Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2017, № 2 (125) | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.956
MSC 35R12

WELL POSEDNESS OF THE DIRICHLET AND POINCARE PROBLEMS IN THE CYLINDRICAL DOMAIN FOR THE DEGENERATED THREE-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATIONS

S. A. Aldashev

Institute of Mathematics, Physics and Computer Science, Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan, E-mail: aldash51@mail.ru

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И ПУАНКАРЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ТРЕХМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Алдашев

Казахский Национальный Педагогический Университет имений Абая, Алматы, Казахстан, E-mail: aldash51@mail.ru

Abstract. The article introduces a new class of degenerated three-dimensional hyperbolic equations, for which in a cylindrical domain Dirichlet and Poincare's problems are uniquely solvable.
Keywords: well posedness, degenerated hyperbolic equations, boundary value problems, cylindrical domain.

Резюме. В данной статье приведен новый класс вырождающихся трехмерных гиперболических уравнений, для для которых в цилиндрической области однозначно разрешимы задачи Дирихле и Пуанкаре.
Ключові слова: корректность, вырождающиеся гиперболические уравнения, краевые задачи, цилиндрическая область.

1. Введение

В теории уравнений частных производных гиперболического типа краевые задачи с данными на всей границе области служат примером некорректности поставленных задач [1, 2].

В работах [3, 4] показана корректность задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений.

В данной статье приведен новый класс вырождающихся трехмерных гиперболических уравнений, для которых в цилиндрической области однозначно разрешимы задачи Дирихле и Пуанкаре.

2. Постановка задачи и результат

Пусть D_β — цилиндрическая область евклидова пространства E_3 точек (x_1, x_2, t), ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \beta > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через Γ_β, S_β, S_0 соответственно.

В области D_β рассмотрим взаимно-сопряженные трехмерные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2} k_i(t)u_{x_ix_i} - u_{tt} + \sum_{i=1}^{2} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0, \qquad (1)$$

$$L^*\upsilon \equiv \sum_{i=1}^{2} k_i(t)\upsilon_{x_ix_i} - \upsilon_{tt} - \sum_{i=1}^{2} a_i\upsilon_{x_i} - b\upsilon_t - d\upsilon = 0, \qquad (1^*)$$

где $k_i(t) > 0$ при $t > 0$ и могут обращаться в нуль при $t = 0$, $k_i(t) \in C([0,\beta]) \cap C^2((0,\beta))$, $i = 1,2$, $d(x,t) = c - \sum\limits_{i=1}^{2} a_{ix_i} - b_t$.

В дальнейшем нам понадобится связь декартовых координат x_1, x_2, t с полярными r, θ, t: $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области D_β из класса $C^1(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{S_\beta} = \varphi(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi(t,\theta), \quad u\Big|_{S_0} = \tau(r,\theta) \qquad (2)$$

или

$$u\Big|_{S_\beta} = \varphi(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi(t,\theta), \quad u_t\Big|_{S_0} = \nu(r,\theta). \qquad (3)$$

Пусть $a_i(r,\theta,t)$, $b(r,\theta,t)$, $c(r,\theta,t) \in C^1(\bar{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, $i = 1,2$. Тогда справедлива

Теорема 1. *Если $\varphi(r,\theta) \in C^1(\bar{S}_\beta) \cap C^3(S_\beta)$, $\psi(t,\theta) \in C^1(\bar{\Gamma}_\beta) \cap C^3(\Gamma_\beta)$, $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta) \in C^1(\bar{S}_0) \cap C^3(S_0)$ и выполняется условие*

$$\cos\mu_s\beta' = 0, \;\; s = 1,2,..., \qquad (4)$$

то задача 1 имеет единственное решение, где $\mu_{s,n}$ — положительные нули функций Бесселя первого рода $J_n(z)$, $n = 0,1,...$, $\beta' = \int\limits_0^\beta \sqrt{\frac{[k_1(\xi)+k_2(\xi)]}{2}}d\xi$.

Замечание 1. Следует отметить, что эти теорема для модельного вырождающегося трехмерного гиперболического уравнения приведена в [5].

3. Разрешимость задачи 1

Решение задачи 1 в полярных координатах будем искать в виде суммы ряда

$$u(r,\theta,t) = u_{10}(r,t) + \sum_{n=1}^{\infty}(u_{1n}(r,t)\cos n\theta + u_{2n}(r,t)\sin n\theta), \qquad (5)$$

где $u_{10}(r,t)$, $u_{1n}(r,t)$, $u_{2n}(r,t)$ — функции, которые будут определены ниже.

Подставив (5) в (1), в полярных координатах будем иметь

$$
\begin{gathered}
Lu \equiv k_1(t)\left(\cos^2\theta u_{10rr} + \frac{\sin^2\theta}{r}u_{10r}\right) + \\
+k_2(t)\left(\sin^2\theta u_{10rr} + \frac{\cos^2\theta}{r}u_{10r}\right) - u_{10tt} + \\
+a_1(r,\theta,t)\cos\theta u_{10r} + a_2(r,\theta,t)\sin\theta u_{10r} + b(r,\theta,t)u_{10t} + c(r,\theta,t)u_{10} + \\
+\sum_{n=1}^{\infty}\{k_1(t)[\cos^2\theta(\cos n\theta u_{1nrr} + \sin n\theta u_{2nrr}) + \\
+\frac{\sin^2\theta}{r}(\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \\
+\frac{n\sin 2\theta}{r}(\sin n\theta u_{1nr} - \cos n\theta u_{2nr}) + \frac{n\sin 2\theta}{r^2}(\cos n\theta u_{2n} - \sin n\theta u_{1n}) - \\
-\frac{n^2\sin^2\theta}{r^2}(\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n})] + \\
+k_2(t)[\sin^2\theta(\cos n\theta u_{1nrr} + \sin n\theta u_{2nrr}) + \\
+\frac{n\sin 2\theta}{r}(\cos n\theta u_{2nr} - \sin n\theta u_{1nr}) + \frac{\cos^2\theta}{r}(\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \\
+\frac{n\sin 2\theta}{2r^2}(\sin n\theta u_{1n} - \cos n\theta u_{2n}) - \frac{n^2}{r^2}\cos^2\theta(\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n})] - \\
-u_{1ntt}\cos n\theta - u_{2ntt}\sin n\theta + a_1[\cos\theta(\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \\
+\frac{n\sin\theta}{r}(\sin n\theta u_{1n} - \cos n\theta u_{2n})] + \\
+a_2[\sin\theta(\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \frac{n\cos\theta}{r}(\cos n\theta u_{2n} - \sin n\theta u_{1n})] + \\
+b(\cos n\theta u_{1nt} + \sin n\theta u_{2nt}) + c(\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n})\} = 0.
\end{gathered} \tag{6}
$$

Теперь полученное выражение (6) сначала умножим на $\rho(\theta) \neq 0$, а затем проинтегрируем от 0 до 2π. После несложных преобразований получим ряд

$$
\begin{gathered}
\frac{(k_1+k_2)}{2}\rho_{10}\left(u_{10rr} + \frac{1}{r}u_{10r}\right) - \rho_{10}u_{10tt} + \frac{(k_1-k_2)}{2}d_{10}\left(u_{10rr} - \frac{1}{r}u_{10r}\right) + \\
+a_{10}(r,t)u_{10r} + b_{10}(r,t)u_{10t} + c_{10}(r,t)u_{10} + \\
+\sum_{n=1}^{\infty}\{\sum_{j=1}^{2}[\frac{(k_1+k_2)}{2}\rho_{jn}(u_{jnrr} + \frac{1}{r}u_{jnr} - \frac{n^2}{r^2}u_{jn}) - \rho_{jn}u_{jntt} + \\
+\frac{(k_1-k_2)}{2}d_{jn}\left(u_{jnrr} - \frac{1}{r}u_{jnr} + \frac{n^2}{r^2}u_{jn}\right) + \\
+\frac{(k_2-k_1)n}{2}e_{jn}\left(u_{jnr} - \frac{u_{jn}}{r}\right) + \\
+a_{jn}(r,t)u_{jnr} + b_{jn}(r,t)u_{jnt} + c_{jn}(r,t)u_{jn}]\} = 0,
\end{gathered} \tag{7}
$$

где

$$
\rho_{1n} = \int\limits_0^{2\pi}\rho(\theta)\cos n\theta d\theta,\ \rho_{2n} = \int\limits_0^{2\pi}\rho\sin n\theta d\theta,\ d_{1n} = \int\limits_0^{2\pi}\rho\cos 2\theta\cos n\theta d\theta,
$$

$$d_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho \cos 2\theta \sin n\theta d\theta,\ e_{1n} = -\int_0^{2\pi} \rho \sin 2\theta \sin n\theta d\theta,$$

$$e_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho \sin 2\theta \cos n\theta d\theta,$$

$$a_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho (a_1 \cos\theta + a_2 \sin\theta) \cos n\theta d\theta,\ a_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho (a_1 \cos\theta + a_2 \sin\theta) \sin n\theta d\theta,$$

$$b_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho b \cos n\theta d\theta,\ b_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho b \sin n\theta d\theta,$$

$$c_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho \left[(a_1 \sin\theta - a_2 \cos\theta) \frac{n \sin n\theta}{r} + c \cos n\theta \right] d\theta,$$

$$c_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho \left[(a_2 \cos\theta - a_1 \sin\theta) \frac{n \cos n\theta}{r} + c \sin n\theta \right] d\theta,\ n = 0, 1,\ \dots\ .$$

Далее рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$k(t)\rho_{10} \left(u_{10rr} + \frac{1}{r} u_{10r} \right) - \rho_{10} u_{10tt} = 0,\ k(t) = \frac{k_1(t) + k_2(t)}{2}, \tag{8}$$

$$\begin{gathered} k(t)\rho_{j1} \left(u_{j1rr} + \frac{1}{r} u_{j1r} - \frac{u_{j1}}{r^2} \right) - \rho_{j1} u_{j1tt} = \\ = \frac{(k_1 - k_2) d_{10}}{2} \left(u_{10rr} - \frac{u_{10r}}{r} \right) - a_{10} u_{10r} - \\ -b_{10} u_{10t} - c_{10} u_{10}, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} k(t)\rho_{jn} \left(u_{jnrr} + \frac{1}{r} u_{jnr} - \frac{n^2}{r^2} u_{jn} \right) - \rho_{jn} u_{jntt} = \\ = -\frac{(k_1 - k_2)}{2} d_{jn-1} \left(u_{jn-1rr} - \frac{1}{r} u_{jn-1r} + \frac{(n-1)^2}{r^2} u_{jn-1} \right) - \\ -\frac{(k_2 - k_1)(n-1)}{r} e_{jn-1} \left(u_{jn-1r} - \frac{u_{jn-1}}{r} \right) - \\ -a_{jn-1} u_{jn-1r} - b_{jn-1t} u_{jn-1t} - c_{jn-1} u_{jn-1},\ j = 1, 2,\ n = 2, 3,\ \dots\ . \end{gathered} \tag{10}$$

Нетрудно показать, что если $\{u_{10},\, u_{jn}\}$, $j = 1, 2$, $n = 2, 3, \dots$ — решение системы (8)–(10), то оно является и решением уравнения (7).

Далее, учитывая ортогональность системы тригонометрических функций $\{1,\, \cos n\theta, \sin n\theta,\, n = 1, 2, \dots\}$ на отрезке $[0, 2\pi]$ [6], из краевых условий (2) и (3) в силу (5) будем иметь

$$u_{10}(r, \beta) = \varphi_{10}(r),\ u_{10}(1, t) = \psi_{10}(t),\ u_{10}(r, 0) = \tau_{10}(r), \tag{11}$$

$$u_{jn}(r, \beta) = \varphi_{jn}(r),\ u_{jn}(1, t) = \psi_{jn}(t),\ u_{jn}(r, 0) = \tau_{jn}(r), \tag{12}$$

где $j = 1, 2,\ n = 1, 2,\ \ldots$ или

$$u_{10}(r, \beta) = \varphi_{10}(r),\ u_{10}(1, t) = \psi_{10}(t),\ u_{10t}(r, 0) = \nu_{10}(r), \tag{13}$$

$$u_{jn}(r, \beta) = \varphi_{jn}(r),\ u_{jn}(1, t) = \psi_{jn}(t),\ u_{jnt}(r, 0) = \nu_{jn}(r), \tag{14}$$

где $j = 1, 2,\ n = 1, 2, \ldots,$

$$\varphi_{10}(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(r, 0)d\theta,\ \psi_{10}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi(t, \theta)d\theta,\ \tau_{10}(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \tau(r, \theta)d\theta,$$

$$\varphi_{1n}(r) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(r, \theta)\cos n\theta d\theta,\ \psi_{1n}(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi(t, \theta)\cos n\theta d\theta,$$

$$\tau_{1n}(r) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \tau(r, \theta)\cos n\theta d\theta,$$

$$\varphi_{2n}(r) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(r, \theta)\sin n\theta d\theta,\ \psi_{2n}(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi(t, \theta)\sin n\theta d\theta,$$

$$\tau_{2n}(r) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \tau(r, \theta)\sin n\theta d\theta,$$

$$\nu_{10}(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \nu(r, \theta)d\theta,\ \nu_{1n}(r) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \nu(r, \theta)\cos n\theta d\theta,$$

$$\nu_{2n}(r) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \nu(r, \theta)\sin n\theta d\theta,\ \ n = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, задача 1 сведена к системе задач Дирихле и Пуанкаре для уравнений (8)–(10) с данными (11)–(14). Теперь будем находить решения этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8)–(10) можно представить в виде

$$k(t)\left(u^k_{nrr} + \frac{1}{r}u^k_{nr} - \frac{n^2}{r^2}u_n\right) - u_{ntt} = f^k_n(r, t),\ n = 0, 1, \ldots, \tag{15}$$

где $f_n(r, t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0(r, t) \equiv 0$.

В [4, 5] показано, что при выполнении условии (4) задачи для уравнения (15) с краевыми условиями (11)–(14) имеют единственные решения.

Следовательно, сначала решив задачу (8), (11) ($j = 1, n = 0$), а затем (9), (12) ($j = 1, 2,\ n = 1$) и т.д., найдем последовательно все $u_{10}(r, t)$, $u_{jn}(r, t)$, $j = 1, 2,\ n = 1, 2,\ \ldots$.

Итак, в области D_β имеет место

$$\int_0^{2\pi} \rho(\theta) Lu d\theta = 0. \tag{16}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, множество V_0 плотно в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty((0,2\pi))$, а $T(t) \in V_1$, множество V_1 плотно в $L_2((0,\beta))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in V$, где $V = V_0 \otimes C^\infty((0,2\pi)) \otimes V_1$ плотно в $L_2(D_\beta)$ [6]. Отсюда и из (16) следует, что

$$\int_{D_\beta} f(r,\theta,t) Lu dD_\beta = 0 \text{ и } Lu = 0, \ \forall (r,\theta,t) \in D_\beta.$$

Таким образом, решением задачи 1 является функция (5), где $u_{10}(r,t)$, $u_{jn}(r,t)$, $j = 1,2$, $n = 1,2,\ldots$ определяются из предыдущих двумерных задач. Учитывая ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\varphi(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, аналогично как в [4, 5], можно показать, что полученное решение (5) принадлежит классу $C^1(\bar{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$.

Следовательно, разрешимость задачи 1 установлена.

4. Единственность решения задачи 1

Сначала рассмотрим задачу (1), (2) и докажем единственность ее решения. Для этого построим решение задачи Дирихле для уравнения (1*) с краевыми условиями

$$\upsilon\Big|_{S_\beta \cup \Gamma_\beta} = 0, \quad \upsilon\Big|_{S_0} = \tau(r,\theta) = \tau_{10}(r), \tag{17}$$

$\tau_{10}(r) \in G$, где G — множество функций $\tau(r)$ из класса $C^1([0,1]) \cap C^2((0,1))$. Очевидно G всюду плотно в $L_2((0,1))$ [6]. Решение задачи (1*), (17) будем искать в виде (5). Тогда, аналогично п. 2, функции $\upsilon_{10}(r,t)$, $\upsilon_{jn}(r,t)$, $j = 1,2$, $n = 1,2,\ldots$ будут удовлетворять системе уравнений (8)–(10), где a_i, b заменены соответственно на $-a_i$, $-b$, а c на d, $i = 1,2$.

Из краевого условия (17) имеем

$$\upsilon_{10}(r,0) = \tau_{10}(r), \ \upsilon_{10}(r,\beta) = 0, \ \upsilon_{10}(1,t) = 0, \tag{18}$$

$$\upsilon_{jn}(r,0) = 0, \ \upsilon_{jn}(r,\beta) = 0, \ \upsilon_{jn}(1,t) = 0, \ j = 1,2, \ n = 1,2. \tag{19}$$

Как ранее замечено, каждое уравнение системы (8)–(10) представимо в виде (15). В [4, 5] показано, что при выполнении условия (4) задачи для уравнения (15) с данными (18), (19) имеют единственные решения.

Таким образом, решение задачи (1*), (17) в виде (5) построено.

Аналогичным образом строится решение этой задачи, если

$$\tau(r,\theta) = \tau_{1n}(r)\cos n\theta + \tau_{2n}(r)\sin n\theta, \ \ n = 1,2, \ \ldots .$$

Для взаимно-сопряженных дифференциальных операторов L, L^* имеет место формула Грина [6]

$$\int\limits_{D_\beta} (\upsilon Lu - uL^*\upsilon)\, dD_\beta = \int\limits_{\partial D_\beta} \left(\upsilon \frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial \upsilon}{\partial N} + u\upsilon Q \right) ds, \tag{20}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial N} = \sum\limits_{i=1}^{2} k_i(t) \cos\left(N^\perp, x_i\right) \dfrac{\partial}{\partial x_i} + \cos\left(N^\perp, t\right) \dfrac{\partial}{\partial t}$, $Q = \sum\limits_{i=1}^{2} a_i \cos\left(N^\perp, x_i\right) + b\cos\left(N^\perp, t\right)$, а $N^\perp$ — внутренняя нормаль к границе ∂D_β.

Принимая во внимание однородные граничные условия (2) из (20) получим

$$\int\limits_{S_0} \tau(r,\theta) u_t(r,\theta,0) ds = 0.$$

Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши ($u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$) для уравнения (1) [7] будем иметь $u(x,t) = 0$ $\forall (x,t) \in D_\beta$.

Таким образом, единственность решения задачи (1), (2) доказана. Единственность решения для задачи (1), (3) показывается аналогично.

Теорема доказана полностью.

Замечание 2. Отметим, что полученный результат анонсирован в [8, 9].

Литература

1. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. — М.: Издательство АН СССР, 1959. — 164 с.
2. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных. — М.: Наука, 2006. — 287 с.
3. Алдашев С. А. Корректности задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Чаплыгина // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. — 2012. — № 5 (124). — Вып. 2. — С. 12–24.
4. Алдашев С. А. Корректности задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина // Владикавказский матем. журнал. — 2013. — Т. 15. — Вып. 2. — С. 3–10.
5. Алдашев С. А. Корректность задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающегося трехмерного гиперболического уравнения // Материалы Третьего международного Российско-Казахского симпозиума „Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики“. — Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2014. — С. 17–18.
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. — 543 с.
7. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. — М.: Наука, 1981. — 550 с.
8. Алдашев С. А. Задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся трехмерных гиперболических уравнений // Тезисы докладов Респ. научной конф. „Современные проблемы дифференциальных уравнений и их применения“. — Ташкент: ИМ АН Узбекистана, 2013. — С. 29–30.

9. Алдашев С. А. Задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся трехмерных гиперболических уравнений // Материалы четвертой межд. конф. „Математическая физика и ее приложения“. — Самара: СамГТУ, 2014. — С. 46.

Поступила 10.06.2017