Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2017, №2(125) | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.9

MSC 47J20, 49J40, 65K15, 90C25

A MODIFIED SUBGRADIENT EXTRAGRADIENT METHOD

V. V. Semenov

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko Kiev National University, Kiev, Ukraine, E-mail: volodya.semenov@gmail.com.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ СУБГРАДИЕНТНЫЙ ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД

В. В. Семёнов

Факультет компьютерных наук и кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина, E-mail: volodya.semenov@gmail.com.

Abstract. A modified subgradient extragradient method with dynamic rule for finding the stepsize for solving variational inequalities with monotone operators acting in Hilbert space is considered. The weak convergence of the method is proved without any Lipschitzian continuity assumption on operators.
Keywords: variational inequality, monotone operator, Hilbert space, extragradient method, weak convergence.

Резюме. Рассмотрен модифицированный субградиентный экстраградиентный метод с динамической регулировкой величины шага для решения вариационных неравенств с монотонными операторами, действующими в гильбертовом пространстве. Доказана слабая сходимость метода без предположения о липшицевости операторов.
Ключевые слова: вариационное неравенство, монотонный оператор, гильбертово пространство, экстраградиентный метод, слабая сходимость.

1. Введение

Будет сделан краткий обзор основных результатов недавних исследований, проведенных совместно с С. В. Денисовым, Д. А. Верланем и Л. М. Чабак [1–3].

Статья посвящена памяти профессора Юрия Ивановича Петунина (1937–2011), проработавшего более 40 лет (1969–2011) на кафедре вычислительной математики Киевского национального университета имени Тараса Шевченка и бывшего большим энтузиастом применения функционального анализа в вопросах вычислительной математики. Автор до сих пор находится под большим влиянием последней главы книги [4], посвященной регуляризуемости отображений. Эта книга и работа с Ю. И. Петуниным над книгами [5, 6] существенно повлияли на представления автора о том, „что такое хорошо и что такое плохо“ в вычислительной (да и не только) математике.

Пусть H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и порожденной нормой $\|\cdot\|$. Пусть C — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства H и $A : H \to H$ — некоторый оператор. Рассмотрим вариационное неравенство

$$\text{найти } x \in C : \ (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \tag{1}$$

Множество решений задачи (1) обозначим через $VI\,(A, C)$.

Будем предполагать выполненными следующие условия:

(A1) $VI\,(A, C) \neq \emptyset$;
(A2) оператор $A : H \to H$ — монотонный, равномерно непрерывный на ограниченных множествах и отображает ограниченные множества в ограниченные.

Замечание 1. Если $\dim H < \infty$, то достаточно требовать от оператора A монотонности и непрерывности.

Напомним простой, но важный факт [7].

Лемма 1. *Если оператор $A : H \to H$ монотонный и непрерывный, а множество $C \subseteq H$ выпуклое и замкнутое, то $x \in VI\,(A, C)$ ттогда*[1]*, когда $x \in C$ и*

$$(Ay, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

В частности, множество $VI\,(A, C)$ выпуклое и замкнутое.

Решение вариационных неравенств является активно развивающимся направлением прикладного нелинейного анализа. К настоящему времени предложено большое количество методов, в частности, методов проекционного типа (использующих операцию метрического проектирования на допустимое множество C) [8].

В случае задач поиска седловых точек или равновесий Нэша для сходимости наиболее простого проекционного метода (аналога метода проекции градиента) необходимо выполнение усиленных условий монотонности. Для преодоления этой трудности существует несколько подходов. Один из них состоит в регуляризации исходной задачи с целью придать ей требуемое свойство [9]. Сходимость без модификации задачи обеспечивается в итерационных методах экстраградиентного типа, впервые предложенных Г. М. Корпелевич [10]. Экстраградиентный алгоритм Корпелевич для липшицевого оператора A имеет вид

$$\begin{cases} x_0 \in H, \\ y_n = P_C\,(x_n - \lambda A x_n)\,, \\ x_{n+1} = P_C\,(x_n - \lambda A y_n)\,, \end{cases}$$

[1] ттогда — тогда и только тогда. Аналогично англ. „iff“ для „if and only if“.

где $\lambda \in (0, 1/L)$, L — константа Липшица оператора A, P_C — оператор метрического проектирования на множество C. Обобщению и исследованию этого алгоритма посвящено большое количество публикаций [11–22]. В частности, на кафедре вычислительной математики Киевского национального университета имени Тараса Шевченка выполнены следующие работы [18–22]. Идейно близким к экстраградиентному является метод

$$\begin{cases} x_0 = y_0 \in H, \;\; \lambda \in (0, 1/3L)\,, \\ x_{n+1} = P_C\left(x_n - \lambda A y_n\right), \\ y_{n+1} = P_C\left(x_{n+1} - \lambda A y_n\right), \end{cases}$$

предложенный Л. Д. Поповым [23], усовершенствованный и детально изученный в [24–31]. Недавно [32, 33] для вариационных неравенств и задач равновесного программирования был предложен модифицированный вариант экстраградиентного алгоритма с одним метрическим проектированием на допустимое множество. Этот, так называемый, субградиентный экстраградиентный алгоритм имеет вид

$$\begin{cases} x_0 \in H, \\ y_n = P_C\left(x_n - \lambda A x_n\right), \\ T_n = \left\{z \in H : \; (x_n - \lambda A x_n - y_n, z - y_n) \le 0\right\}, \\ x_{n+1} = P_{T_n}\left(x_n - \lambda A y_n\right), \end{cases}$$

где $\lambda \in (0, 1/L)$, L — константа Липшица оператора A.

Очевидным недостатком упомянутых методов является предположение о том, что константа Липшица L оператора A известна или допускает простую оценку. Кроме того, во многих задачах операторы могут не удовлетворять условию Липшица. Заметим, что в большинстве работ по алгоритмам решения вариационных неравенств рассматриваются именно липшицевые операторы.

Далее мы рассмотрим предложенную в [1] модификацию субградиентного экстраградиентного алгоритма с динамической регулировкой величины шага для вариационных неравенств с монотонным нелипшицевым оператором и докажем его слабую сходимость. Сильно сходящиеся варианты алгоритма изучены в [2].

2. Модифицированный субградиентный экстраградиентный метод

Итак, для решения вариационного неравенства (1) предлагаем следующий алгоритм [1].

Алгоритм 1.

Инициализация. Задаем числовые параметры $\sigma > 0$, $\tau \in (0, 1)$, $\theta \in (0, 1)$ и элемент $x_0 \in H$.

Итерационный шаг. Для $x_n \in H$ вычисляем

$$y_n = P_C\left(x_n - \lambda_n A x_n\right),$$

где λ_n получаем из условия

$$\begin{cases} j\left(n\right)=\min\{j\geq 0: & \left\|AP_C\left(x_n-\sigma\tau^j Ax_n\right)-Ax_n\right\|\leq \\ & \leq \frac{\theta}{\sigma\tau^j}\left\|P_C\left(x_n-\sigma\tau^j Ax_n\right)-x_n\right\|\}, \\ \lambda_n=\sigma\tau^{j(n)}. \end{cases}$$

Если $y_n=x_n$, то конец и x_n — решение, иначе вычисляем

$$x_{n+1}=P_{T_n}\left(x_n-\lambda_n Ay_n\right),$$

где

$$T_n=\left\{z\in H:\ \left(x_n-\lambda_n Ax_n-y_n,z-y_n\right)\leq 0\right\}.$$

Покажем, что процедура вычисления λ_n всегда выполняется за конечное число шагов.

Лемма 2. *Правило выбора параметра λ_n корректно, то есть,*

$$j\left(n\right)<+\infty.$$

Доказательство. Пусть $x_n\in VI(A,C)$. Тогда

$$x_n=P_C\left(x_n-\sigma Ax_n\right)\quad \text{и}\quad j\left(n\right)=0.$$

Рассмотрим ситуацию $x_n\notin VI(A,C)$ и предположим, что для всех $j\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sigma\tau^j\left\|AP_C\left(x_n-\sigma\tau^j Ax_n\right)-Ax_n\right\|>\theta\left\|P_C\left(x_n-\sigma\tau^j Ax_n\right)-x_n\right\|.$$

Откуда

$$\lim_{j\to\infty}\left\|P_C\left(x_n-\sigma\tau^j Ax_n\right)-x_n\right\|=0.$$

Из равномерной непрерывности оператора A на ограниченных множествах следует

$$\lim_{j\to\infty}\left\|AP_C\left(x_n-\sigma\tau^j Ax_n\right)-Ax_n\right\|=0.$$

Таким образом,

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\left\|P_C\left(x_n-\sigma\tau^j Ax_n\right)-x_n\right\|}{\sigma\tau^j}=0. \tag{2}$$

Положим

$$y_n^j=P_C\left(x_n-\sigma\tau^j Ax_n\right).$$

Имеем

$$\left(\frac{y_n^j-x_n}{\sigma\tau^j},x-y_n^j\right)+\left(Ax_n,x-y_n^j\right)\geq 0\quad \forall x\in C. \tag{3}$$

Совершив предельный переход в (3) с учетом асимптотики (2), получаем

$$\left(Ax_n,x-x_n\right)\geq 0\quad \forall x\in C,$$

т.е., $x_n\in VI\left(A,C\right)$. Пришли к противоречию. □

Имеет место

Лемма 3. *Для последовательностей (x_n), (y_n), порожденных итерационным алгоритмом 1, имеет место неравенство*

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 - (1-\theta)\|x_n - y_n\|^2 - (1-\theta)\|x_{n+1} - y_n\|^2, \quad (4)$$

где $z \in VI(A, C)$.

Доказательство. Пусть $z \in VI(A, C)$. Имеем

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - z\|^2 &= \|P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n) - z\|^2 = \\ &= \|P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n) - (x_n - \lambda_n A y_n) + (x_n - \lambda_n A y_n) - z\|^2 = \\ &= \|(x_n - \lambda_n A y_n) - z\|^2 + \|P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n) - (x_n - \lambda_n A y_n)\|^2 + \\ &\quad + 2\left(P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n) - (x_n - \lambda_n A y_n), (x_n - \lambda_n A y_n) - z\right).\end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}&2\|P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n) - (x_n - \lambda_n A y_n)\|^2 + \\ &\quad + 2\left(P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n) - (x_n - \lambda_n A y_n), (x_n - \lambda_n A y_n) - z\right) = \\ &\quad = 2\left((x_n - \lambda_n A y_n) - P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n), z - P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n)\right) \le 0,\end{aligned}$$

то для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - z\|^2 &\le \|(x_n - \lambda_n A y_n) - z\|^2 - \\ &\quad - \|P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n) - (x_n - \lambda_n A y_n)\|^2 = \\ &= \|(x_n - \lambda_n A y_n) - z\|^2 - \|x_{n+1} - (x_n - \lambda_n A y_n)\|^2 = \\ &= \|x_n - z\|^2 - \|x_n - x_{n+1}\|^2 + 2\lambda_n (z - x_{n+1}, A y_n).\end{aligned}$$

Из монотонности оператора A, включения $z \in VI(A, C)$ и леммы 1 следует

$$\begin{aligned}0 &\le (Ay_n - Az, y_n - z) = (Ay_n, y_n - z) - \underbrace{(Az, y_n - z)}_{\ge 0} \le \\ &\le (Ay_n, y_n - z) = (Ay_n, y_n - x_{n+1}) + (Ay_n, x_{n+1} - z).\end{aligned}$$

То есть,

$$(Ay_n, z - x_{n+1}) \le (Ay_n, y_n - x_{n+1}).$$

Таким образом,

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 - \|x_n - x_{n+1}\|^2 + 2\lambda_n (Ay_n, y_n - x_{n+1}).$$

Далее,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - z\|^2 &\le \|x_n - z\|^2 - \|(x_n - y_n) + (y_n - x_{n+1})\|^2 + \\ &\quad + 2\lambda_n (Ay_n, y_n - x_{n+1}) = \|x_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &\quad + 2(x_n - \lambda_n A y_n - y_n, x_{n+1} - y_n).\end{aligned}$$

Поскольку $x_{n+1} \in T_n$, то

$$(x_n - \lambda_n A y_n - y_n, x_{n+1} - y_n) = \underbrace{(x_n - \lambda_n A x_n - y_n, x_{n+1} - y_n)}_{\le 0} + \\ + \lambda_n \left(A x_n - A y_n, x_{n+1} - y_n\right) \le \lambda_n \left(A x_n - A y_n, x_{n+1} - y_n\right).$$

Следовательно, приходим к неравенству

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ + 2\lambda_n \left(A x_n - A y_n, x_{n+1} - y_n\right). \quad (5)$$

Слагаемое $2\lambda_n \left(A x_n - A y_n, x_{n+1} - y_n\right)$ в (5) оценим следующим образом

$$2\lambda_n \left(A x_n - A y_n, x_{n+1} - y_n\right) \le 2\lambda_n \|A x_n - A y_n\| \|x_{n+1} - y_n\| \le \\ \le 2\theta \|x_n - y_n\| \|x_{n+1} - y_n\| \le \theta \|x_n - y_n\|^2 + \theta \|x_{n+1} - y_n\|^2. \quad (6)$$

Учитывая оценку (6) в (5), приходим к желаемому неравенству (4). □

Из неравенства (4) следует фейеровское свойство последовательности (x_n) относительно множества $VI\,(A, C)$ и сходимость к нулю последовательностей $(x_n - y_n)$, $(x_{n+1} - y_n)$. Это позволяет получить следующий результат относительно сходимости предлагаемого итерационного алгоритма.

Теорема 1. *Последовательности (x_n) и (y_n), порожденные алгоритмом 1, слабо сходятся к некоторой точке $z \in VI(A, C)$.*

Сильно сходящиеся варианты предложенного метода можно получить, используя метод итеративной регуляризации или гибридный метод.

Рассмотрим сильно сходящийся алгоритм для поиска нулей монотонных операторов, предложенный в [3].

Будем решать операторное уравнение

$$Ax = 0,$$

где A — монотонный оператор, действующий в действительном гильбертовом пространстве H.

Алгоритм 2.

Инициализация. Задаем числовые параметры $\sigma > 0$, $\tau \in (0, 1)$, $\theta \in (0, 1)$, элемент $x_0 \in H$.
Итерационный шаг. Для $x_n \in H$ вычисляем

$$y_n = x_n - \lambda_n A x_n,$$

где λ_n получаем из условия

$$\begin{cases} j(n) = \min\left\{j \ge 0 : \ \left\|A\left(x_n - \sigma\tau^j A x_n\right) - A x_n\right\| \le \theta \|A x_n\|\right\}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}. \end{cases}$$

Вычисляем

$$\begin{cases} z_n = x_n - \lambda_n A y_n, \\ C_n = \left\{ z \in H : \|z - z_n\| \leq \|z - x_n\| \right\}, \\ Q_n = \left\{ z \in H : (x_n - z, x_0 - x_n) \geq 0 \right\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0. \end{cases}$$

Справедлива следующая теорема о сходимости метода.

Теорема 2. *Пусть оператор $A : H \to H$ — монотонный, равномерно непрерывный на ограниченных множествах и отображающий ограниченные множества в ограниченные. Предположим, что $A^{-1}0 \neq \emptyset$. Тогда последовательность (x_n), порожденная методом, сильно сходится к точке $z_0 = P_{A^{-1}0} x_0$.*

3. Модифицированный субградиентный экстраградиентный метод для вариационных неравенств с априорной информацией

Построим вариант метода для поиска решения вариационного неравенства (1), дополнительно являющегося неподвижной точкой заданного оператора. Подобные задачи рассматривались в [34].

Пусть $S : H \to H$ — квазинерастягивающий оператор с множеством неподвижных точек $F(S) = \{x \in H : \ Sx = x\}$ и такой, что оператор $I - S$ демизамкнут в нуле. Предположим, что

(A3) $VI(A, C) \cap F(S) \neq \emptyset$.

Замечание 2. Пусть $g : H \to \mathbb{R}$ — выпуклая дифференцируемая функция. Если множество $D = \{x \in H : \ g(x) \leq 0\}$ не пусто, то его можно трактовать как множество неподвижных точек квазинерастягивающего оператора

$$Sx = \begin{cases} x - \frac{g(x)}{\|\nabla g(x)\|^2} \nabla g(x), & \text{если } x \notin D, \\ x, & \text{если } x \in D, \end{cases}$$

где $\nabla g(x) \in H$ — производная g в точке $x \in H$. Для демизамкнутости в нуле оператора $I - S$ достаточно ограниченности g на произвольном ограниченном множестве [34].

Для поиска элементов множества $VI(A, C) \cap F(S)$ рассмотрим следующий алгоритм [1].

Алгоритм 3.

Инициализация. Задаем числовые параметры $\sigma > 0$, $\tau \in (0, 1)$, $\theta \in (0, 1)$, элемент $x_0 \in H$ и последовательность $(\delta_n) \subseteq [a, b] \subseteq (0, 1)$.

Итерационный шаг. Для $x_n \in H$ вычисляем

$$y_n = P_C (x_n - \lambda_n A x_n),$$

где λ_n получаем из условия

$$\begin{cases} j(n) = \min\{j \geq 0 : & \left\| AP_C \left(x_n - \sigma\tau^j A x_n \right) - A x_n \right\| \leq \\ & \leq \frac{\theta}{\sigma\tau^j} \left\| P_C \left(x_n - \sigma\tau^j A x_n \right) - x_n \right\| \}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}. \end{cases}$$

Вычисляем
$$x_{n+1} = \delta_n x_n + (1 - \delta_n)\, SP_{T_n}\,(x_n - \lambda_n A y_n)\,,$$
где
$$T_n = \{z \in H :\ (x_n - \lambda_n A x_n - y_n, z - y_n) \leq 0\}\,.$$

Имеет место

Теорема 3. *Последовательности (x_n) и (y_n), порожденные алгоритмом 3, слабо сходятся к некоторой точке $z \in VI(A,C) \cap F\,(S)$.*

4. Заключение

В статье рассмотрен модифицированный субградиентный экстраградиентный метод с динамической регулировкой величины шага для решения вариационных неравенств с монотонными операторами, действующими в гильбертовом пространстве [1]. Относительно операторов не предполагается их липшицевость. Также рассмотрен вариант метода для поиска решения вариационного неравенства с априорной информацией, описанной в виде включения в множество неподвижных точек квазинерастягивающего оператора. Основной теоретический результат — теоремы о слабой сходимости методов.

Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект № F74/24921) и Министерства образования и науки Украины (проект № 0116U004777).

Литература

1. Denisov S. V., Semenov V. V., Chabak L. M. Convergence of the Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators // Cybernetics and Systems Analysis. — 2015. — Vol. 51. — P. 757–765.
2. Verlan D. A., Semenov V. V., Chabak L. M. A Strongly Convergent Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators // Journal of Automation and Information Sciences. — 2015. — Vol. 47, №7. — P. 31–46.
3. Семенов В. В., Денисов С. И. Гибридный метод для уравнений с монотонными нелипшицевыми операторами // Международная летняя математическая школа памяти В. А. Плотникова: тезисы докладов. — Одесса: Астропринт, 2016. — С. 56.
4. Петунин Ю. И., Пличко А. Н. Теория характеристик подпространств и её приложения. — К.: Вища школа, 1980. — 215 с.
5. Ляшко С. И., Номировский Д. А., Петунин Ю. И., Семенов В. В. Двадцатая проблема Гильберта. Обобщенные решения операторных уравнений. — Москва: ООО „И. Д. Вильямс“, 2009. — 192 с.
6. Petunin Yu. I., Klyushin D. A., Lyashko S. I., Nomirovskii D. A., Semenov V. V. Generalized Solutions of Operator Equations and Extreme Elements. — New York: Springer, 2012. — 200 p.
7. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. — Москва: Мир, 1983. — 256 с.

8. Konnov I. V. Combined relaxation methods for variational inequalities. — New York: Springer-Verlag, 2001.
9. Бакушинский А. Б., Гончарский А. В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. — Москва: Изд-во МГУ, 1989. — 200 с.
10. Корпелевич Г. М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Экономика и математические методы. — 1976. — №4. — С. 747–756.
11. Хоботов Е. Н. О модификации экстраградиентного метода для решения вариационных неравенств и некоторых задач оптимизации // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1987. — Т. 27, №10. — С. 1462–1473.
12. Tseng P. A Modified Forward-Backward Splitting Method for Maximal Monotone Mappings // SIAM J. Control Optim. — 2000. — Vol. 38. — P. 431–446.
13. Nadezhkina N., Takahashi W. Strong convergence theorem by a hybrid method for nonexpansive mappings and Lipschitz-continuous monotone mappings // SIAM J. Optim. — 2006. — 16, №4. — P. 1230–1241.
14. Nadezhkina N., Takahashi W. Weak convergence theorem by an extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2006. — Vol. 128. — P. 191–201.
15. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence O(1/t) for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems // SIAM Journal on Optimization. — 2004. — Vol. 15. — P. 229–251.
16. Tran D. Q., M. Le Dung, Nguyen V. H. Extragradient algorithms extended to equilibrium problems // Optimization. — 2008. — Vol. 57, №6. — P. 749–776.
17. Запорожец Д. Н., Зыкина А. В., Меленьчук Н. В. Сравнительный анализ экстраградиентных методов решения вариационных неравенств для некоторых задач // Автоматика и телемеханика. — 2012. — №4. — С. 32–46.
18. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Сильно збіжний модифікований варіант методу Корпелевич для задач рівноважного програмування // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — №1(104). — С. 10–23.
19. Апостол Р. Я., Гриненко А. А., Семенов В. В. Ітераційні алгоритми для монотонних дворівневих варіаційних нерівностей // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — №1(107). — С. 3–14.
20. Semenov V. V. Strongly Convergent Algorithms for Variational Inequality Problem Over the Set of Solutions the Equilibrium Problems // In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and its Applications, vol. 211, Springer, Cham, 2014. — P. 131–146.
21. Semenov V. V. Hybrid Splitting Methods for the System of Operator Inclusions with Monotone Operators // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — Vol. 50. — P. 741–749.
22. Semenov V. V. A Strongly Convergent Splitting Method for Systems of Operator Inclusions with Monotone Operators // Journal of Automation and Information Sciences. — 2014. — Vol. 46, №5. — P. 45–56.
23. Попов Л. Д. Модификация метода Эрроу-Гурвица поиска седловых точек // Математические заметки. — 1980. — Т. 28, №5. — С. 777–784.
24. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. An extragradient algorithm for monotone variational inequalities // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — Vol. 50. — P. 271–277.

25. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems // Journal of Global Optimization. — 2015. — Vol. 61. — P. 193–202.
26. Ведель Я. И., Семенов В. В. Новый двухэтапный проксимальный алгоритм для решения задачи о равновесии // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2015. — №1(118). — С. 15–23.
27. Lyashko S. I., Semenov V. V. A New Two-Step Proximal Algorithm of Solving the Problem of Equilibrium Programming // In: Goldengorin, B. (ed.) Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and Its Applications, vol. 115, Springer, Cham, 2016. — P. 315–325.
28. Вартузова М. В., Семенов В. В., Чабак Л. М. Новый алгоритм с расстоянием Брэгмана для решения задачи о равновесии // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2016. — №3(123). — С. 9–21.
29. Semenov V. V. A Version of the Mirror descent Method to Solve Variational Inequalities // Cybernetics and Systems Analysis. — 2017. — Vol. 53. — P. 234–243.
30. Semenov V. V. A variant of mirror descent method for solving variational inequalities // In: Polyakova, L. N. (ed.) 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA) doi: 10.1109/CNSA.2017.7974011
31. Van Hieu D. Convergence analysis of a new algorithm for strongly pseudomontone equilibrium problems // Numer. Algor. — 2017 doi: 10.1007/s11075-017-0350-9
32. Censor Y., Gibali A., Reich S. The Subgradient Extragradient Method for Solving Variational Inequalities in Hilbert Space // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2011. — Vol. 148. — P. 318–335.
33. Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T. A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems // Cybernetics and Systems Analysis. — 2011. — Vol. 47. — P. 631–639.
34. Васин В. В., Еремин И. И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. (Теория и приложения). — Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. — 200 с.

Поступила 15.08.2017