Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2017, №2(125) | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.668
MSC 68W05

# CONSTRUCTING AN ELLIPSOID OF MINIMAL VOLUME

Bogdan Rublyov
Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d.
E-mail: rublyovbv@gmail.com

# ПОБУДОВА ЕЛІПСОЇДА МІНІМАЛЬНОГО ОБ'ЄМУ

Б. В. Рубльов
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна. E-mail: rublyovbv@gmail.com

Abstract. In this article the problem of constructing an ellipsoid of minimal volume is considered for a given set of points in afinite-dimensional Euclidean space. Developed by the authors effective algorithms of constructing an ellipsoid of minimal volume based on the study of geometric properties extreme ellipses are given. The idea of a generalization of this approach to develop of effective algorithms of constructing a minimal ellipsoid , in a combination of iterative approaches and the construction of ellipsoids for elementary polyhedra is explained.
Keywords: The geometric algorithm, ellipse minimum area, minimum volume ellipsoid.

Резюме. У статті розглянуто проблему побудови еліпсоїда мінімального об'єму для заданого набору точок у скінченновимірному евклідовому просторі. Наведено розроблені автором ефективні алгоритми побудови еліпса мінімальної площі на основі вивчення геометричних властивостей екстремальних еліпсів. Вказано ідею узагальнення цього підходу до розробки ефективного алгоритму побудови мінімального еліпсоїда у поєднанні ітераційних підходів та побудови еліпсоїдів для елементарних многогранників.
Ключові слова: Геометричний алгоритм, еліпс мінімальної площі, еліпсоїд мінімального об'єму.

## Вступ

Еліпсоїдом мінімального об'єму (ЕМО) для обмеженої множини $M$ у $m$-вимірному евклідовому просторі називається такий еліпсоїд $e(M)$, що задовольняє умови:

1) $M \subset e(M)$.
2) для будь-якого іншого еліпсоїда $e_1$ такого, що $M \subset e_1$, виконується нерівність $V(e(M)) \leq V(e_1)$.

Очевидно, що для обмеженої фігури $M$ ЕМО для $M$ і для conv$M$ співпадають, а тому єдине обмеження, яке ми будемо накладати на клас обмежених множин $M$ (можливо навіть таких, що складаються з нескінченної кількості точок) полягає в тому, що множина conv$M$ має бути многогранником. Але з природних міркувань зрозуміло, що в якості $M$ доречно розглядати скінченний набір точок. При цьому розмірність множини conv$M$ має дорівнювати $m$, бо інакше $V(e(M)) = 0$.

Ще наприкінці сорокових років двадцятого сторіччя було доведено існування та єдиність такого еліпсоїду для будь-якої кількості точок та для кожного $m$ [1]. Вже тоді почали з'являтися перші алгоритми побудови ЕМО та його наближень. Останніми роками зацікавленість в оптимальному (принаймні достатньо ефективному) та точному (або наближеному з достатньо малою похибкою) розв'язанні цієї проблеми значно зросла у зв'язку з її широкими практичними застосуваннями. Зокрема, у математичному програмуванні, теорії керування, диференціальних іграх тощо. Серед сучасних методів розв'язання подібних задач найбільш поширеними є зведення їх до задачі опуклого програмування [2] або до певних ітераційних процесів [3, 4]. Усі ці методи вимагають великих обсягів обчислень навіть для випадку евклідової площини і завжди знаходять не сам ЕМО, а його наближення з деякою наперед визначеною точністю наближення.

Як показали дослідження для $m = 2$, тобто при побудові еліпса мінімальної площі (ЕМП) на евклідовій площині, ітераційні наближені алгоритми повністю поступаються точним алгоритмам. Це алгоритми, які базуються на вивченні геометричних властивостей еліпса мінімальної площі. Але ці властивості вдається так ретельно дослідити лише завдяки простоті описання опуклих многокутників та еліпсу [5–8]. Ідея цієї статті полягає в тому, щоб використати усе найкраще з ітераційних алгоритмів, а також з геометричних властивостей ЕМО.

Наведемо геометричні властивості для ЕМП на евклідовій площині, а також відповідні властивості ЕМО для випадку багатовимірного простору, якщо такі узагальнення природні, а не штучні.

Нехай на межі ЕМО $e(M)$ розташовано рівно $k$ вершин $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ многогранника $M = A_1A_2\ldots A_n$. Назвемо вершину $A_{i_j}$ *принциповою*, якщо $e(M) \neq e(M_1)$, де $M_1 = A_1A_2\ldots A_{j-1}A_{j+1}\ldots A_n$. У подальшому, коли ми кажемо, що на межі ЕМО $e(M)$ розташовано рівно $k$ вершин, то це означає, що усі ці вершини є принциповими.

**Теорема 1.** (Вершини многокутника на межі ЕМП)
*На ЕМП для довільного опуклого многокутника $M$ знаходиться щонайменше три вершини $M$.*

**Теорема 2.** (Вершини многогранника на межі ЕМО)
*На ЕМП для довільного опуклого многокутника $M \subset R^m$ знаходиться щонайменше $m+1$ вершина $M$.*

**Теорема 3.**(3 вершини многокутника на межі ЕМП)
*Якщо на ЕМП опуклого многокутника $M$ знаходиться рівно три вершини $M$, то*

- *ці три вершини утворюють трикутник найбільшої площі з вершинами серед вершин многокутника $M$;*
- *можна виписати рівняння межі ЕМП.*

**Теорема 4.** ($m+1$ вершини многогранника на межі ЕМО)
*Якщо на ЕМО опуклого многогранника $M$ знаходиться рівно $m+1$ вершини $M$, то*

- *ці $m+1$ вершини утворюють симплекс найбільшого об'єму з вершинами серед вершин многогранника $M$;*
- *можна виписати рівняння межі ЕМО.*

**Теорема 5.** (4 вершини многокутника на межі ЕМП)
*Якщо на ЕМП $e(M)$ опуклого многокутника $M$ знаходиться рівно чотири вершини $M$, то можна одержати рівняння $e(M)$.*

**Теорема 6.** (5 вершин многокутника на межі ЕМП)
*Якщо на ЕМП $e(M)$ опуклого многокутника $M$ знаходиться рівно п'ять вершин $M$, при цьому ЕМП для будь-яких 3–4 точок з цих п'яти відмінний від $e(M,)$ то рівняння ЕМП можна знайти як розв'язання СЛАР.*

**Теорема 7.** ($\frac{1}{2}m(m+3)$ вершин многогранника на межі ЕМО)
*Якщо на ЕМО $e(M)$ опуклого многогранника $M$ знаходиться рівно $\frac{1}{2}m(m+3)$ вершин $M$, при цьому ЕМО для будь-якої підмножини з цих $\frac{1}{2}m(m+3)$ точок відмінний від $e(M)$, то рівняння ЕМО можна знайти як розв'язання СЛАР.*

**Теорема 8.** (ЕМП для підмножини многокутника $M$)

- *Якщо ЕМП для многокутника $M = A_1A_2\ldots F_n$ містить рівно чотири вершини $M$, то жоден з ЕМП, побудованих для всіх інших чотирикутників вигляду $F_iA_jA_kA_l$, де $1 \le i < j < k < l \le n$, не оточує повністю многокутник $M$.*
- *Якщо ЕМП $e_1(M_1)$, побудований для многокутника $M_1 \subset M = A_1A_2\ldots A_n$, має властивість $M \subset e_1(M_1)$, то $e(M) = e_1(M_1)$.*

**Теорема 9.** (ЕМО для підмножини многогранника $M$)

- *Якщо ЕМО многокутника $M = A_1A_2\ldots A_n$ містить рівно $m$ вершин $M$, то жоден з ЕМО, побудованих для всіх інших $m$-гранників вигляду $A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_m}$, де $1 \le i_1 < i_2 < \ldots i_m \le n$, не оточує повністю многогранник $M$.*
- *Якщо ЕМО $e_1(M_1)$, побудований для многогранника $M_1 \subset M = A_1A_2\ldots A_n$, має властивість $M \subset e_1(M_1)$, то $e(M) = e_1(M_1)$.*

**Алгоритм 1**

(Принциповий алгоритм побудови ЕМП для довільної сукупності точок)

**1-й крок.** Розглянемо всі трикутники вигляду $A_iA_jA_k$, де $1 \le i < j < k \le n$, утворені вершинами многокутника $M$. Серед них знаходимо трикутник $A_iA_jA_k$ найбільшої площі. Для цього трикутника будуємо ЕМП $e_{ijk}$. Якщо виконується включення $M \subset e_{ijk}$, то $e_{ijk}$ — шуканий ЕМП для всього многокутника $M$ і алгоритм побудови ЕМП завершується. Якщо ж $M \not\subset e_{ijk}$, то переходимо до наступного кроку.

**2-й крок.** Розглянемо всі чотирикутники вигляду $A_iA_jA_kA_l$, де $1 \le i < j < k < l \le n$, утворені вершинами многокутника $M$. Внаслідок теореми 8 необхідно для кожного з них перевірити умову $M \subset e_{ijkl}$, де $e_{ijkl}$ — ЕМП для відповідного чотирикутника з усіма принциповими вершинами, бо інакше цей еліпс вже було б розглянуто на першому кроці алгоритму). Якщо ця умова виконується для одного з чотирикутників, то відповідний ЕМП буде ЕМП для всього многокутника $M$ і алгоритм завершує роботу. Якщо ж включення $M \subset e_{ijkl}$ не виконується для жодного з еліпсів $e_{ijkl}$, то переходимо до останнього кроку роботи алгоритму.

**3-й крок.** Розглянемо всі можливі п'ятикутники $A_iA_jA_kA_lA_m$, $1 \le i < j < k < l < m \le n$, утворені вершинами многокутника М, і для кожного з них побудуємо відповідний ЕМП з усіма п'ятьма принциповими вершинами. Серед усіх таких ЕМП існує єдиний, що містить многокутник $M$. Цей ЕМП і є шуканим. Алгоритм завершує свою роботу.

**Алгоритм 2**

(Побудова ЕМП для елементарних многокутників)

Цей алгоритм дозволяє будувати ЕМП для трикутника, чотирикутника, п'ятикутника та шестикутника, які визначаються координатами своїх вершин.

**1-й крок.** ЕМП для трикутника знаходиться безпосередньо. Для трикутника $BCD$, вершини якого мають координати $B(-a, 0)$, $C(a, 0)$, $D(b, c)$, рівняння ЕМП задається так

$$c^2x_0^2 - 2bcx_0z_0 + \left(b^2 + 3a^2\right) z_0^2 - 2a^2cz_0 = a^2c^2.$$

Для інших трикутників слід провести відповідне перенесення системи координат.

**2-й крок.** Для чотирикутника $BCDE$ знаходимо відношення

$$\frac{BO}{OD} = n^2 \ge \frac{CO}{EO} = k^2.$$

Якщо виконується умова $k^2 \ge \frac{n^2}{1+n^2+n^4}$, то усі вершини чотирикутника є принциповими. Далі розв'язуємо кубічне рівняння

$$Lt^3 + 2Jt^2 + (2L - 3I)t + J = 0,$$

де $I = (n^2k^2 + 1)(n^2 + k^2)$, $J = 2nk(1 - n^2)(1 - k^2)$, $L = 4n^2k^2$. Із розв'язку цього рівняння знаходимо кут $\varphi_0$ між діагоналями чотирикутника. Робимо афінне перетворення заданого чотирикутника $BCDE$ у чотирикутник

$B_1C_1D_1E_1$, що є вписаним та має кут між діагоналями $\varphi_0$. ЕМП для нього є описане коло, і зворотнім афінним перетворенням $A^{-1}$ знаходимо ЕМП для заданого чотирикутника $BCDE$. Якщо не усі вершини чотирикутника є принциповими, то серед чотирьох трикутників $BCD$, $BCE$, $BDE$, $CDE$ знаходимо той, що має найбільшу площу, ЕМП для нього (крок 1) і буде ЕМП для $BCDE$.

**3-й крок.** Для заданого п'ятикутника $BCDEF$ знаходимо трикутник найбільшої площі (нехай це буде $BCD$), будуємо для нього ЕМП $e_1$ (крок 1). Якщо він містить решту точок ($E$ і $F$), то він і є шуканим ЕМП для усього п'ятикутника. Інакше, знаходимо точку, найбільш „еліптично“ віддалену від еліпса $e_1$ (нехай це буде точка $E$), далі (крок 2) будуємо ЕМП $e_2$ для чотирикутника $BCDE$, який обов'язково проходить через всі його вершини. Якщо $e_2$ містить п'яту вершину $F$, то він є шуканим, інакше будуємо ЕМП для решти чотирикутників, які можна утворити з вершин $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, з обов'язковим проходженням його через усі чотири вершини. Якщо один з них містить п'яту вершину, то він є шуканим, інакше ЕМП для п'ятикутника $BCDEF$ проходить через усі його п'ять вершин.

**4-й крок.** Для шестикутника $BCDEFG$ починаємо діяти аналогічно випадку п'ятикутника (крок 1). Якщо ЕМП $e_1$ для трикутника найбільшої площі ($BCD$) не містить решту вершин, то знаходимо найбільш„еліптично“ віддалену точку (точка $E$), будуємо ЕМП $e_2$ для чотирикутника $BCDE$ (крок 2). Якщо він не містить решту точок, то знаходимо серед інших знов найбільш„еліптично“ віддалену, (нехай це точка $F$) і будуємо ЕМП $e_3$ для п'ятикутника $BCDEF$ (крок 3). Якщо він не містить останню вершину, то розглянемо по черзі ЕМП для усіх п'ятикутників, що утворюються вершинами $BCDEFG$. Той з них, що містить шосту вершину, і є шуканим.

**Алгоритм 3**

(Побудова ЕМП для довільної сукупності точок)

Нехай задано $N$ точок $C_1$, $C_2$, $\ldots$, $C_N$.

**1-й крок.** Вибираємо будь-які шість точок заданої множини, вони утворюють множину $Z$.

**2-й крок.** Будуємо ЕМП $e$ для множини $Z$, яка є елементарним многокутником, точки, які не є принциповими при знаходженні цього ЕМП, вилучаємо з множини $Z$ (після цього множина $Z$ містить не більше ніж п'ять точок).

**3-й крок.** Розглядаємо по черзі всі точки множини $M$. Якщо всі вони розташовані всередині $e$, то він є шуканим і алгоритм завершує свою роботу. Інакше ми знаходимо першу точку $A$ із множини $M$, яка розташована поза еліпсом $e$, додаємо цю точку до множини $Z$, яка є принциповою. Переходимо на другий крок алгоритму.

Останній алгоритм має найкращі характеристики серед усіх існуючих алгоритмів і був занесений до бібліотеки алгоритмів з обчислювальної геометрії [9]. Виходячи з цього, ми намагалися розробити аналогічний суто геометричній підхід до побудови ЕМО принаймні для просторів невеликої розмірності $R^3$, $R^4$. Для цього треба оптимально або якомога більш ефективно розв'язати задачу побудови ЕМО для елементарних многогранників. Для $R^3$ це многогранники, що містять від 4-х до 10-ти вершин, принциповими серед них мають бути від 4-х до 10-ти вершин. Але, на жаль, окрім крайніх випадків для симплексу з 4-ма принциповими вершинами та багатогранника з 9-ма принциповими вершинами, усі інші випадки аналітично розв'язати не вдалося. Саме тут виникає потреба застосування ідеї побудови ЕМО для елементарних многогранників. Назвемо елементарним многогранником такий набір точок, для яких не існує гіперплощини розмірності менше $m$, яка містить усі ці точки, а також їх кількість складає від $m+1$ до $\frac{1}{2}m(m+3)+1$ точок.

**Алгоритм 4**

(Побудова ЕМО для довільної сукупності точок)

Нехай задано $N$ точок $C_1$, $C_2$, ..., $C_N$ із простору $R^m$.
**1-й крок.** Вибираємо будь-які $m+1$ точки заданої множини, які утворюють $m$-вимірний симплекс у просторі $R^m$. Ці точки утворюють множину $Z$.

**2-й крок.** Будуємо ЕМО $e$ для множини $Z$, яка є елементарним многогранником. Точки, які не є принциповими при знаходженні цього ЕМО, вилучаємо із множини $Z$ (після цього множина $Z$ містить не більше ніж $\frac{1}{2}m(m+3)$ точок).

**3-й крок.** Розглядаємо по черзі всі точки множини $M$. Якщо всі вони розташовані всередині $e$, то він є шуканим і алгоритм завершує свою роботу. Інакше ми знаходимо першу точку $A$ із множини $M$, яка розташована поза еліпсоїдом $e$, додаємо цю точку до множини $Z$ і переходимо на другий крок алгоритму.

Зауважимо, що в більшості існуючих алгоритмів побудови ЕМО насправді будується деяке наближення ЕМО і, як теоретично доводиться, з будь-якою наперед визначеною точністю [10, 11]. Як показують споріднені дослідження, ЕМО також можна побудувати з будь-якою наперед заданою точністю, що залежить від точності розв'язання нелінійної системи рівнянь, але крім цього в багатьох випадках ЕМО вдається побудувати точно, що відбувається кожен раз, як тільки ЕМО спирається на повний набір точок $m$-вимірного евклідового простору.

Покажемо привабливі риси цього алгоритму, який має показати його перспективи стати одним з найкращих при практичних застосуваннях.
**1.** Цей алгоритм вимагає скінченну кількість операцій на відміну від багатьох інших ітераційних алгоритмів, де процес завершується при одержанні певної наперед визначеної точності (як правило без урахування похибки обчислень [11]), кожний раз при цьому одержуємо лише наближення ЕМО.
**2.** У багатьох випадках досить швидко знаходиться справжній ЕМО, що випливає з теоретичних обґрунтувань.

**3.** На будь-якому кроці ми можемо зупинити процес і прийняти одержаний еліпсоїд в якості наближення ЕМО, об'єм якого буде не перевищувати об'єм справжнього ЕМО.

**4.** При переході з кроку на крок не відбувається ніякого накопичення похибки, тому що з попереднього кроку ми залишаємо лише інформацію про принципові точки множини $M$, а знайдений черговий еліпсоїд, накопичену похибку та інші речі можемо не враховувати.

## Література


1. John F. Extremum problems with inequalities as subsidiary condition // Studies and Essays, presented to R.Courant on his 60-th birthday, New York. — 1948. — P.187–204.
2. Березовский О. А. Двойственный алгоритм построения оптимальных описанных эллипсоидов // Исследование методов решения экстремальных задач. — К.: ИК АН УССР, 1990. — С.30–35.
3. Шор Н. З., Стеценко С. И. Алгоритм последовательного сжатия пространства для построения описанного эллипсоида минимального объема // Исследования методов решения экстремальных задач. — К.: ИК АН УССР, 1990. — С. 25–30.
4. Хачиян Л. Г. Проблемы оптимальных алгоритмов в выпуклом программировании, декомпозиции и сортировке // В сборнике „Компьютер и задачи выбора". — 1989. — С. 161–205.
5. Петунін Ю. І., Рубльов Б. В., Милейко Ю. Ю. Оптимальний алгоритм побудови еліпса мінімальної площі // Вісник Київського університету. — 1998. — Вип. 3. — С. 87–95.
6. Рублев Б. В., Петунин Ю. И. Эллипс минимальной площади, содержащий конечное множество точек. Часть 1 // Український математичний журнал. — 1998. — 50, №7. — С. 973–981.
7. Рублев Б. В., Петунин Ю. И. Эллипс минимальной площади, содержащий конечное множество точек. Часть 2 // Український математичний журнал. — 1998. — 50, №8. — С. 1098–1105.
8. Петунін Ю. І., Рубльов Б. В., Милейко Ю. Ю. Оптимальний алгоритм побудови еліпса мінімальної площі // Вісник Київського університету. — 1998. — Вип. 3. — С. 87–95.
9. B. Rublyov, T. Galkovskyi, B. Gärtner. The domination heuristic for LP-type problems // In Proc. Workshop on Algorithm Engineering & Experiments (ALENEX). — 2009. — 5 p.
10. Березовский О. А. Двойственный алгоритм построения оптимальных описанных эллипсоидов // Исследование методов решения экстремальных задач. — К.: ИК АН УССР, 1990. — С. 30–35.
11. Шор Н. З., Стеценко С. И. Алгоритм последовательного сжатия пространства для построения описанного эллипсоида минимального объема // Исследования методов решения экстремальных задач. — К.: ИК АН УССР, 1990. — С. 25–30.


Надійшла 03.03.2017