gmail.com, mbazileva91@gmail.com

Abstract. Spectral problems for Mathieu equation with rapidly oscillation potential and periodic boundary value conditions on a finite interval are considered. Asymptotic expansions for eigenvalues and eigenfunctions of the problem are constructed. Statements on the asymptotic accuracy estimates between the constructed asymptotic expansions and an exact solution, which are depending on the eigenvalue number, are proved. Firstly, the dependence is presented in explicit forms with the asymptotic precise estimate.
Keywords: homogenization, Mathieu equation, asymptotic expansion, eigenvalue, eigenfunction.

Резюме. Рассматриваются спектральные задачи для уравнения Матье с быстро осциллирующим потенциалом и периодическими граничными условиями на конечном интервале. Построены асимптотические разложения собственных значений и функций такой задачи. Доказаны утверждения об оценках асимптотической близости построенных асимптотических разложений и точных решений исходной задачи, зависящие от номера соответствующего собственного значения. Впервые, такая зависимость выражена в виде явных формул с асимптотически точной оценкой.
Ключевые слова: осреднение, уравнение Матье, асимптотическое разложение, собственное значение, собственная функция.

Введение

Развитие современной науки и техники предусматривает необходимость исследования разнообразных спектральных задач для дифференциальных уравнений с краевыми условиями, характеризующих квантовые эффекты в решетках, кристаллах и наноструктурах. В основе анализа некоторых из таких задач находятся асимптотические методы и теория осреднения.

Спектральные задачи для общего оператора Штурма-Лиувилля изучаются достаточно давно [1, 2]. Такие задачи с периодическим потенциалом обычно рассматриваются на всей прямой [2, 3]. Задачи об асимптотическом разложении собственных значений и функций для уравнения второго порядка с малым периодическим потенциалом, рассматриваемые на расширяющемся интервале, впервые были поставлены и изучены в [3].

Следует подчеркнуть, что задачи на всей прямой более простые, и исследуются во многих работах [1]–[5], где можно найти и более обширную библиографию по таким исследованиям. Задачи, рассматриваемые на интервале, который асимптотически расширяется, более сложные, поскольку содержат зависимость от некоторого большого параметра N. После перехода к пределу при $N \to \infty$ такие задачи переходят, в некотором смысле, в задачи на всей прямой, имеющие непрерывный спектр лакунарной структуры [6, 7]. Спектральные задачи на расширяющемся интервале могут быть сведены к задачам с быстро осциллирующим потенциалом на конечном интервале. Более того, такие задачи эквивалентны и для фиксированного N имеют дискретный спектр, зависимость которого от N является достаточно сложной. Исследованию такой зависимости для начальных собственных значений и функций в спектральной задаче для уравнения Матье с быстро осциллирующим потенциалом и посвящена данная работа.

Рассматриваемые здесь задачи возникают, например, в физике твердого тела [3,6,7] и наноматериалов [8]–[12]. Так, задача Штурма-Лиувилля на всей прямой с периодическим кусочно-постоянным потенциалом называется задачей Кронига-Пенни и является одной из основных упрощенных моделей в физике твердого тела [7]. Исследования данной работы являются начальным шагом к исследованию задач на решетках, которые моделируют кристаллические решетки [6], решетчатые и трубчатые наноструктуры, например, карбоновые трубки [8] и пленки [9], наноструктуры из графена [10]. В статье [13] рассмотрена спектральная задача на фрагментах кристаллических решеток как первый этап рассмотрения модельных спектральных задач для уравнений с потенциалами на простых решетках. Такие задачи для уравнений без потенциалов рассматривались в работах [14]–[16].

В данной работе при исследовании спектральной задачи для уравнения Матье второго порядка с быстро осциллирующим потенциалом и периодическими граничными условиями используются методы асимптотических разложений и теории осреднения. Вопросы осреднения спектральных задач изучались во многих работах [17, 18], где можно найти и более обширную библиографию по таким исследованиям. Следует отметить, что в этих работах изучались задачи с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами, но с нулевым потенциалом. Здесь будут использованы методы работы [19], применимые к уравнениям с произвольными быстро осциллирующими потенциалами и коэффициентами.

Структура данной работы следующая. В первом параграфе описываются собственные числа и функции уравнения Матье [20], используемые в дальнейших построениях. Спектральная задача для уравнения Матье с F ε-периодическим потенциалом на отрезке $[0,\pi]$ будет рассмотрена во втором параграфе, где сформулировано и основное утверждение о структуре решений этой задачи. В третьем параграфе методами работы [19] строится и обосновывается асимптотика решений рассматриваемой задачи.

1. Постановка задачи

Будет рассматриваться следующая спектральная задача для уравнения Матье второго порядка с быстро осциллирующим потенциалом и периодическими граничными условиями на отрезке $[0,\pi]$: найти такие собственное значение λ_ε и ненулевую собственную функцию u_ε, что

$$\begin{gathered} -\varepsilon^2(u_\varepsilon)'' + 2q\,u_\varepsilon \cos\left(\frac{2x}{\varepsilon}\right) = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon \quad \text{для} \quad x\in(0,\pi), \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(\pi), \quad u'_\varepsilon(0) = u'_\varepsilon(\pi), \end{gathered} \tag{1}$$

где $\varepsilon = (N)^{-1}$ с некоторым положительным целым N. Основной целью работы является исследование собственных значений и функций этой задачи при достаточно больших N и, соответственно, при достаточно малых ε. Уравнение задачи (1) зависит от дополнительного параметра q и записано в форме, принятой в теории специальных функций Матье, определяемых рассматриваемой задачей при $\varepsilon = 1$ в соответствии с [1, 20].

Уравнение задачи (1) можно разделить на ε^2 и рассматривать, таким образом, спектральную задачу для одномерного уравнения Шредингера с очень большим осциллирующим потенциалом (при достаточно малых ε) на конечном интервале. Эта задача является основной составляющей при исследовании прохождения, отражения и рассеяния волн на тонких кристаллических пленках и будет рассмотрена в дальнейших работах.

Кроме того, в задаче (1) можно ввести новую переменную $y = x\,N$ и рассматривать эквивалентную задачу с периодическим потенциалом на расширяющемся интервале $(0,\pi N)$ (впервые исследованную в [3] для достаточно малых потенциалов), где N обозначает фактически число атомов, составляющих кристалл, рассматриваемый как одномерная структура. В физике твердого тела решения такой задачи на расширяющемся интервале принято заменять решениями аналогичной задачи на всей прямой [3, 6, 7]. Однако, совершенно не изучена корректность такой замены. Точнее, практически не исследована корректность и точность этой замены решений задачи на расширяющемся интервале решениями задачи на всей прямой. Такое исследование представляется существенным, поскольку реальные кристаллы имеют конечные размеры и не заполняют все окружающее пространство. Первые шаги в этом направлении будут приведены здесь в форме утверждения о точности приближений собственных значений и функций задачи (1) для одномерного уравнения Матье.

Для фиксированного ε известно [21, 22], что существуют счетные множества собственных значений $\lambda_\varepsilon^0, \lambda_\varepsilon^1, \dots, \lambda_\varepsilon^s, \dots$ и ортонормированных собственных функций $u_\varepsilon^0, u_\varepsilon^1, \dots, u_\varepsilon^s, \dots$, являющихся решениями задачи (1), для которых с учетом возможной кратности выполняются неравенства

$$\lambda_\varepsilon^0 \le \lambda_\varepsilon^1 \le \dots \le \lambda_\varepsilon^s \le \dots \qquad \text{и} \qquad \lambda_\varepsilon^s \to \infty \quad \text{при} \quad s \to \infty.$$

Под кратностью здесь понимается возможное совпадение собственных чисел $\lambda_\varepsilon^s, \lambda_\varepsilon^{s+1}, \dots$ для различающихся собственных функций $u_\varepsilon^s, u_\varepsilon^{s+1}, \dots$. Таким образом, учет кратности означает нумерацию собственных чисел в соответствии с нумерацией различающихся собственных функций.

Основной целью работы является построение и обоснование асимптотики для собственных значений и функций задачи (1) с не очень большими номерами s. Для этого рассмотрим следующую спектральную задачу

$$\begin{gathered} -u'' + 2q\, u \cos(2x) = \lambda\, u \quad \text{для} \quad x \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi), \quad u'(0) = u'(\pi), \end{gathered} \tag{2}$$

совпадающую с задачей (1) при $\varepsilon = 1$. Для $q \neq 0$ известно [1, 20], что существуют счетные множества однократных собственных значений $\lambda_1^0, \lambda_1^1, \dots$ и ортонормированных собственных функций $u_1^0, u_1^1, \dots, u_1^s, \dots$, являющихся решениями задачи (2), для которых выполняются строгие неравенства

$$\lambda_1^0 < \lambda_1^1 < \dots < \lambda_1^s < \dots \qquad \text{и} \qquad \lambda_1^s \to \infty \quad \text{при} \quad s \to \infty.$$

Собственные функции задачи (2), нормированные соответствующим образом, принято называть *функциями Матье.*

Исследованию функций Матье посвящены целые главы в справочниках и даже книги, например, [1]. Для таких функций приняты специальные обозначения [1, 20], например, собственное значение и функцию с нулевым номером принято называть основными и обозначать a_0 и $ce_0(x)$. Традиционно, основную функцию $ce_0(x)$ принято нормировать условиями

$$ce_0(0) > 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi ce_0(x)^2\, dx = \frac{1}{2}\,.$$

При этом известно [1], что $ce_0(0) \neq 0$ для каждого фиксированного q, от которого зависят a_0 и $ce_0(x)$ в соответствии с уравнением из (2). Таким образом, в обозначениях, принятых для задачи (2), можно положить

$$\lambda_1^0 = a_0 \qquad \text{и} \qquad u_1^0 = \sqrt{2}\, ce_0(x),$$

где корень появляется в силу условия ортонормирования $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (u_1^0)^2\, dx = 1$ и известно, что число a_0 всегда отрицательно при $q \neq 0$ и $a_0 = 0$ при $q = 0$.

Непосредственно проверяется, что функция $u_1^0(x/\varepsilon)$ является собственной функцией задачи (1) с собственным значением λ_1^0, и можно определить

$$\lambda_\varepsilon^0 = a_0 \qquad \text{и} \qquad u_\varepsilon^0 = u_1^0(x/\varepsilon) = \sqrt{2}\, ce_0(x/\varepsilon).$$

Однако, определить последующие собственные функции $u_\varepsilon^1, \dots, u_\varepsilon^s, \dots$ задачи (1) с собственными значениями $\lambda_\varepsilon^1, \dots, \lambda_\varepsilon^s, \dots$ значительно сложнее.

Уравнение задачи (2) имеет второй порядок и поэтому можно определить два базисных решения $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ этого уравнения. Такие решения называются *фундаментальными*, если выполнены следующие условия

$$\phi_2(0) = \phi_1'(0) = 0, \qquad \phi_2'(0) = \phi_1(0) = 1. \tag{3}$$

Известно [1], что при $\lambda = a_0$ в уравнении задачи (2) функция $\phi_1(x)$ кратна основной функции Матье. Таким образом, имеем

$$\phi_1(x) = ce_0(x)(ce_0(0))^{-1}.$$

Для фиксированного q также известно [1, 23], что однозначно определена такая периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[0, \pi]$, что $f(0) = f(\pi) = 0$ и

$$\phi_2(x) = \alpha\, x\, \phi_1(x) + \alpha\, f(x), \tag{4}$$

где постоянная α выбирается из условия выполнения равенств (3). Из этих равенств и определения (3) следует, что $\alpha = (1 + f'(0))^{-1}$.

Функция $\phi_2(x)$ не может быть периодической [23] и поэтому $\phi_2(\pi) \neq 0$. Для каждого фиксированного q из равенств (3) и (4) следует, что

$$\phi_2(\pi) = \alpha\pi$$

и поэтому $\alpha \neq 0$. Кроме того, для $q = 0$ имеем $\alpha = 1$, таким образом $\alpha > 0$ для каждого фиксированного q в силу теоремы о непрерывной зависимости от параметров решений обыкновенных дифференциальных уравнений [23].

Для фундаментального решения ϕ_2 известно [1, 23] также представление

$$\phi_2(x) = C\, x\, ce_0(x) + f_0(x),$$

где постоянная $C = \alpha\,(ce_0(0))^{-1}$ и периодическая функция $f_0 = \alpha f(x)$ однозначно определены условиями (3) и представлением (4).

Для задачи (2) определим энергетическое пространство $L^2(0, \pi)$ как пространство Лебега квадратично интегрируемых функций. Основным утверждением данной работы является следующая утверждение.

Теорема 1. *Для собственных значений λ^s_ε и собственных функций u^s_ε задачи (1) существует такая постоянная C, не зависящая от ε и s, что*

$$\left|\lambda^s_\varepsilon - \left(a_0 + \varepsilon^2\lambda^s\right)\right| \leq C\,(\varepsilon s)^3, \qquad \|\, u^s_\varepsilon - v^s_\varepsilon \,\|_{L^2(0,\pi)} \leq C\,\varepsilon s^2$$

при $s^2 \ll \varepsilon^{-1}$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для некоторого положительного ε_0, где λ^s и v^s_ε определяются собственными значениями и собственными функциями подходящей осредненной задачи, которая будет определена в дальнейшем.

2. Построение асимптотических разложений

Следуя общим принципам работы [19], разложение собственных функций u_ε задачи (1) будем определять в виде асимптотической суммы u^a_ε, слагаемые которой представимы в виде функций $u_0(x, y), u_1(x, y), u_2(x, y)$ двух переменных $(x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$, рассматриваемых при $y = \frac{x}{\varepsilon}$ и имеющих разделенные переменные. Таким образом, введем обозначение

$$u^a_\varepsilon\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{5}$$

где $u_0(x,y) = N_0(y)\,v_0(x)$, $u_1(x,y) = N_1(y)\,v_1(x)$, $u_2(x,y) = N_2(y)\,v_2(x)$ с неизвестными функциями v_0, v_1, v_2 и неизвестными периодическими функциями $N_0(y), N_1(y), N_2(y)$ (с периодом, равным π), которые будут найдены из условия приближенного выполнения условий задачи (1) при малых ε.

Разложение собственных значений λ_ε задачи (1) выберем в виде

$$\lambda_\varepsilon^a = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 \tag{6}$$

с неизвестными числами $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, определяемыми в процессе построений.

Используя формулу дифференцирования сложной функции, получаем

$$\begin{aligned}\left(u_\varepsilon^a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right)'' = \Bigg(u''_{0xx} + \frac{2}{\varepsilon}\,u''_{0xy} + \frac{1}{\varepsilon^2}\,u''_{0yy} + \varepsilon\,u''_{1xx} + \\ + 2\,u''_{1xy} + \frac{1}{\varepsilon}u''_{1yy} + \varepsilon^2 u''_{2xx} + 2\,\varepsilon\,u''_{2xy} + u''_{2yy}\Bigg)\Bigg|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}.\end{aligned} \tag{7}$$

Подставляя разложения (5), (6) вместо решений в (1) и применяя (7), имеем

$$\begin{gathered} L^y N_0(y)v_0 + \varepsilon L^y N_1(y)v_1 + \varepsilon^2 L^y N_2(y)v_2 - \lambda_0 N_0(y)v_0 - \lambda_0\varepsilon N_1(y)v_1 - \\ -\lambda_0\varepsilon^2 N_2(y)v_2 - \lambda_1\varepsilon N_0(y)v_0 - \lambda_1\varepsilon^2 N_1(y)v_1 - \lambda_1\varepsilon^3 N_2(y)v_2 - \lambda_2\varepsilon^2 N_0(y)v_0 - \\ -\lambda_2\varepsilon^3 N_1(y)v_1 - \lambda_2\varepsilon^4 N_2(y)v_2 - 2\varepsilon N_0'(y)v_0'(x) - 2\varepsilon^2 N_1'(y)v_1'(x) - 2\varepsilon^3 N_2'(y)v_2'(x) - \\ -\varepsilon^2 N_0(y)v_0''(x) - \varepsilon^3 N_1(y)v_1''(x) - \varepsilon^4 N_2(y)v_2''(x) = 0 \quad \text{при} \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \end{gathered}$$

где, например, введено обозначение $L^y N_0(y) = -(N_0(y))'' + 2q\cos(2y)N_0(y)$.

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε в полученном соотношении для определения неизвестных функций и чисел из (5) и (6). При $\varepsilon^0, \varepsilon^1$ и ε^2, соответственно, получаем следующие уравнения

$$L^y N_0(y)v_0(x) - \lambda_0 N_0(y)v_0(x) = 0, \tag{8}$$

$$\left(L^y N_1(y) - \lambda_0 N_1(y)\right)v_1(x) = 2N_0'(y)v_0'(x) + \lambda_1 N_0(y)v_0(x), \tag{9}$$

$$\left(L^y N_2(y) - \lambda_0 N_2(y)\right)v_2 = 2N_1'(y)v_1' + N_0(y)v_0'' + \lambda_1 N_1(y)v_1 + \lambda_2 N_0(y)v_0. \tag{10}$$

Уравнение (8) буде выполнено, если определить $\lambda_0 = a_0$ и

$$N_0(y) = \sqrt{2}ce_0(y) = \varkappa\,\phi_1(y),$$

где $\varkappa = \sqrt{2}\,ce_0(0)$ выбрано из условия нормировки $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi N_0^2(y)\,dy = 1$.

Рассмотрим соотношение (9) как уравнение относительно $N_1(y)$ для каждого $x \in [0,\pi]$. Известно [7] и непосредственно проверяется, что такое уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда правая часть ортогональна $N_0(y)$. Последнее условие записывается в виде

$$v_0' \int_0^\pi 2N_0' N_0\,dy = -\lambda_1 v_0 \int_0^\pi N_0^2\,dy.$$

Интегрируя по частям периодические функции, для левой части имеем

$$\int_0^\pi N_0' N_0\,dy = -\int_0^\pi N_0 N_0'\,dy,$$

поэтому этот интеграл равен нулю. Таким образом, уравнение (9) может быть разрешимым, только если $\lambda_1 = 0$.

Определим $v_1(x) = v_0'(x)$. Тогда соотношение (9) будет выполнено, если выбрать $N_1(y)$ как периодическое решение уравнения

$$L^y N_1(y) - a_0 N_1(y) = 2N_0'(y). \tag{11}$$

Это уравнение разрешимо в силу последнего равенства для интегралов и можно попытаться найти решение этого уравнения методом вариации постоянных [21, 22]. Однако, известно [1, 23] и непосредственно проверяется, что периодическая функция $f(y) = \alpha^{-1}\phi_2(y) - y\,\phi_1(y)$, заданная равенством (4), является частным решением уравнения

$$L^y f(y) - a_0 f(y) = 2\,\phi_1'(y).$$

Сравнивая это уравнение с (11) заключаем, что общее периодическое (с периодом, равным π) решение уравнения (11) определяется равенством

$$N_1(y) = \varkappa\left(\alpha^{-1}\phi_2(y) - y\,\phi_1(y)\right) + \gamma\,N_0(y) \tag{12}$$

где $\varkappa = \sqrt{2}\,ce_0(0)$ и постоянная γ может быть выбрана из условия ортогональности $\int_0^\pi N_1(y)N_0(y)\,dy = 0$, которое будет использовано далее.

Рассмотрим соотношение (10) как уравнение относительно $N_2(y)$. Это уравнение имеет решение, если правая часть ортогональна $N_0(y)$. Последнее условие ортогональности можно записать в виде

$$\lambda_2 v_0 + \left(2\,\pi^{-1}\int_0^\pi N_1'(y)\,N_0(y)\,dy\right)v_0'' + v_0'' = 0, \tag{13}$$

поскольку $v_1(x) = v_0'(x)$ и $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi N_0^2(y)\,dy = 1$. Введем обозначение

$$I = 2\,\pi^{-1}\int_0^\pi N_1'(y)N_0(y)\,dy = -2\,\pi^{-1}\int_0^\pi N_1(y)N_0'(y)\,dy =$$
$$= -2\,\varkappa^2\,\pi^{-1}\alpha^{-1}\left(\int_0^\pi \phi_2(y)\,\phi_1'(y)\,dy - \alpha\int_0^\pi y\,\phi_1(y)\,\phi_1'(y)\,dy\right).$$

где учтено интегрирование по частям и определения $N_0 = \varkappa\phi_1(y)$ и (12).

Для фундаментальных решений выполнено [1, 22] тождество Вронского

$$\phi_1(y)\phi_2'(y) - \phi_1'(y)\phi_2(y) = 1$$

и правило Лейбница $(\phi_2\phi_1)' = \phi_1'\phi_2 + \phi_1\phi_2'$. Таким образом, получаем $2\,\phi_2(y)\phi_1'(y) = (\phi_2(y)\phi_1(y))' - 1$ и

$$I = \varkappa^2\,\pi^{-1}\alpha^{-1}\left(\int_0^\pi \left(1 - (\phi_2(y)\phi_1(y))'\right)\,dy + \alpha\int_0^\pi y\,\left(\phi_1^2(y)\right)'\,dy\right) =$$
$$= \varkappa^2\,\pi^{-1}\alpha^{-1}\left((y - \phi_2(y)\phi_1(y))\,\Big|_0^\pi + \alpha\,y\,\phi_1^2(y)\,\Big|_0^\pi - \alpha\int_0^\pi \phi_1^2\,dy\right) =$$
$$= \varkappa^2\alpha^{-1}\left((1-\alpha) + \alpha - \alpha\,\varkappa^{-2}\right) = \varkappa^2\alpha^{-1} - 1.$$

Учитывая эти вычисления, уравнение (13) можно представить в виде

$$-\left(\varkappa^2\alpha^{-1}\right)v_0''(x) = \lambda_2\,v_0(x) \quad \text{для} \quad x \in (0,\pi).$$

Известно и непосредственно проверяется, что функция $e^{i\,s\,x}$ для целого ненулевого s определяет собственную функцию уравнения (13) с периодическими граничными условиями и положительным собственным двукратным значением $s^2\left(\varkappa^2\alpha^{-1}\right)$. Удобно пронумеровать такие собственные функции и значения (с учетом кратности) следующим образом

$$\begin{aligned} &v_0^1=e^{ix},\ v_0^2=e^{-ix},\ v_0^3=e^{i2x},\ v_0^4=e^{-i2x},\ v_0^5=e^{i3x},\ v_0^6=e^{-i3x},\ldots,\\ &\lambda_2^1=\beta,\quad \lambda_2^2=\beta,\quad \lambda_2^3=2^2\beta,\quad \lambda_2^4=2^2\beta,\quad \lambda_2^5=3^2\beta,\quad \lambda_2^6=3^2\beta,\ldots, \end{aligned} \tag{14}$$

где введено обозначение $\beta=\varkappa^2\alpha^{-1}$. Таким образом, заключаем, что

$$\begin{aligned} v_0^s=e^{ikx},\qquad \lambda_2^s=((s+1)/2)^2\left(\varkappa^2\alpha^{-1}\right)\qquad \text{для}\quad s=2k-1,\\ v_0^s=e^{-ikx},\quad \lambda_2^s=(s/2)^2\left(\varkappa^2\alpha^{-1}\right)\quad \text{для}\quad s=2k\quad \text{при}\quad k=1,2,\ldots \end{aligned} \tag{15}$$

определяют собственные функции и числа для уравнения (13) с периодическими граничными условиями. Решения этой задачи можно также представить в виде линейных комбинаций $\cos(kx)$ и $\sin(kx)$ для $k=1,2,\ldots,$ если интересоваться только действительнозначными решениями.

Определим $v_2=v_0''(x)$, зафиксируем некоторые s и v_0^s и учтем осредненное уравнение (13) в (10). Тогда соотношение (10) будет выполнено, если определить $N_2(y)$ как периодическое решение уравнения

$$L^yN_2(y)-a_0N_2(y)=2N_1'(y)+\left(1-\varkappa^2\alpha^{-1}\right)N_0(y),$$

которое разрешимо в силу приведенных вычислений и можно найти такое решение этого уравнения, что $\int_0^\pi N_2(y)N_0(y)\,dy=0$.

Таким образом, для целых положительных s определены приближенные решения задачи (1), которые можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \lambda_a^s&=a_0+\varepsilon^2\lambda_2^s,\\ u_a^s&=N_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_0^s(x)+\varepsilon N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(v_0^s(x))'+\varepsilon^2N_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(v_0^s(x))''. \end{aligned} \tag{16}$$

Естественно, что эти приближения актуальны для не слишком больших s, точнее для $s\ll\varepsilon^{-1}$ (при $s\le c\varepsilon^{-1+\sigma}$ для некоторых c и σ при $0<\sigma\le 1$). Отметим также, что эти приближенные решения согласованы и при $s=0$, поскольку в этом случае $v_0^0=1$ и $\lambda_2^0=0$ являются решением задачи (13) и $u_\varepsilon^0=N_0(x/\varepsilon)$ и $\lambda_\varepsilon^0=a_0$ являются точным решением задачи (1).

3. Обоснование асимптотики

Для доказательства теоремы 1, обосновывающей построенные приближенные решения задачи (1), будут использованы метод Релея-Ритца, представленный в [7], теорема Вишика-Люстерника из [24, 25] и вспомогательное утверждение, обобщающее лемму Римана-Лебега, доказанное, например, в [15]. Для точной формулировки этих утверждений введем следующее обозначение для оператора задачи (1)

$$L^\varepsilon\,v=-\varepsilon^2(v)''+2q\,v\cos\left(\frac{2x}{\varepsilon}\right), \tag{17}$$

где периодическая функция $v\in H^1_{per}(0,\pi)$ (определение этого пространства приведено, например, в [15, 17]). Этот оператор естественно рассматривать как неограниченный оператор на $L^2(0,\pi)$ с плотной (и компактно вложенной [7]) областью определения $H^1_{per}(0,\pi)$, для собственных значений и функций которого уже были введены обозначения $\lambda^0_\varepsilon, \lambda^1_\varepsilon, \ldots, \lambda^s_\varepsilon, \ldots$ и $u^0_\varepsilon, u^1_\varepsilon, \ldots, u^s_\varepsilon, \ldots$. Следующие два утверждения доказаны в [7] и [25].

Теорема 2. *(Метод Релея-Ритца). Фиксируем положительные ε и целое d. Пусть H_d обозначает d-мерное подпространство в $L^2(0,\pi)$ и P_d является ортогональным проектором на H_d.*

Тогда для упорядоченных (по возрастанию с учетом кратности) собственных значений $\mu^0_\varepsilon, \mu^1_\varepsilon \ldots, \mu^{d-1}_\varepsilon$ оператора $P_d\, L^\varepsilon P_d$ на H_d и собственных значений $\lambda^0_\varepsilon, \lambda^1_\varepsilon \ldots, \lambda^{d-1}_\varepsilon$ оператора L^ε выполнены следующие неравенства

$$\lambda^0_\varepsilon \le \mu^0_\varepsilon, \quad \lambda^1_\varepsilon \le \mu^1_\varepsilon, \quad \ldots, \quad \lambda^{d-1}_\varepsilon \le \mu^{d-1}_\varepsilon.$$

Теорема 3. *Фиксируем положительные ε и ϱ. Предположим, что найдутся такие число μ и функция $u \in H^1_{per}(0,\pi)$, что $\|u\|_{L^2(0,\pi)} = 1$ и*

$$\| L^\varepsilon u - \mu\, u \|_{L^2(0,\pi)} \le \varrho.$$

Тогда существует такое собственное число λ^s_ε, что $|\,\mu - \lambda^s_\varepsilon\,| \le \varrho$, и для каждого $\sigma > \varrho$ существует такое $v \in H^1_{per}(0,\pi)$, что $\|v\|_{L^2(0,\pi)} = 1$ и

$$\| u - v \|_{L^2(0,\pi)} \le 2\varrho\sigma^{-1},$$

где v является линейной комбинацией собственных функций оператора L^ε, отвечающих собственным значением из интервала $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$.

Следующее утверждение доказано, например, в [15] и будет приведено с доказательством, которое используется в дальнейшем изложении.

Теорема 4. *Для функции $U \in L^2(0,\pi)$, продолженной периодически на всю прямую, и функции $v \in H^2_{per}(0,\pi)$ выполняется неравенство*

$$\left| \int_0^\pi U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x)\, dx - \pi^{-1} \int_0^\pi U(y)\, dy \int_0^\pi v(x)\, dx \right| \le$$
$$\le \varepsilon^2\, \|U\|_{L^2(0,\pi)} \left\|v''\right\|_{L^2(0,\pi)}.$$

Доказательство. Определим $M \in H^2_{per}(0,\pi)$ как периодическое решение (с периодом π и $\int_0^\pi M(y)\, dy = 0$) разрешимого уравнения

$$M''_{yy}(y) = U(y) - \pi^{-1} \int_0^\pi U(y) dy$$

и продолжим $M(y)$ периодически на всю прямую. Используя то, что

$$\varepsilon^2 M''_{xx}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = M''_{yy}(y)\Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} = U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \pi^{-1} \int_0^\pi U(y)\, dy,$$

умножим это соотношение на v и проинтегрируем. В таком случае имеем

$$\int_0^\pi U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x)\, dx - \pi^{-1} \int_0^\pi U(y)\, dy \int_0^\pi v(x)\, dx =$$
$$= \varepsilon^2 \int_0^\pi \left(M\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)'' v(x)\, dx = \varepsilon^2 \int_0^\pi M\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v''(x)\, dx.$$

Таким образом, используя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$\left| \int_0^\pi U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x)\,dx - \pi^{-1}\int_0^\pi U(y)\,dy \int_0^\pi v(x)\,dx \right| \le$$
$$\le \varepsilon^2\, \|M\|_{L^2(0,\pi)} \left\|v''\right\|_{L^2(0,\pi)},$$

поскольку

$$\begin{aligned} \left\|M\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|^2_{L^2(0,\pi)} &= \int\limits_0^{\pi\varepsilon} M^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx + \dots + \int\limits_{\pi(N-1)\varepsilon}^{\pi N\varepsilon} M^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \\ &= \varepsilon \sum_{i=1}^N \|M\|^2_{L^2(0,\pi)} = \|M\|^2_{L^2(0,\pi)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Остается учесть хорошо известное неравенство $\|M\|_{L^2(0,\pi)} \le \|U\|_{L^2(0,\pi)}$ для решения соответствующего разрешимого уравнения для M. $\square$

Доказательство теоремы 1. Используя обозначения (16) для приближенных решений и соотношения (7)–(14), получаем

$$\begin{aligned} L^\varepsilon u_a^s - \lambda_a^s\, u_a^s &= -\varepsilon^3 N_1(y) v_0^s(x)''' - \varepsilon^3 \lambda_2^s N_1(y) v_0^s(x)' - \\ - 2\,\varepsilon^3 N_2'(y) v_0^s(x)''' &- \varepsilon^4 N_2(y) v_0^s(x)'''' - \varepsilon^4 \lambda_2^s N_2(y) v_0^s(x)'' \end{aligned} \tag{19}$$

при $y = x\,\varepsilon^{-1}$. Из определений (14) и (15) для функции v_0^s следует, что $|v_0^s| \le 1$. Аналогично, для l-й производной этой функции имеем

$$\left|\, (v_0^s)^{(l)} \,\right| \le ((s+1)/2)^l \quad \text{для каждого} \quad s = 1, 2, \dots .$$

Функции $N_1(y)$ и $N_2(y)$ являются решениями периодических задач для уравнений с гладкими коэффициентами (не зависящими от ε и s) и поэтому являются гладкими [22] и имеют конечные $H^1(0,\pi)$-нормы. Таким образом, учитывая для этих функций равенства (18), из соотношений (19) получаем

$$\begin{aligned} \|L^\varepsilon u_a^s - \lambda_a^s\, u_a^s\|_{L^2(0,\pi)} &\le (\varepsilon)^3((s+1)/2)^3\, \|N_1\|_{L^2(0,\pi)} + \\ + \dots + (\varepsilon s)^4 C\, &\|N_2\|_{L^2(0,\pi)} \le C(\varepsilon s)^3 \end{aligned} \tag{20}$$

при $s \ll \varepsilon^{-1}$. Здесь и в дальнейшем постоянные C не зависят от ε и s.

Из определений (16) и теоремы 4 следует, что

$$\|u_a^s\|^2_{L^2(0,\pi)} = \pi^{-1}\int_0^\pi (u_a^s)^2\,dx = \pi^{-1}\int_0^\pi \left(N_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v_0^s(x)\right)^2 dx +$$
$$+ \dots + \varepsilon^4\,\pi^{-1}\int_0^\pi \left(N_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(v_0^s(x))''\right)^2 dx =$$
$$= \pi^{-1}\int_0^\pi N_0^2\,(y)\,dy\ \pi^{-1}\int_0^\pi (v_0^s(x))^2\,dx + O\left((\varepsilon\, s)^2\right) = 1 + O\left((\varepsilon\, s)^2\right),$$

где последние два равенства понимаются в смысле выполнения неравенства

$$\left|\, \|u_a^s\|^2_{L^2(0,\pi)} - 1 \,\right| \le C(\varepsilon\, s)^2 \tag{21}$$

из теоремы 4, в которой учтено, например, что $\left\|((v_0^s)^2)''\right\|_{L^2(0,\pi)} \le (s+1)^2$, $\pi^{-1}\int_0^\pi (v_0^s(x))^2 dx = 1$, $\int_0^\pi N_1(y) N_0(y) dy = 0$ и $\int_0^\pi N_2(y) N_0(y) dy = 0$.

Аналогично проверяется, что

$$\left|\int_0^\pi u_a^s\, u_a^i\, dx\right| \le C(\varepsilon\, s)^2 + C(\varepsilon\, i)^2$$

при $s \neq i$ и $s, i \ll \varepsilon^{-1}$. Последние соотношения означают, что система функций $u_a^1, u_a^2, \ldots, u_a^s, \ldots$ асимптотически почти ортонормирована в $L^2(0,\pi)$. Поэтому несложно проверить, что функции из этой системы линейно независимы при $s \ll \varepsilon^{-1}$. Здесь важно, что система собственных функций $v_0^1, v_0^2, \ldots, v_0^s, \ldots$ является ортонормированной в $L^2(0,\pi)$.

Из (21) следует, что $\|u_a^s\|_{L^2(0,\pi)} \neq 0$ при $s \ll \varepsilon^{-1}$. Поэтому, используя (20) и обозначив $v_a^s = u_a^s\, \|u_a^s\|_{L^2(0,\pi)}^{-1}$, получим $\|v_a^s\|_{L^2(0,\pi)} = 1$ и

$$\|L^\varepsilon v_a^s - \lambda_a^s v_a^s\|_{L^2(0,\pi)} \le C(\varepsilon\, s)^3,$$

где постоянная C не зависит от ε и s при $s \ll \varepsilon^{-1}$.

Таким образом, из теоремы 3 следует, что найдется такое собственное значение $\lambda_\varepsilon^{k(s)}$ задачи (1), что выполняется неравенство

$$\left|\lambda_\varepsilon^{k(s)} - \lambda_a^s\right| \le C(\varepsilon\, s)^3, \tag{22}$$

где постоянная C не зависит от ε и s при $s \ll \varepsilon^{-1}$. Из этого неравенства будет следовать первое неравенство из теоремы 1 для собственных значений задачи (1), если доказать, что $k(s) = s$ для каждого $s = 1, 2, \ldots$.

Отметим, что неравенства (20)–(22) выполнены и для $s = 0$ в силу определения приближенных решений (16), согласованного при $s = 0$ с выбором $u_\varepsilon^0 = u_a^0 = N_0(x/\varepsilon)$, $v_0^0 = 1$ и $\lambda_\varepsilon^0 = \lambda_a^0 = a_0$. Обозначим также $w_a^0 = N_0(x/\varepsilon)$. Тогда $\left\|w_a^0\right\|_{L^2(0,\pi)} = 1$ и $w_a^0 \in H^1_{per}(0,\pi)$. Ортонормируем в $L^2(0,\pi)$ функции

$$w_a^0, u_a^1, \ldots u_a^s, \ldots.$$

Определим постоянную $A_\varepsilon^{10} = \pi^{-1}\int_0^\pi u_a^1 w_a^0\, dx$. Из теоремы 4 следует, что

$$A_\varepsilon^{10} = \pi^{-1}\int_0^\pi N_0^2\, dy\ \pi^{-1}\int_0^\pi v_0^1\, dx + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2),$$

поскольку $\int_0^\pi v_0^1\, dx = 0$. Таким образом, $A_\varepsilon^{10} = \varepsilon^2 a_\varepsilon^{10}$, где $|a_\varepsilon^{10}| \le C$ с постоянной C, не зависящей от ε. Обозначим

$$\nu_a^1 = u_a^1 - \varepsilon^2 a_\varepsilon^{10} w_a^0.$$

Функция ν_a^1 ортогональна к w_a^0 и выполнено представление

$$\left(L^\varepsilon - \lambda_a^1\right)\nu_a^1 = \left(L^\varepsilon - \lambda_a^1\right)u_a^1 - \varepsilon^2 a_\varepsilon^{10}\left(\left(L^\varepsilon - \lambda_a^0\right)w_a^0 + \left(\lambda_a^1 - \lambda_a^0\right)w_a^0\right).$$

Поэтому, используя неравенство (20), получаем

$$\left\|(L^\varepsilon - \lambda_a^1)\,\nu_a^1\right\|_{L^2(0,\pi)} \le C\,\varepsilon^3 + \varepsilon^4\lambda_2^1\left|a_\varepsilon^{10}\right|\,\left\|w_a^0\right\|_{L^2(0,\pi)} \le C\,\varepsilon^3.$$

Таким образом, функция ν_a^1 также удовлетворяет неравенствам (20), (21) и $w_a^1 = \nu_a^1\left\|\nu_a^1\right\|_{L^2(0,\pi)}^{-1} \in H^1_{per}(0,\pi)$ ортогональна к w_a^0 и удовлетворяет (20).

Аналогично проверяется, что для постоянных α_1 и α_0 имеем

$$\left\|(L^\varepsilon - \lambda_a^1)\ \left(\alpha_1 w_a^1 - \alpha_0 w_a^0\right)\right\|_{L^2(0,\pi)} \le C\,\varepsilon^2, \tag{23}$$

если $|\alpha_1| \le C$ и $|\alpha_0| \le C$ с постоянной C, не зависящей от ε.

Далее, предположим по индукции, что определены ортонормированные $w_a^0, w_a^1, \dots, w_a^{s-1}$ из $H^1_{per}(0,\pi)$, удовлетворяющие неравенству (20), и для постоянных $\alpha_{s-1}, \dots, \alpha_0$ выполнено неравенство

$$\left\|(L^\varepsilon - \lambda_a^{s-1}) \left(\alpha_{s-1} w_a^{s-1} + \dots + \alpha_0 w_a^0\right)\right\|_{L^2(0,\pi)} \le C\,(\varepsilon(s-1))^2, \qquad (24)$$

если $|\alpha_j| \le C$ с постоянной C, не зависящей от ε для $j = 0, \dots, s-1$.

Определим $A_\varepsilon^{sj} = \pi^{-1}\int_0^\pi u_a^s w_a^j\,dx$ для $j = 0, \dots, s-1$. Из теоремы 4 имеем

$$A_\varepsilon^{sj} = \pi^{-1}\int_0^\pi N_0^2\,dy\ \pi^{-1}\int_0^\pi v_0^s\, v_0^j\,dx + O\left((\varepsilon\, s)^2\right) = O\left((\varepsilon\, s)^2\right),$$

поскольку $\int_0^\pi v_0^s v_0^j\,dx = 0$ для $j = 0, \dots, s-1$. Таким образом, $A_\varepsilon^{sj} = (\varepsilon s)^2 a_\varepsilon^{sj}$, где $|a_\varepsilon^{sj}| \le C$ с постоянной C, не зависящей от ε и s для $j = 0, \dots, s-1$.

Обозначим $w_a^{s0} = a_\varepsilon^{s,s-1} w_a^{s-1} + \dots + a_\varepsilon^{s0} w_a^0$ и

$$\nu_a^s = u_a^s - (\varepsilon s)^2 w_a^{s0}.$$

Функция ν_a^s ортогональна к $w_a^{s-1}, \dots, w_a^0$ и выполнено представление

$$(L^\varepsilon - \lambda_a^s)\,\nu_a^s = (L^\varepsilon - \lambda_a^s)\,u_a^s - (\varepsilon s)^2\left(\left(L^\varepsilon - \lambda_a^{s-1}\right) w_a^{s0} + \left(\lambda_a^s - \lambda_a^{s-1}\right) w_a^{s0}\right).$$

Поэтому, используя неравенства (20) и (24), получаем

$$\|(L^\varepsilon - \lambda_a^s)\nu_a^s\|_{L^2(0,\pi)} \le C(\varepsilon s)^3 + (\varepsilon s)^2(\lambda_a^s - \lambda_a^{s-1})\left\|w_a^{s0}\right\|_{L^2(0,\pi)} \le C(\varepsilon s)^3, \quad (25)$$

поскольку в обозначениях из (14)–(16) либо $\lambda_a^s - \lambda_a^{s-1} = 0$ либо

$$\lambda_a^s - \lambda_a^{s-1} = \varepsilon^2\beta(k^2 - (k-1)^2) = \varepsilon^2\beta(2k-1) = \varepsilon^2\beta\, s$$

и функция w_a^{s0} содержит s слагаемых единичной нормы, умноженных на ограниченные постоянные. Таким образом, функция ν_a^s также удовлетворяет неравенствам (20) и (21). Кроме того, $w_a^s = \nu_a^s\,\|\nu_a^s\|^{-1}_{L^2(0,\pi)} \in H^1_{per}(0,\pi)$ ортогональна к $w_a^{s-1}, \dots, w_a^0$ и удовлетворяет (20).

Проверим выполнение (24) для $w_a^s, \dots, w_a^0$. Для постоянных $\alpha_s, \dots, \alpha_0$ обозначим $w_a^{ss} = \alpha_{s-1} w_a^{s-1} + \dots + \alpha_0 w_a^0$ и $\nu_a^{ss} = \alpha_s w_a^s + w_a^{ss}$. Тогда

$$(L^\varepsilon - \lambda_a^s)\,\nu_a^{ss} = \alpha_s\,(L^\varepsilon - \lambda_a^s)\,w_a^s + \left(L^\varepsilon - \lambda_a^{s-1}\right) w_a^{ss} - \left(\lambda_a^s - \lambda_a^{s-1}\right) w_a^{ss}.$$

Поэтому, используя неравенства (20) и (24), как и в (25), получаем

$$\|(L^\varepsilon - \lambda_a^s)\nu_a^{ss}\|_{L^2(0,\pi)} \le C(\varepsilon s)^2 + (\lambda_a^s - \lambda_a^{s-1})\,\|w_a^{ss}\|_{L^2(0,\pi)} \le C(\varepsilon s)^2.$$

Таким образом, выполнено неравенство (24) с номером, большим на 1 (совпадающее с (23) при $s = 1$), используемое в индуктивных предположениях.

Определим s-мерное подпространство $H_s \subset L^2(0,\pi)$ как линейную оболочку функций $w_a^0, w_a^1, ... w_a^{s-1}$ и обозначим через P_s ортогональный проектор на H_s. По определению для $w \in L^2(0,\pi)$ имеем

$$P_s w = \sum_{i=0}^{s-1} w_a^i\ \pi^{-1}\int_0^\pi w_a^i\, w\,dx$$

и поэтому $P_s w_a^i = w_a^i$ при $i = 0, \dots, s-1$. Для оператора $L_s^\varepsilon = P_s L^\varepsilon P_s$ определены ортонормированные собственные функций $\omega_\varepsilon^0, \dots, \omega_\varepsilon^{s-1}$ и такие собственные значения $\mu_\varepsilon^0, \dots, \mu_\varepsilon^{s-1}$, что $\mu_\varepsilon^0 \le \dots \le \mu_\varepsilon^{s-1}$ с учетом кратности. Из теоремы 2 вытекает также, что $\lambda_\varepsilon^0 \le \mu_\varepsilon^0, \dots, \lambda_\varepsilon^{s-1} \le \mu_\varepsilon^{s-1}$.

Непосредственно из определений следует, что

$$L_s^\varepsilon w_a^i - \lambda_a^i w_a^i = P_s \left(L^\varepsilon w_a^i - \lambda_a^i w_a^i \right)$$

и

$$\left\| L_s^\varepsilon w_a^i - \lambda_a^i w_a^i \right\|_{L^2(0,\pi)} \le \left\| P_s \left(L^\varepsilon w_a^i - \lambda_a^i w_a^i \right) \right\|_{L^2(0,\pi)} \le C(\varepsilon i)^3,$$

где $i = 0, \dots, s-1$ и постоянная C не зависит от ε, i и s, поскольку операторная норма проектора ограничена единицей и выполнено неравенство (25).

Таким образом, из теоремы 3 следует, что найдется такое собственное значение $\mu_\varepsilon^{j(i)}$ оператора L_s^ε, что выполняется неравенство

$$\left| \mu_\varepsilon^{j(i)} - \lambda_a^i \right| \le C(\varepsilon\, i)^3, \tag{26}$$

где $i = 0, \dots, s-1$ и постоянная C не зависит от ε, i и s при $s \ll \varepsilon^{-1}$. Отметим, что неравенство (26) выполнено при $i = 0$ для каждого s в силу определения приближенных решений (16), согласованного при $i = 0$ с выбором $u_\varepsilon^0 = u_a^0 = w_a^0$ и $\lambda_\varepsilon^0 = \lambda_a^0 = \mu_\varepsilon^0 = a_0$.

Следуя [24] и [25], проверим, что фактически $j(i) = i$ в (26) для каждого $i = 0, \dots, s-1$. Здесь необходимо иметь в виду, что $j(i)$ может зависеть и от s, поскольку рассматриваемый оператор L_s^ε зависит от этого параметра.

Для $s = 2$ неравенства (26) записываются в виде

$$\left| \mu_\varepsilon^0 - \lambda_a^0 \right| \le C(\varepsilon\, 0)^3, \qquad \left| \mu_\varepsilon^{j(1)} - \lambda_a^1 \right| \le C\varepsilon^3$$

и возможны только два варианта: либо $j(1) = 1$, что и требуется, либо $j(1) = 0$. В последнем случае $\left| \lambda_a^0 - \lambda_a^1 \right| \le C\varepsilon^3$, что невозможно в силу (16).

Для $s = 3$ неравенства (26) записываются в виде $\mu_\varepsilon^0 = \lambda_a^0$,

$$\left| \mu_\varepsilon^{j(1)} - \lambda_a^1 \right| \le C(\varepsilon\, 1)^3, \qquad \left| \mu_\varepsilon^{j(2)} - \lambda_a^2 \right| \le C(\varepsilon\, 2)^3,$$

где $\lambda_a^1 = \lambda_a^2$ в соответствии с определением (16). Как и в предыдущем случае, обязательно выполнено равенство $j(1) = 1$, но возможно также, что $j(2) = 1$ и для μ_ε^2 не выполнено неравенство в (26) для $i = 2$ при $s = 3$. В последнем случае найдутся такие положительные δ и $\kappa < 3$, что

$$\lambda_a^2 + \varepsilon^\kappa \delta < \mu_\varepsilon^2,$$

иначе для μ_ε^2 будет выполнено (26) при $i = 2$, поскольку уже известно, что

$$\lambda_a^2 - \varepsilon^3 C \le \mu_\varepsilon^1 \le \mu_\varepsilon^2.$$

Таким образом, σ-окрестность числа $\lambda_a^1 = \lambda_a^2$ при $\sigma = \varepsilon^\kappa \delta$ содержит только одно собственное значение μ_ε^1 оператора L_3^ε и из теоремы 3 следует, что

$$\left\| w_a^1 - \omega_\varepsilon^1 \right\|_{L^2(0,\pi)} \le C\varepsilon^{3-\kappa}\delta^{-1}, \quad \left\| w_a^2 - \omega_\varepsilon^1 \right\|_{L^2(0,\pi)} \le C\varepsilon^{3-\kappa}\delta^{-1}.$$

Однако, это невозможно [25], поскольку нормированная функция ω_ε^1 не может приближать сразу две ортонормированные функции w_a^1 и w_a^2. Поэтому $j(2) = 2$ и для μ_ε^2 выполнено последнее неравенство в (26) при $s = 3$.

Далее, применяя индукцию по s, аналогично проверяется, что $j(i) = i$ в (26) для каждого $i = 0, \ldots, s-1$, поскольку, предположив обратное, имеем либо противоречивое неравенство $|\,\lambda_a^{i-1} - \lambda_a^i\,| \leq C(\varepsilon i)^3$, либо противоречивое утверждение о приближении нескольких ортонормированных функций.

Аналогично доказывается, что $k(s) = s$ в (22). Действительно, для $s = 0$ это выполнено в силу определений. Далее, для $s = 1, 2$ уже известно, что

$$\lambda_\varepsilon^0 \leq \lambda_\varepsilon^1 \leq \mu_\varepsilon^1 \leq \lambda_a^1 + \varepsilon^3 C, \qquad \lambda_\varepsilon^0 \leq \lambda_\varepsilon^1 \leq \lambda_\varepsilon^2 \leq \mu_\varepsilon^2 \leq \lambda_a^1 + \varepsilon^3 C,$$

поскольку $\lambda_a^1 = \lambda_a^2$. Используя (14)–(16), также получаем

$$a_0 \leq \lambda_\varepsilon^1 \leq a_0 + \varepsilon^2\beta + \varepsilon^3 C, \quad a_0 \leq \lambda_\varepsilon^1 \leq \lambda_\varepsilon^2 \leq a_0 + \varepsilon^2\beta + \varepsilon^3 C. \tag{27}$$

Предположим, что последнему неравенству удовлетворяют также и другие собственные значения задачи (1), например, λ_ε^3 и

$$a_0 \leq \lambda_\varepsilon^1 \leq \lambda_\varepsilon^2 \leq \lambda_\varepsilon^3 \leq a_0 + \varepsilon^2\beta + \varepsilon^3 C.$$

В этом случае σ-окрестность числа $\lambda_a^0 = a_0$ при $\sigma = \varepsilon^2(\beta + \varepsilon C)$ содержит четыре собственных значения $\lambda_\varepsilon^0, \lambda_\varepsilon^1, \lambda_\varepsilon^2, \lambda_\varepsilon^3$ оператора L^ε и из неравенств (25) для w_a^0, w_a^1, w_a^2 и теоремы 3 следует, что каждая из трех ортонормированных функций w_a^0, w_a^1, w_a^2 может быть приближена линейной комбинацией четырех ортонормированных функций $u_\varepsilon^0, u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2, u_\varepsilon^3$, что невозможно [25].

Таким образом, найдутся такие положительные δ и $\kappa < 3$, что

$$\lambda_a^2 + \varepsilon^\kappa \delta < \lambda_\varepsilon^3 \leq \lambda_\varepsilon^4,$$

и из (27) следует, что $k(1) = 1$ и $k(2) = 2$ в (22). Далее, применяя индукцию по s, аналогично получаем $k(s) = s$ в (22) при $s \ll \varepsilon^{-1}$, что доказывает оценку теоремы 1 для собственных значений спектральной задачи (1).

Здесь существенно, что для каждого s и ε выполняются соотношения

$$\lambda_\varepsilon^0 \leq \lambda_\varepsilon^1 \leq \lambda_\varepsilon^2 \leq \cdots \leq \lambda_\varepsilon^s \leq \mu_\varepsilon^s \leq \lambda_a^s + (\varepsilon s)^3 C,$$

предоставляющие контроль над количеством собственных значений задачи (1) на конкретном отрезке. Такой контроль важен, поскольку выражение $k(s)$ в (22) может фактически зависеть от ε. Точнее, теорема 3 гарантирует только, что для фиксированных s и ε целое число $k(s)$ определено.

Для фиксированного нечетного s имеем

$$\lambda_a^{s-1} < \lambda_a^s = \lambda_a^{s+1} < \lambda_a^{s+2}.$$

В обозначениях из (14)–(16) для $s = 2k - 1$ при $k = 1, \ldots$ эти соотношения записываются также в следующем виде

$$a_0 + \varepsilon^2 k^2 \beta - \varepsilon^2 s\beta < \lambda_a^s = a_0 + \varepsilon^2 k^2 \beta < a_0 + \varepsilon^2 k^2 \beta + \varepsilon^2 (s+2)\beta.$$

Поэтому из неравенства (22) следует, что σ-окрестность числа λ_a^s при $\sigma = \varepsilon^2 s\beta$ содержит только два собственных значения $\lambda_\varepsilon^s, \lambda_\varepsilon^{s+1}$ задачи (1).

Таким образом, в силу теоремы 3 и неравенств (25) для w_a^s, w_a^{s+1} найдутся такие постоянные α_i^j (возможно зависящие от ε) для $i, j = 1, 2$, что

$$\begin{aligned} \left\| w_a^s - \alpha_1^1 u_\varepsilon^s - \alpha_2^1 u_\varepsilon^{s+1} \right\|_{L^2(0,\pi)} &\leq C\,\varepsilon s^2, \\ \left\| w_a^{s+1} - \alpha_1^2 u_\varepsilon^s - \alpha_2^2 u_\varepsilon^{s+1} \right\|_{L^2(0,\pi)} &\leq C\,\varepsilon s^2, \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$\left\|\alpha_1^1 u_\varepsilon^s + \alpha_2^1 u_\varepsilon^{s+1}\right\|_{L^2(0,\pi)} = 1, \quad \left\|\alpha_1^2 u_\varepsilon^s + \alpha_2^2 u_\varepsilon^{s+1}\right\|_{L^2(0,\pi)} = 1,$$

и потому

$$(\alpha_1^1)^2 + (\alpha_2^1)^2 = 1, \qquad (\alpha_1^2)^2 + (\alpha_2^2)^2 = 1,$$

поскольку функции $u_\varepsilon^s, u_\varepsilon^{s+1}$ являются ортонормированными по определению. Таким образом, матрица $\{\alpha_j^i\}_{i,j=1,2}$ является ортогональной.

Определим функции $v_\varepsilon^s, v_\varepsilon^{s+1}$ как результат ортогонального преобразования функций w_a^s, w_a^{s+1} матрицей $\{\alpha_j^i\}_{i,j=1,2}$. Тогда из (28) получаем

$$\|v_\varepsilon^s - u_\varepsilon^s\|_{L_2(0,\pi)} \le C\,\varepsilon s^2, \quad \left\|v_\varepsilon^{s+1} - u_\varepsilon^{s+1}\right\|_{L_2(0,\pi)} \le C\,\varepsilon s^2,$$

что завершает доказательство теоремы 1 при $s^2 \ll \varepsilon^{-1}$.

Отметим, что для фиксированного нечетного s выполнено равенство приближенных собственных значений $\lambda_a^s = \lambda_a^{s+1}$. Таким образом, имеется произвол в выборе ортонормированных функций w_a^s, w_a^{s+1}, определяемый некоторой ортогональной матрицей. Поэтому и возникает необходимость в использовании ортогональной матрицы $\{\alpha_j^i\}_{i,j=1,2}$ для коррекции этого произвола, учитывающего конкретный выбор ортонормированных функций $u_\varepsilon^s, u_\varepsilon^{s+1}$, являющихся точными решения рассматриваемой задачи.

4. Выводы

Рассмотрена спектральная задача для уравнения Матье с быстро осциллирующим потенциалом и периодическими граничными условиями на конечном отрезке. Исследованы собственные значения и функции, определяющие решения такой задачи. На основе общих принципов осреднения построены приближенные разложения таких решений в виде асимптотических сумм с быстро осциллирующими слагаемыми. Доказаны утверждения об оценках асимптотической близости построенных асимптотических разложений и точных решений исходной задачи, зависящих от номера соответствующего собственного значения. Впервые такая зависимость выражена в виде явных формул с асимптотически точной оценкой.

Література

1. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье — М.: Издательство иностранной литературы, 1953. — 476 с.
2. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Том 1 — М.: Издательство иностранной литературы, 1960. — 277 с.
3. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Том 2 — М.: Издательство иностранной литературы, 1960. — 555 с.
4. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля — Киев: Наукова думка, 1972. — 202 с.
5. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака — М.: Наука, 1988. — 432 с.

6. Борн М. Динамическая теория кристаллических решеток — М: Издательство иностранной литературы, 1958. — 488 с.
7. Рид М. Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 4 — М: Мир, 1982. — 426 с.
8. Harris P. J. F. Carbon nanotubes and related structures — Cambridge: Cambridge University Press, 2004. — 294 с.
9. Kuchment P., Post O. On the spectra of carbon nano-structures // Commun. Math. Phys. — 2007. — V. 275. — P. 805–826.
10. Do N. T., Kuchment P. Quantum graph spectra of a graphyne structure // Nanoscale Systems MMTA. — 2013. — V. 2. — P. 107–123.
11. Kuchment P. An overview of periodic elliptic operators // Bull. Amer. Math. Soc. — 2016. — V. 53. — P. 343–414.
12. Do N. T., Kuchment P., Ong Beng-Seng. On resonant spectral gap opening in quantum graph networks // Functional Analysis and Operator Theory for Quantum Physics. — 2017. — P. 213–222.
13. Сандраков Г. В., Базілєва М. І. Спектральна задача для фрагментів сіток та решіток // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія фіз.-мат. науки. — 2013. — V. 1. — С. 231–234.
14. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л. Дифференциальные уравнения и геометрические графы — М.: Физматлит, 2005. — 576 с.
15. Krylova A. S., Sandrakov G. V. Homogenization of spectral problem on small-periodic networks // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. — 2012. — V. 8. — P. 336–356.
16. Крилова А. С., Сандраков Г. В. Усереднення спектральної задачі на дрібноперіодичній сітці в комплекснозначному випадку // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2013. — №1 (111). — С. 57–72.
17. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах — М.: Наука, 1984. — 352 с.
18. Олейник О. А., Шамаев А. С., Иосифьян Г. А. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред — М.: Издательство МГУ, 1990. — 312 с.
19. Сандраков Г. В. Принципы осреднения уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами // Матем. сборник. — 1989. — Т. 180, №12. — С. 1634–1679.
20. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами — М.: Наука, 1979. — 832 с.
21. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям — М.: Наука, 1976. — 585с.
22. Шубин М. А. Лекции об уравнениях математической физики — М.: МЦНМО, 2003. — 304 с.
23. Arscott F. M., Periodic Differential Equations — Oxford: Pergamon Press, 1964. — 284 p.
24. Люстерник Л. А. О разностных аппроксимациях оператора Лапласа // Успехи мат. наук. — 1954. — Т. 9, В. 2. — С. 3–66.
25. Вишик М.И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. — 1957. — Т. 12, В. 5. — С. 3–122.

Поступила 28.06.2017