Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2017, №2(125) | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.7
MSC 37.02

DOUBLE ENLARGEMENT OF PHASE SPACE FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SMALL STOCHASTIC ADDITIONS IN THE CONDITIONS OF LEVY APPROXIMATION

Anatolii Nikitin
Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: nikitin2505@gmail.com

ПОДВІЙНЕ УКРУПНЕННЯ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТОХАСТИЧНО МАЛИМИ ДОБАВКАМИ В УМОВАХ АПРОКСИМАЦІЇ ЛЕВІ

А. В. Нікітін
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: nikitin2505@gmail.com.

Abstract. In this paper the double enlargement of the phase space of states conducted for a stochastic evolutionary system with impulse perturbation under conditions of Levy approximation.
Keywords: stochastic evolution equation, Levy approximation, Markov process.

Резюме. У роботі проведено подвійне укрупнення фазового простору станів для стохастичної еволюційної системи з імпульсним збуренням в умовах апроксимації Леві.
Ключові слова: стохастичне еволюційне рівняння, апросимація Леві, марковський процес.

Вступ

При аналізі складних систем часто виникають труднощі, які полягають у значному ускладненні фазового простору системи. Це може призвести до практичної неможливості наглядного представлення моделі. Актуальна проблема сучасної теорії систем — це розвиток математично обґрунтованих методів побудови спрощених моделей, аналіз яких не викликає значних труднощів, а характеристики можуть бути прийняті за відповідні характеристики реальних моделей. Ідеї вивчення властивостей складних систем на основі дослідження властивостей їх частин з подальшим переходом до загальної системи є основою багатьох методів системного аналізу. Вперше алгоритм фазового укрупнення станів системи запропонували і описали у роботі [1] Королюк В. С. та Турбін А. Ф. Аналіз укрупненої системи значно спрощується, але, разом з тим, при вдалому розщепленні фазового простору основні характеристики спрощеної системи можуть досить точно відображати відповідні характеристики вихідної. У свою чергу, близькість реальної і укрупненої систем означає і близькість глобальних характеристик, які визначаються на зростаючих інтервалах часу. Важливою властивістю алгоритмів фазового укрупнення є можливість побудови ієрархії укрупнених систем. Випадкова еволюція у вигляді диференціального рівняння зі стохастичними доданками використовується для опису широкого класу природних процесів у багатьох галузях науки. Виключно важливим випадком є дослідження поведінки подібних еволюційних систем у випадковому середовищі. Вивченню таких систем присвячено велику кількість робіт видатних вчених, серед них А. В. Скороход, М. Й. Гіхман, М. М. Боголюбов та інші. Детальну бібліографію з цієї проблематики можна знайти, наприклад, у монографіях В. С. Королюка [2, 3]. Особливу увагу варто звернути на роботи [4,5,6,7], в яких започатковано використані в даній статті підходи, зокрема, до дослідження стійкості еволюційної системи з дифузійним збуренням. Дану роботу присвячено випадку, коли збурення системи визначаються процесом Леві у схемі апроксимації. Нас цікавитиме насамперед подвійне фазове укрупнення простору станів таких еволюційних моделей.

1. Постановка задачі

Стохастична еволюційна система в ергодичному марковському середовищі задається стохастичним дифференціальним рівнянням

$$du^\varepsilon(t) = C(u^\varepsilon(t), x^{t/\varepsilon^3})dt + d\eta^\varepsilon(t),\ u^\varepsilon(t) \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де марковський процес $x^\varepsilon(t), t \geq 0$ визначається на стандартному фазовому просторі (E, E) з розщепленням

$$E = \bigcup_{k=1}^{N} E_k,\ E_k \cap E_{k'} = \emptyset,\ k \neq k'$$

у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$.

Марковське ядро має вигляд

$$Q^\varepsilon(x, B, t) = P^\varepsilon(x, B)[1 - \exp\{-q(x)t\}],\ x \in E,\ B \in E,\ t \geq 0.$$

Нехай також виконуються умови:

ME1: Ядро, що описує перехідні імовірності вкладеного ланцюга Маркова $x_n^\varepsilon, n \geq 0$, має наступне представлення

$$P^\varepsilon(x, B) = P(x, B) + \varepsilon P_1(x, B).$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ на розщепленому фазовому просторі визначається так

$$P(x, E_k) = 1_k(x) = \begin{cases} 1,\ x \in E_k, \\ 0,\ x \notin E_k. \end{cases}$$

Стохастичне ядро $P(x,B)$ визначає супроводжуючий ланцюг Маркова x_n, $n \geq 0$ на класах E_k, $1 \leq k \leq N$. Крім того, збурююче ядро $P_1(x,B)$ задовольняє умові

$$P_1(x,E) = 0,$$

що є прямим наслідком рівності

$$P^{\varepsilon}(x,E) = P(x,E) = 1.$$

ME2: Асоційований марковський процес $x^0(t)$, $t \geq 0$, заданий генератором

$$Q\varphi(x) \int\limits_E P(x,dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],$$

є рівномірно ергодичним на кожному з класів E_k, $1 \leq k \leq N$ зі стаціонарними розподілами $\pi_k(dx)$, $1 \leq k \leq N$, які задовольняють співвідношенню

$$\pi_k(dx)q(x) = q_k\rho_k(dx),\ q_k = \int\limits_{E_k} \pi_k(dx)q(x).$$

ME3: Усереднені імовірності виходу

$$\hat{p}_k := q(x) \int\limits_{E_k} \rho_k(dx)P_1(x, E/E_k) > 0,\ 1 \leq k \leq N.$$

Збурююче ядро $P_1(x,B)$ визначає перехідні імовірності між класами E_k, $1 \leq k \leq N$. Отже, рівність

$$P^{\varepsilon}(x,B) = P(x,B) + \varepsilon P_1(x,B)$$

означає, що вкладений ланцюг Маркова x_n^{ε}, $n \geq 0$ проводить великий проміжок часу в кожному з класів E_k та перестрибує між класами з малими ймовірностями $\varepsilon P_1(x, E/E_k)$.

За умов ME1–ME3 має місце слабка збіжність [3]

$$\nu(x^{\varepsilon}(t)) \Rightarrow \hat{x}(t),\ \varepsilon \to 0,$$
$$\nu(x) = k \in \hat{E} = \{1, ..., N\},\ x \in E_k,\ 1 \leq k \leq N.$$

Граничний марковський процес $\hat{x}(t)$, $t \geq 0$ на укрупненому фазовому просторі $\hat{E} = \{1, ..., N\}$ визначається генеруючою матрицею

$$\hat{Q}_1 = (\hat{q}_{kr},\ 1 \leq k, r \leq N),$$

де

$$\hat{q}_{kr} = \hat{q}_k\hat{p}_{kr},\ k \neq r,\ \hat{q}_k = q_k\hat{p}_k,\ 1 \leq k \leq N,$$

$$\hat{p}_{kr} = p_{kr}/\hat{p}_k,\ p_{kr} = \int\limits_{E_k} \rho_k(dx)P_1(x,E_r),\ 1 \leq k, r \leq N,\ k \neq r,$$

$$\hat{p}_k = -\int\limits_{E_k} \rho_k(dx)P_1(x,E_k).$$

ME4: Укрупнений марковський процес $\hat{x}(t)$, $t \geq 0$ є ергодичним зі стаціонарним розподілом $\hat{\pi} = (\pi_k,\ k \in \hat{E})$.

Отже, оператор Q^ε можна подати у вигляді

$$Q^\varepsilon = Q + \varepsilon Q_1,\ Q_1(x) = q(x) \int\limits_E P_1(x, dy)\varphi(y).$$

Узагальнення такого підходу можна знайти у [8], де оператор $Q^\varepsilon = Q + \varepsilon Q_1$

$$Q(x) = q(x) \int\limits_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],\ Q_1(x) = q_1(x) \int\limits_E P_1(x, dy)\varphi(y).$$

Нехай Π — проектор на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора Q. Його дія на тест-функції визначається так

$$\Pi\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} \hat{\varphi}_k 1_k(x),\ \hat{\varphi}_k := \int\limits_{E_k} \pi_k(dx)\varphi(dx).$$

Зведений оператор $\hat{Q}_1$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\hat{Q}_1\Pi = \Pi Q_1 \Pi.$$

Нехай $\hat{\Pi}$ — проектор на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора $\hat{Q}_1$

$$\hat{\Pi}\hat{\varphi} := q(x) \sum_{k \in E} \hat{\pi}_k \hat{\varphi}_k.$$

Потенціальна матриця $\hat{R}_0 = [\hat{R}^0_{kj};\ 1 \leq k, l \leq N]$ визначається співвідношеннями

$$\hat{Q}_1 \hat{R}_0 = \hat{R}_0 \hat{Q}_1 = \hat{\Pi} - E.$$

2. Імпульсний процес збурень

Імпульсний процес збурень $\eta^\varepsilon(t)$, $t \geq 0$ у схемі апроксимації Леві задається співвідношенням

$$\eta^\varepsilon(t) = \int\limits_0^t \eta^\varepsilon(ds, x(s/\varepsilon^2)), \tag{2}$$

де сукупність процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in X$ визначається генераторами

$$\Gamma^\epsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2} \int\limits_R (\varphi(w + v) - \varphi(w))\Gamma^\varepsilon(dv, x),\ x \in X \tag{3}$$

та задовольняє умовам апроксимації Леві.

L1. Апроксимація середніх

$$\int\limits_R v\Gamma^\varepsilon(dv, x) = \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2(a_2(x) + \theta_a(x)),\ \theta_a(x) \to 0,\ \varepsilon \to 0$$

та
$$\int\limits_R v^2\Gamma^\varepsilon(dv,x)=\varepsilon(b(x)+\theta_b(x)),\ \theta_b(x)\to 0,\ \varepsilon\to 0;$$

L2. Умова на функцію розподілу
$$\int\limits_R g(v)\Gamma^\varepsilon(dv,x)=\varepsilon^2(\Gamma_g(x)+\theta_g(x)),\ \theta_g(x)\to 0,\ \varepsilon\to 0$$
для всіх $g(v)\in C^3(\mathbb{R})$ (простір дійснозначних обмежених функцій таких, що $g(v)/|v|^2\to 0$, $|v|\to 0$). Тут міра $\Gamma_g(x)$ обмежена для всіх $g(v)\in C^3(\mathbb{R})$ і визначається співвідношенням
$$\Gamma_g(x)=\int\limits_R g(v)\Gamma_0(dv,x),\ g(v)\in C^3(\mathbb{R});$$

L3. Рівномірна квадратична інтегровність
$$\lim_{c\to\infty}\int\limits_{|v|>c} v^2\Gamma_0(dv,x)=0.$$

Нехай виконується умова балансу
$$\hat{a}_1:=\int\limits_X \pi(dx)a_1(x)=0. \tag{4}$$

Розглянемо асимптотичні властивості процесу збурення.

Теорема 1. *При виконанні умови балансу (4) та умов L1–L3 має місце слабка збіжність*
$$\eta^\varepsilon(t)\to\eta^0(t),\ \varepsilon\to 0.$$

Граничний процес $\eta^0(t)$ визначається генератором
$$\hat{\hat{\Gamma}}\varphi(w)=\hat{\hat{a}}_2\varphi'(w)+\frac{1}{2}\sigma^2\varphi''(w)+\int\limits_R[\varphi(w+v)-\varphi(w)]\hat{\hat{\Gamma}}_0(dv),$$
де
$$\hat{\hat{a}}=\int\limits_X \pi(dx)(a_2(x)-a_0(x)),$$
$$\sigma^2=\int\limits_X \pi(dx)(b(x)-b_0(x))+2\int\limits_X \pi(dx)a_1(x)R_0a_1(x),$$
$$a_0(x)=\int\limits_R v\Gamma_0(dv,x),$$
$$b_0(x)=\int\limits_R v^2\Gamma_0(dv,x),$$
$$\hat{\hat{\Gamma}}_0(v)=\int\limits_X \pi(dx)\Gamma_0(v,x),$$

і є процесом Леві, який має три складові: детермінований зсув, дифузійну складову та пуассонівську стрибкову частину.

Доведення. Для безпосереднього доведення теореми 1 встановимо деякі допоміжні твердження.

Лема 1. *Генератори процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in X$ на тест-функціях $\varphi(w) \in C^3(\mathbf{R})$ при виконанні умов апроксимації Леві L1–L3 допускають асимптотичне представлення*

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-1}\Gamma_1(x)\varphi(w) + \Gamma_2(x)\varphi(w), \tag{5}$$

де

$$\Gamma_1(x)\varphi(w) = a_1(x)\varphi'(w),$$
$$\Gamma_2(x)\varphi(w) = (a_2(x) - a_0(x))\varphi'(x) + \frac{1}{2}(b(x) - b_0(x))\varphi''(x) +$$
$$+ \int_R [\varphi(w+v) - \varphi(v)]\Gamma_0(dv, x).$$

Доведення леми 1. Використовуючи розклад функції $\varphi(w)$ у ряд Тейлора, здійснимо перетворення генератора (3)

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\int_R (\varphi(w+v) - \varphi(v))\Gamma^\varepsilon(dv, x) =$$
$$= \varepsilon^{-2}\int_R (\varphi(w+v) - \varphi(v) - v\varphi'(v) - \frac{1}{2}v^2\varphi''(w))\Gamma^\varepsilon(dv,x) +$$
$$+\varepsilon^{-2}\int_R (v\varphi'(w)\Gamma^\varepsilon(dv,x) + \frac{1}{2}v^2\varepsilon^{-2}\int_R v^2\varphi''(w)\Gamma^\varepsilon(dv,x) =$$
$$= \int_R (\varphi(u+v) - \varphi(v) - v\varphi'(w) - \frac{1}{2}v^2\varphi''(w))\Gamma_0(dv,x) +$$
$$+\varepsilon^{-1}a_1(x)\varphi'(w) + a_2(x)\varphi'(w) +$$
$$+\frac{1}{2}(b(x) - b_0(x))\varphi''(w) +$$
$$+\int_R (\varphi(u+v) - \varphi(v))\Gamma_0(dv,x) + \gamma^\varepsilon(w)\varphi(w),$$

де передостання рівність випливає з умов L1–L3 (зауважимо також, що функція $\varphi(w+v) - \varphi(w) - v\varphi'(w) - \frac{1}{2}v^2\varphi''(w) \in C^3(\mathbf{R})$, оскільки вона обмежена на підставі обмеженості $\varphi(w)$ разом з її похідними) та виконується співвідношення

$$[\varphi(w+v) - \varphi(w) - v\varphi'(w) - \frac{1}{2}v^2\varphi''(w)]/|v^2| \to 0$$

при $v \to 0$.

Пам'ятаючи, що $\gamma^\varepsilon(w)\varphi(w) = o(\varepsilon^2)$, $\varphi(w) \in C^3(\mathbf{R})$, отримаємо представлення (5).

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Генератор двокомпонентного марковського процесу* $(\eta^\varepsilon, x(t/\varepsilon^2))$, $t \geq 0$ *має вигляд*

$$\hat{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w,x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w,x) + \varepsilon^{-1}\Gamma_1(x)\varphi(w,x) + \\ + \Gamma_2(x)\varphi(w,x) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x), \tag{6}$$

де оператори $\Gamma_1(x)$, $\Gamma_2(x)$ *визначені у лемі 1, а залишковий член* $\|\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x)\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, $\varphi(w,\cdot) \in C^3(\mathbf{R})$.

Доведення. Твердження леми стає очевидним, якщо використати визначення генератора марковського процесу та вигляд відповідних генераторів процесів $\eta^\varepsilon(t,x)$ і $x(t/\varepsilon^2)$.

Зрізаний оператор має структуру

$$\Gamma_0^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w,x) + \varepsilon^{-1}\Gamma_1(x)\varphi(w,x) + \\ + \Gamma_2(x)\varphi(w,x). \tag{7}$$

Лема 3. *При виконанні умов балансу (4) розв'язок задачі сингулярного збурення для зрізаного оператора (7) на тест-функціях*

$$\varphi(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon\varphi_1(u,x) + \varepsilon^2\varphi_2(u,x) + \varepsilon\varphi_3(u,x)$$

реалізується співвідношенням

$$\Gamma_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(u,x) = \hat{\hat{\Gamma}}\varphi(u) + \varepsilon\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(u), \tag{8}$$

де залишковий член рівномірно обмежений по x.

Граничний оператор визначається формулою

$$\hat{\hat{L}} = \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1\hat{R}_0\hat{\Gamma}_1\hat{\Pi} + \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_2\hat{\Pi}. \tag{9}$$

Доведення. Обчислимо

$$(\varepsilon^{-3}Q + \varepsilon^{-2}Q_1 + \varepsilon^{-1}\Gamma_1 + \Gamma_2)(\varphi(u) + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \varepsilon\varphi_3) = \\ = \varepsilon^{-3}Q\varphi + \varepsilon^{-2}(Q\varphi_1 + Q_1\varphi) + \varepsilon^{-1}(Q\varphi_2 + Q_1\varphi_1 + \Gamma_1\varphi) + \\ + (Q\varphi_3 + Q_1\varphi_2 + \Gamma_1\varphi_1 + \Gamma_2\varphi) + o(\varepsilon).$$

Звідси отримуємо чотири співвідношення:

I. $Q\varphi = 0$;
II. $Q\varphi_1 + Q_1\varphi = 0$;
III. $Q\varphi_2 + Q_1\varphi_1 + \Gamma_1\varphi = 0$;
IV. $Q\varphi_3 + Q_1\varphi_2 + \Gamma_1\varphi_1 + \Gamma_2\varphi = \hat{\hat{L}}\varphi$.

Встановимо тепер вигляд $\hat{\hat{L}}$.

З I випливає, що $\varphi \in N_Q$.

З II, оскільки $\varphi \in N_Q$, з умови розв'язності матимемо

$$\Pi Q_1 \Pi\varphi = 0.$$

Введемо позначення

$$\Pi Q_1 = \hat{Q}_1, \ \Pi\varphi = \hat{\varphi}.$$

Тоді

$$\hat{Q}_1\hat{\varphi} = 0,$$

звідки

$$\hat{\varphi} \in N_{\hat{Q}_1}.$$

Розглянемо III: з умови розв'язності для Q матимемо

$$\Pi Q_1 \Pi \varphi_1 + \Pi \Gamma_1 \Pi \varphi = 0, \tag{10}$$

$$\hat{Q}_1 \hat{\varphi}_1 + \hat{\Gamma}_1 \hat{\varphi} = 0.$$

З умови балансу (4) бачимо, що $\hat{\Gamma}_1 \hat{\varphi} \in R_Q$, отже, розв'язок

$$\hat{\varphi}_1 = \hat{R}_0 \hat{\Gamma}_1 \hat{\varphi},$$

де $\hat{R}_0$ — зведено-оборотний до $\hat{Q}_1$.

Перейдемо до IV: з умови розв'язності для Q отримаємо

$$\Pi Q_2 \Pi \varphi_2 + \Pi \Gamma_1 \Pi \varphi_1 + \Pi \Gamma_2 \Pi \varphi = \Pi \hat{\hat{L}} \Pi \varphi, \tag{11}$$

$$\hat{Q}_1 \hat{\varphi}_2 + \hat{\Gamma}_1 \hat{\varphi}_1 + \hat{\Gamma}_2 \hat{\varphi} = \hat{\hat{L}} \hat{\varphi}.$$

Памятаючи, що $\hat{\varphi}_1 = \hat{R}_0 \hat{\Gamma}_1 \hat{\varphi}$, матимемо

$$\hat{Q}_1 \hat{\varphi}_2 + \hat{\Gamma}_1 \hat{R}_0 \hat{\Gamma}_1 \hat{\varphi} + \hat{\Gamma}_2 \hat{\varphi} = \hat{\hat{L}} \hat{\varphi}.$$

У свою чергу, з умови розв'язності для $\hat{\varphi}_2$

$$\hat{\Pi} \hat{\Gamma}_1 \hat{R}_0 \hat{\Gamma}_1 \hat{\Pi} \varphi + \hat{\Pi} \hat{\Gamma}_2 \hat{\Pi} \hat{\varphi} = \hat{\hat{L}} \hat{\hat{\varphi}},$$

звідки

$$\hat{\hat{L}} = \hat{\Pi} \hat{\Gamma}_1 \hat{R}_0 \hat{\Gamma}_1 \hat{\Pi} + \hat{\Pi} \hat{\Gamma}_2 \hat{\Pi},$$

$$\hat{\varphi}_2 = \hat{R}_0 [\hat{\Gamma}_1 \hat{R}_0 \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 - \hat{\hat{L}}] \hat{\varphi},$$

$$\hat{\varphi}_3 = R_0 [Q_1 \varphi_2 + \Gamma_1 \varphi_1 + \Gamma_2 \varphi - \hat{\hat{L}} \varphi].$$

Обмеженість $\theta^{\varepsilon}_{\eta}(x)\varphi(w)$ випливає з вигляду операторів Γ_1, Γ_2 та R_0.

Завершення доведення теореми здійснюється з використанням леми 3 і теореми 4.2 з [3].

3. Поведінка динамічної системи

Розглянемо асимптотичні властивості вихідної еволюційної системи (1).

Теорема 2. *При виконанні умови балансу (4) справедлива слабка збіжність*

$$(u^{\varepsilon}(t), \eta^{\varepsilon}(t)) \Rightarrow (\hat{\hat{u}}(t), \eta^0(t)), \ \varepsilon \to 0.$$

Граничний процес $(\hat{\hat{u}}(t), \eta^0(t))$ *визначається генератором*

$$\mathbf{L}\varphi(u,w) = \hat{\hat{C}}(u)\varphi'_u(u,w) + \hat{\hat{\Gamma}}^u \varphi(u,\cdot) + \hat{\hat{\Gamma}}^w \varphi(\cdot,w), \tag{12}$$

де

$$\hat{\hat{C}}(u) = \Pi \mathbb{C}(x) = \int_X \pi(dx) C(u,x),$$

а генератори $\hat{\hat{\Gamma}}^u$ *та* $\hat{\hat{\Gamma}}^w$ *визначені в теоремі 1 та мають однакову структуру, але діють за різними змінними.*

Зауваження 1. Слабка збіжність процесів $u^\varepsilon(t) \Rightarrow \hat{u}(t)$, $\varepsilon \to 0$ буде випливати зі збіжності відповідних генераторів за умови компактності допграничної сукупності процесів $u^\varepsilon(t)$. Відповідні теореми про компактність процесів з незалежними приростами в схемі апроксимації Леві було доведено в [4].

Зауваження 2. Граничний процес буде задаватися стохастичним диференціальним рівнянням

$$d\hat{u}(t) = \left[\hat{C}(\hat{u}(t)) + \hat{a}_2\right] dt + \sigma dW(t) + \int_R v\tilde{\nu}(dt, dv),$$

де $\mathbb{E}\tilde{\nu}(dt, dv) = dt\tilde{\Gamma}_0(dv)$.

Зауваження 3. Граничний процес $\hat{u}(t)$ має три складові. Детермінований зсув визначається розв'язком диференціального рівняння

$$d\hat{u}_d(t) = \left[\hat{C}(\hat{u}_d(t)) + \hat{a}_2\right] dt, \tag{13}$$

де додатковий доданок $\hat{a}_2$ виникає за рахунок накопичення зі зростанням нормованого часу t/ε^3, $\varepsilon \to 0$ дуже малих стрибків порядку ε^3, які відбуваються з імовірністю, близькою до 1.

Друга, дифузійна складова, визначається параметром σ та виникає за рахунок накопичення зі зростанням нормованого часу t/ε^3, $\varepsilon \to 0$ малих стрибків порядку ε , які також відбуваються з імовірністю, близькою до 1.

Третя складова відображає рідкісні великі стрибки, що відбуваються з імовірністю, близькою до 0, і визначаються через усереднену міру стрибків $\tilde{\Gamma}_0(dv)$ генератором

$$\Gamma_j\varphi(w) = \int\limits_R [\varphi(w+v) - \varphi(w)]\tilde{\Gamma}_0(dv).$$

Доведення теореми 2. Має місце

Лема 4. *Генератор трикомпонентного марковського процесу $(u^\varepsilon(t), \eta^\varepsilon(t), x^\varepsilon(t/\varepsilon^3))$ $t \geq 0$ має представлення*

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-3}Q^\varepsilon\varphi(u,w,x) + \Gamma_u^\varepsilon(x)\varphi(u,\cdot,x) + \Gamma_w^\varepsilon(x)\varphi(\cdot,w,x) + \\ +\mathbf{C}(x)\varphi(u,w,x) + \theta_w^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x),\end{aligned} \tag{14}$$

де $\Gamma^\varepsilon_\cdot(x)$ — генератор сукупності ІПЗ (3),

$$\mathbf{C}(x)\varphi(u,w,x) = C(u,x)\varphi_u'(u,w,x).$$

Залишковий член $\|\theta_w^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доведення леми можна знайти в [7].

Лема 5. *Генератор $\mathbf{L}^\varepsilon(x)$ у випадку імпульсного процесу збурень допускає асимптотичне представлення*

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-3}Q^\varepsilon\varphi(u,w,x) + \varepsilon^{-1}\Gamma_1^u(x)\varphi(u,w,x) + \Gamma_2^u(x)\varphi(u,w,x) + \\ +\varepsilon^{-1}\Gamma_1^w(x)\varphi(u,w,x) + \Gamma_2^w(x)\varphi(u,w,x) + \mathbf{C}(x)\varphi(u,w,x) + \hat{\theta}_w^\varepsilon\varphi(u,w,x),\end{aligned} \tag{15}$$

де

$$\hat{\theta}_w^\varepsilon(x) = \gamma^\varepsilon + \theta_w^\varepsilon(x),$$

$\Gamma_1^\cdot(x)$ та $\Gamma_2^\cdot(x)$ визначено у лемі 1.

Залишковий член $\|\hat{\theta}^{\varepsilon}_w(x)\varphi(u,w,x)\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доведення здійснюється з допомогою представлення оператора (5) та результатів леми 4.

Зрізаний оператор має вигляд

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-3}Q^{\varepsilon}\varphi(u,w,x) + \varepsilon^{-1}\Gamma^u_1(x)\varphi(u,w,x) + \Gamma^u_2(x)\varphi(u,w,x)+$$
$$+\varepsilon^{-1}\Gamma^w_1(x)\varphi(u,w,x) + \Gamma^w_2(x)\varphi(u,w,x) + \mathbf{C}(x)\varphi(u,w,x) \qquad (16)$$

Лема 6. *При виконанні умови балансу (4) розв'язання проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора (16) на тест-функціях*

$$\varphi^{\varepsilon}(w,x) = \varphi(w) + \varepsilon\varphi_1(w,x) + \varepsilon^2\varphi_2(w,x) + \varepsilon^3\varphi_3(w,x)$$

здійснюється зі співвідношення

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}_0(x)\varphi^{\varepsilon}(w,x) = \mathbf{L}\varphi(w) + \varepsilon^3\theta^{\varepsilon}_w(x)\varphi(w), \qquad (17)$$

де залишковий член $\theta^{\varepsilon}_w(x)$ *рівномірно обмежений по* x.

Граничний оператор $\mathbf{L}$ *задається формулою*

$$\mathbf{L} = \Pi\left[\hat{\hat{C}} + \hat{\hat{\Gamma}}^u_1\hat{R}_0\hat{\hat{\Gamma}}^u_1 + \hat{\hat{\Gamma}}^u_2 + \hat{\hat{\Gamma}}^w_1\hat{R}_0\hat{\hat{\Gamma}}^w_1 + \hat{\hat{\Gamma}}^w_2\right]\Pi. \qquad (18)$$

Доведення. Для виконання рівності (17) необхідно, щоб коефіцієнти при однакових степенях ε зліва та справа були рівними. З цією метою обчислимо

$$(\varepsilon^{-3}Q + \varepsilon^{-2}Q_2 + \varepsilon^{-1}\Gamma^u_1 + \Gamma^u_2 + \varepsilon^{-1}\Gamma^w_1 + \Gamma^w_2 + \mathbf{C})(\varphi + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \varepsilon^3\varphi_3) =$$
$$= \varepsilon^{-3}Q\varphi + \varepsilon^{-2}(Q\varphi_1 + Q_1\varphi) + \varepsilon^{-1}(Q\varphi_2 + Q_1\varphi_1 + \Gamma^u_1\varphi + \Gamma^w_1\varphi)+$$
$$+(Q\varphi_3 + Q_1\varphi_2 + \Gamma^u_1\varphi_1 + \Gamma^w_1\varphi_1 + \Gamma^u_2\varphi + \Gamma^w_2\varphi + \mathbf{C}\varphi) + o(\varepsilon).$$

Знову ж таки, отримаємо чотири співвідношення:

I. $Q\varphi = 0$;

II. $Q\varphi_1 + Q_1\varphi = 0$;

III. $Q\varphi_2 + Q_1\varphi_1 + \Gamma^u_1\varphi + \Gamma^w_1\varphi = 0$;

IV. $Q\varphi_3 + Q_1\varphi_2 + \Gamma^u_1\varphi_1 + \Gamma^w_1\varphi_1 + \Gamma^u_2\varphi + \Gamma^w_2\varphi + \mathbf{C}\varphi = \hat{\hat{L}}\varphi$.

Встановимо вигляд $\hat{\hat{L}}$.

З I випливає, що $\varphi \in N_Q$;

З II, оскільки $\varphi \in N_Q$, з умови розв'язності матимемо

$$\Pi Q_1\Pi\varphi = 0.$$

Введемо позначення

$$\Pi Q_1 = \hat{Q}_1,\ \Pi\varphi = \hat{\varphi}.$$

Тоді

$$\hat{Q}_1\hat{\varphi} = 0,$$

звідки

$$\hat{\varphi} \in N_{\hat{Q}_1}.$$

Розглянемо III: з умови розв'язності для Q матимемо

$$\Pi Q_1\Pi\varphi_1 + \Pi\Gamma_1\Pi\varphi = 0,$$

$$\hat{Q}_1\hat{\varphi}_1 + \hat{\Gamma}^u_1\varphi + \hat{\Gamma}^w_1\hat{\varphi} = 0.$$

З умови балансу (4) бачимо, що $\hat{\Gamma}_1^u\hat{\varphi}$, $\hat{\Gamma}_1^u\hat{\varphi} \in N_Q$, отже, розв'язок

$$\hat{\varphi}_1 = \hat{R}_0[\hat{\Gamma}_1^u + \hat{\Gamma}_1^w]\hat{\varphi},$$

де $\hat{R}_0$ — зведено-оборотний до $\hat{Q}_1$.

Перейдемо до IV: з умови розв'язності для Q отримаємо

$$\Pi Q_2\Pi\varphi_2 + \Pi\Gamma_1^u\Pi\varphi_1 + \Pi\Gamma_2^u\Pi\varphi + \Pi\Gamma_1^w\Pi\varphi_1 +$$

$$+\Pi\Gamma_2^w\Pi\varphi + \Pi\mathbf{C}\Pi\varphi = \Pi\hat{\hat{L}}\Pi\varphi,$$

$$\hat{Q}_1\hat{\varphi}_2 + \hat{\Gamma}_1^u\hat{\varphi}_1 + \hat{\Gamma}_1^w\hat{\varphi}_1 + \hat{\Gamma}_2^u\hat{\varphi} + \hat{\Gamma}_2^w\hat{\varphi} + \hat{C}\hat{\varphi} = \hat{\hat{L}}\hat{\varphi}.$$

Памятаючи, що $\hat{\varphi}_1 = \hat{R}_0\hat{\Gamma}_1^u\hat{\varphi} + \hat{R}_0\hat{\Gamma}_1^w\hat{\varphi}$, матимемо

$$\hat{Q}_1\hat{\varphi}_2 + \hat{\Gamma}_1^u\hat{R}_0\hat{\Gamma}_1^u\hat{\varphi} + \hat{\Gamma}_1^u\hat{R}_0\hat{\Gamma}_1^w\hat{\varphi} +$$

$$+\hat{\Gamma}_1^w\hat{R}_0\hat{\Gamma}_1^u\hat{\varphi} + \hat{\Gamma}_1^w\hat{R}_0\hat{\Gamma}_1^w\hat{\varphi} + \hat{\Gamma}_2^u\hat{\varphi} + \hat{\Gamma}_2^w\hat{\varphi} + \hat{C}\hat{\varphi} = \hat{\hat{L}}\hat{\varphi}.$$

У свою чергу, з умови розв'язності для $\hat{\varphi}_2$

$$\hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1^u\hat{R}_0\hat{\Gamma}_1^u\Pi\hat{\varphi} + \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1^u\hat{R}_0\hat{\Gamma}_1^w\Pi\hat{\varphi} + \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1^w\hat{R}_0\hat{\Gamma}_1^u\Pi\hat{\varphi} +$$

$$+\hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1^w\hat{R}_0\hat{\Gamma}_1^w\Pi\hat{\varphi} + \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_2^u\Pi\hat{\varphi} + \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_2^w\Pi\hat{\varphi} + \hat{\Pi}\hat{C}\hat{\Pi}\hat{\varphi} = \hat{\hat{L}}\hat{\hat{\varphi}},$$

звідки

$$\hat{\hat{L}} = \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1\hat{R}_0\hat{\Gamma}_1\hat{\Pi} + \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_2\hat{\Pi} + \hat{\Pi}\hat{C}\hat{\Pi},$$

$$\hat{\varphi}_2 = \hat{R}_0\left[\hat{\hat{L}} - \hat{\Gamma}_1\hat{R}_0\hat{\Gamma}_1 - \hat{\Gamma}_2 - \hat{C}\right]\hat{\varphi},$$

$$\hat{\varphi}_3 = \hat{R}_0\left[\hat{\hat{L}} + Q_1\varphi_2 + \Gamma_1\varphi_1 + \hat{\Gamma}_2\varphi + \mathbf{C}\varphi\right].$$

Обмеженість $\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(w)$ випливає з вигляду операторів $\hat{\Gamma}_1$, $\hat{\Gamma}_2$, та R_0.

Завершення доведення теореми здійснюється з використанням леми 3 і теореми 4.2. з [3].

Література

1. Королюк В. С. Полумарковские процессы и их приложения / В. С. Королюк, А. Ф. Турбін — К: Наукова думка, 1976. — 184 с.
2. Korolyuk V. S. Stochastic Models of Systems / V. S. Korolyuk, V. V. Korolyuk // Kluwer, Dordrecht, 1999. — 185 c.
3. Korolyuk V. S. Stochastic Systems in Merging Phase Space / V. S. Korolyuk, N. Limnios // World Scientific, 2005. — 330 c.
4. Korolyuk V.S. Levy and Poisson approximations of switched stochastic systems by a semimartingale approach / V. S. Korolyuk, N. Limnios, I. V. Samoilenko // Comptes Rendus Mathematique. — 354.— 2016. P. 723–728.
5. Нікітін А. В. Диференціальні рівняння зі стохастично малими додатками в умовах апроксимації Леві. / А. В. Нікітін, І. В. Самойленко // Український математичний журнал. — 69. — 2017. — С. 1242–1249.
6. Samoilenko A. M. Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations / A. M. Samoilenko O. M. Stanzhytskyi // World Scientific, Singapore, 2011. — 323 p.

7. Nikitin A. V. Asymptotics of normalized control with Markov switchings / A. V. Nikitin, U. T. Khimka // Ukrainian Mathematical Journal. — 2016. — Vol. 68, №8. — P. 1252–1262.
8. Yin G. G. Discrete-Time Markov Chains / G. G. Yin, Q. Zhang // SIAM J. Control Optim. — 2006. — Vol. 51, №6. — P. 1080–1081.

Надійшла 15.09.2017