Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2017, №2(125) | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.95
MSC 35K05, 35B45, 45D05, 45K05, 35D30

# GALERKIN-TYPE METHOD FOR ONE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF 4TH ORDER

A. V. Anikushyn, H. M. Granishak

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kiev, Ukraine, E-mail: anik_andrii@ukr.net.

# АНАЛОГ МЕТОДУ ГАЛЬОРКІНА ДЛЯ ОДНОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

А. В. Анікушин, Х. М. Гранішак

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імени Тараса Шевченка, E-mail: anik_andrii@ukr.net.

Abstract. We consider one integro-differential equation of Volterra type of 4th order with respect to spatial variables. We prove a priory estimations in negative norms and further use it for investigation of well-posedness. Moreover, we provide analogue of Galerkin-type method and formulate theorems about its convergence.
Keywords: integro-differential equation, generalized solvability, a priory inequalities, Galerkin-type method.

Резюме. У роботі розглянуто інтегро-диференціальне рівняння типу Вольтерра з похідними 4-го порядку за просторовими змінними. Доведено апріорні оцінки в негативних нормах, на основі яких встановлено коректність узагальненої постановки відповідної початково-крайової задачі. Запропоновано аналог методу Гальоркіна для знаходження узагальнених розв'язків. Наведено теореми, що гарантують його збіжність.
Ключові слова: інтргегро-диференціальне рівняння, узагальнений ров'язок, апріорні оцінки, метод Гальоркіна.

## 1. Вступ

Сучасні дослідження у фізиці, біології, хімії та інших областях науки часто приводять до розгляду інтегро-диференціальних рівнянь. Зокрема, такі рівняння з'являються при математичному моделюванні процесів при наявності „пам'яті" [1, 2, 3]. Наприклад, у монографії [4] розглянуто нові математичні моделі, що зводяться до рівнянь еліптичного типу. Такі моделі виникають при дослідженні електронно-іонних хвиль в холодній „замагніченій" плазмі, низькочастотних електронних магнітно-звукових хвиль, електронних хвиль в холодній плазмі у зовнішньому полі тощо.

Використання більшості підходів для дослідження коректності постановки таких задач вимагає відповідної гладкості правих частин і не передбачає, наприклад, наявності узагальнених функцій. У таких випадках виникає потреба розглядати „узагальнені“ (у деякому сенсі) постановки і „узагальнені“ розв'язки. Багато ідей для реалізації такого підходу було запропоновано Ю. І. Петуніним [6]. У 80-х рр. минулого століття С. І. Ляшко запропонував досліджувати якісні властивості диференціальних рівнянь у частинних похідних, ґрунтуючись на теорії оснащених просторів та методі апріорних оцінок в негативних нормах [7]. Це дозволило доводити теореми існування та єдності узагальнених розв'язків для диференціальних рівнянь [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13].

Методика апріорних оцінок в негативних нормах виявилася корисною і при дослідженні інтегро-диференціальних рівнянь. Зокрема, за допомогою розроблених методів і прийомів рівняння, зазначені в [4], можна не зводити до диференціальних рівнянь в частинних похідних, як це роблять автори, а досліджувати безпосередньо. Саме так у роботі [14] було досліджено інтегро-диференціальні оператори еліптичного типу, що узагальнюють зазначені рівняння. Далі у роботі [15] — оператори параболічного типу, а в роботах [16, 17] — оператори параболічного типу. Рівняння з невід'ємно визначеними інтегральними операторами було розглянуто у [18], а в статті [19] — рівняння специфічного вигляду, ядро якого не є знаковизначеним.

Ми застосуємо ідеї Ю. І. Петуніна і теорію апріорних оцінок в негативних нормах до дослідження існування та єдності узагальнених розв'язків для інтегро-диференціального рівняння 4-го порядку, а також запропонуємо аналог методу Гальоркіна для наближеного знаходження узагальненого розв'язку.

Публікація містить результати досліджень, проведених за грантом Президента України за конкурсним проектом F74/24921 Державного фонду фундаментальних досліджень.

## 2. Основні позначення

Розглянемо циліндричну область $Q = \Omega \times (0, T)$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — обмежена область в $m$-вимірному просторі з гладкою межею $\partial\Omega$, і лінійний оператор

$$\mathcal{L}u = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} - \int_0^t K(t,\tau) \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^4 u(x,\tau)}{\partial x_i^4} d\tau - u(x,t), \tag{1}$$

де $u(x,t)$ — функція, що описує стан системи в області $Q$. Також будемо розглядати спряжений оператор $\mathcal{L}^*$, який визначається так

$$\mathcal{L}^* u = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} - \int_t^T K(\tau,t) \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^4 u(x,\tau)}{\partial x_i^4} d\tau - u(x,t).$$

Нехай $K(t,\tau)$ — інтегроване ядро. Вважатимемо, що воно симетричне та невід'ємно визначене, тобто, виконується нерівність

$$(Bu, u)_{L_2} = \int_\Omega \int_0^T \int_0^t K(t,\tau)\, u(x,t)\, u(x,\tau)\, d\tau dt d\Omega \geq 0, \quad u \in L_2(Q),$$

де через $B$ позначено інтегральний оператор

$$Bu = \int_0^t K\left(t, \tau\right) u\left(x, \tau\right) d\tau.$$

Областю визначення операторів $\mathcal{L}$ та $\mathcal{L}^*$ вважаємо простір нескінченно диференційовних функцій, що задовольняють граничні умови

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

$$u_{x_i}|_{\partial\Omega} = 0, i = 1, 2, ..., m. \tag{3}$$

Цей простір надалі будемо позначати через $C^\infty$.

На просторі $C^\infty$ введемо скалярний добуток

$$(u, v)_{W^+} = \int_Q u(x, t)v(x, t)dQ + \sum_{i=1}^m \int_Q u_{x_i}(x, t)v_{x_i}(x, t)dQ+$$
$$+ \sum_{i=1}^m \int_0^t K(t, \tau)u_{x_ix_i}\left(x, \tau\right) v_{x_ix_i}\left(x, t\right) d\tau \; dQ.$$

**Зауваження 1.** Згідно з теоремою Мерсера невід'ємно визначене симетричне ядро можна представити у вигляді ряду

$$K(t, \tau) = \sum_{k=1}^\infty \phi_k\left(t\right) \phi_k\left(\tau\right).$$

Отже, уведений скалярний добуток можна записати у еквівалентному вигляді

$$\begin{aligned}(u, v)_{W^+} = &\sum_{i=1}^m \int_Q u_{x_i}(x, t)v_{x_i}(x, t)dQ+\\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{n=1}^\infty \int_\Omega \left(\int_0^T \phi_n(t)u_{x_ix_i}(x, t)dt \cdot \int_0^T \phi_n(t)v_{x_ix_i}(x, t)dt\right) d\Omega+\\ &+ \int_Q u(x, t)v(x, t)dQ.\end{aligned}$$

Через $W^+$ позначимо поповнення простору гладких функцій $C^\infty$ за скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_{W^+}$. Неважко показати, що простір $W^+$ вкладається в $L_2(Q)$. Через $W^-$ позначимо негативний простір, побудований за $W^+$ відносно $L_2(Q)$ [20]. Тобто, на $W^-$ введено норму

$$||f||_{W^-} = \sup_{u \in W^+} \frac{(f, u)_{W^- \times W^+}}{||u||_{W^+}},$$

де $(\cdot, \cdot)_{W^- \times W^+}$ — розширення білінійної форми $(\cdot, \cdot)_{L_2}$ з $W^+ \times W^+$ за неперервністю на $W^- \times W^+$.

## 3. Апріорні нерівності

Доведемо деякі нерівності, що є основними в подальших дослідженнях.

**Лема 1.** *Існує така стала* $c_1 > 0$*, що для довільної функції* $u \in C^{\infty}$ *виконується нерівність*

$$c_1 \left\|u\right\|_{W^+} \geq \left\|Lu\right\|_{W^-}.$$

*Доведення.* Для будь-якої гладкої функції $v\left(x,t\right)$ маємо

$$\left|\left(\mathcal{L}u,v\right)_{L_2(Q)}\right| \leq \sum_{i=1}^{m}\left|\int_Q u_{x_ix_i}(x,t)v(x,t)dQ\right| + \left|\int_Q u(x,t)v(x,t)\right| + \\ + \sum_{i=1}^{m}\left|\int_Q\int_0^t K\left(t,\tau\right)\frac{\partial^4 u\left(x,\tau\right)}{\partial x_i^4}v\left(x,t\right)d\tau dQ\right|.$$

Інтегруючи частинами, маємо

$$\left|\left(\mathcal{L}u,v\right)_{L_2(Q)}\right| \leq \sum_{i=1}^{m}\left|\int_Q u_{x_i}(x,t)v_{x_i}(x,t)dQ\right| + \left|\int_Q u(x,t)v(x,t)\right| + \\ + \sum_{i=1}^{m}\left|\int_Q\int_0^t K\left(t,\tau\right)u_{x_ix_i}\left(x,t\right)v_{x_ix_i}\left(x,t\right)d\tau dQ\right|.$$

Застосуємо для першого та другого доданків нерівність Коші-Буняковського

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\int_Q u_{x_i}(x,t)v_{x_i}(x,t)dQ\right| \leq \sum_{i=1}^{m}\left(\int_Q u_{x_i}^2\left(x,t\right)dQ\int_Q v_{x_i}^2\left(x,t\right)dQ\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\int_Q u(x,t)v(x,t)\right| \leq \sqrt{\int_Q |u(x,t)|^2 dQ\int_Q |v(x,t)|^2 dQ}.$$

А для останнього доданку — нерівність Коші-Буняковського для білінійної форми з невід'ємним оператором

$$\left(Bu,v\right)_{L_2(Q)} \leq \left(Bu,u\right)^{\frac{1}{2}}\left(Bv,v\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отримаємо

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\int_Q\int_0^t K\left(t,\tau\right)u_{x_ix_i}\left(x,t\right)v_{x_ix_i}\left(x,t\right)d\tau dQ\right| \leq \\ \leq \sum_{i=1}^{m}\left(\int_Q\int_0^t K\left(t,\tau\right)u_{x_ix_i}\left(x,\tau\right)u_{x_ix_i}\left(x,t\right)d\tau dQ\right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times\left(\int_Q\int_0^t K\left(t,\tau\right)v_{x_ix_i}\left(x,\tau\right)v_{x_ix_i}\left(x,t\right)d\tau dQ\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тоді

$$\left|(\mathcal{L}u,v)_{L_2(Q)}\right| \le \sum_{i=1}^{m}\left(\int_Q u_{x_i}^2(x,t)\,dQ\int_Q v_{x_i}^2(x,t)\,dQ\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left(\int_Q\int_0^t K(t,\tau)\,u_{x_ix_i}(x,\tau)\,u_{x_ix_i}(x,t)\,d\tau dQ\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\int_Q\int_0^t K(t,\tau)\,v_{x_ix_i}(x,\tau)\,v_{x_ix_i}(x,t)\,d\tau dQ\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\sqrt{\int_Q |u(x,t)|^2 dQ\int_Q |v(x,t)|^2 dQ}.$$

Звідки маємо

$$\left|(\mathcal{L}u,v)_{L_2(Q)}\right| \le c_1\,\|u\|_{W^+}\,\|v\|_{W^+}\,.$$

□

Аналогічно можна довести таку лему

**Лема 2.** *Існує така стала $c_1 > 0$, що для довільної функції $u \in C^\infty$ виконується нерівність*

$$c_1\,\|u\|_{W^+} \ge \|\mathcal{L}^*u\|_{W^-}\,.$$

**Зауваження 2.** Доведені нерівності дозволяють продовжити оператори $\mathcal{L}$ та $\mathcal{L}^*$ з множини $C^\infty$ на весь простір $W^+$ за неперервністю. Збережемо за розширенням оператора те саме позначення $\mathcal{L}$. Відзначимо, що нерівності, вказані в лемах 1 і 2, будуть справедливі вже для всіх функцій $u \in W^+$.

**Лема 3.** *Існує така стала $c_0 > 0$, що для довільної функції $u \in W^+$ виконується нерівність*

$$\|\mathcal{L}u\|_{W^-} \ge c_0\,\|u\|_{W^+}\,.$$

*Доведення.* Спочатку припустимо, що $u \in C^\infty$ і нехай $v(x,t) = -u(x,t)$. Тоді

$$(\mathcal{L}u,v)_{L_2(Q)} = \int_Q\sum_{i=1}^{m} u_{x_ix_i}(x,t)\,v(x,t)\,dQ + \int_Q u(x,t)v(x,t)dQ -$$

$$-\int_Q\int_0^t\sum_{i=1}^{m} K(t,\tau)\frac{\partial^4 u(x,\tau)}{\partial x_i^4}d\tau v(x,t)\,dQ =$$

$$= -\int_Q\sum_{i=1}^{m} v_{x_ix_i}(x,t)\,v(x,t)\,dQ +$$

$$+\int_Q\int_0^t\sum_{i=1}^{m} K(t,\tau)\frac{\partial^4 v(x,\tau)}{\partial x_i^4}d\tau v(x,t)\,dQ + \int_Q v^2(x,t)dQ.$$

Інтегруючи частинами декілька разів та використовуючи формулу Гауса-Остроградського, отримуємо

$$(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} = \int_Q \sum_{i=1}^{m} v_{x_i}(x,t)\, v_{x_i}(x,t)\, dQ +$$
$$+ \int_Q \int_0^t \sum_{i=1}^{m} K(t,\tau) v_{x_i x_i}(x,\tau)\, d\tau v_{x_i x_i}(x,t)\, dQ + \int_Q v^2(x,t) dQ.$$

Оскільки ядро $K(t,\tau)$ — невід'ємно визначене, то згідно зауваження 1 можемо записати

$$(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} = \int_Q \sum_{i=1}^{m} v_{x_i}^2(x,t)\, dQ + \int_Q v^2(x,t) dQ +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega \int_0^T \int_0^t \phi_n(\tau) v_{x_i x_i}(x,\tau)\, d\tau \phi_n(t) v_{x_i x_i}(x,t)\, dt.$$

Оцінимо вираз

$$\int_0^T \int_0^t \phi_n(\tau) v_{x_i x_i}(x,\tau)\, d\tau \phi_n(t) v_{x_i x_i}(x,t)\, dt.$$

Нехай $\Phi(t) = \phi_n(t)\, v_{x_i x_i}(x,t)$, тоді внаслідок симетричності підінтегрального виразу отримаємо

$$\int_0^T \int_0^t \Phi(\tau)\,\Phi(t)\, d\tau dt = \int_0^T \int_\tau^T \Phi(\tau)\,\Phi(t)\, dt d\tau =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T \Phi(\tau)\,\Phi(t)\, d\tau dt = \frac{1}{2} \left( \int_0^T \Phi(t)\, dt \right)^2.$$

Отже,

$$(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} = \int_Q \sum_{i=1}^{m} v_{x_i}^2(x,t)\, dQ + \int_Q v^2(x,t) dQ +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega \left( \int_0^T \phi_n(t)\, v_{x_i x_i}(x,t)\, dt \right)^2 d\Omega =$$
$$= \|v\|_{W^+}^2.$$

Тобто,

$$\|\mathcal{L}u\|_{W^-} = \sup_{w \neq 0} \frac{(\mathcal{L}u, w)}{\|w\|_{W^+}} \geq \frac{(\mathcal{L}u, v)}{\|v\|_{W^+}} = \|u\|_{W^+}.$$

Використовуючи граничний перехід, отримаємо, що нерівність, вказана в умові леми, виконується для всіх $u \in W^+$. □

Аналогічно ми можемо довести таке твердження

**Лема 4.** *Існує така стала* $c_0 > 0$, *що для довільної функції* $u \in W^+$ *виконується нерівність*

$$\|\mathcal{L}^* u\|_{W^-} \geq c_0 \|u\|_{W^+}.$$

## 4. Узагальнена розв'язність

Розглянемо задачу

$$\mathcal{L}u = F, \quad F \in W^-. \tag{4}$$

Її розв'язки будемо розуміти в такому сенсі:

**Означення 1.** Розв'язком задачі (4) з правою частиною $F \in W^-$ називаємо функцію $u \in W^+$ для якої існує послідовність функцій $u_i \in C^\infty$ така, що

$$||u - u_i||_{W^+} \to 0, \quad ||\mathcal{L}u_i - F||_{W^-} \to 0, \, i \to \infty.$$

**Означення 2.** Сильним розв'язком задачі (4) з правою частиною $F \in W^-$ називаємо таку функцію $u \in W^+$, що

$$\mathcal{L}u - F = 0$$

у просторі $W^-$.

**Означення 3.** Слабким розв'язком задачі (4) з правою частиною $F \in W^-$ називаємо функцію $u \in W^+$ таку, що рівність

$$(\mathcal{L}u, v)_{W^+} = (F, v)_{W^+}$$

виконується для довільних функцій $v \in W^+$.

Аналогічно визначаються розв'язки спряженої задачі

$$\mathcal{L}^*u = F, \quad F \in W^-. \tag{5}$$

У попередньому пункті для операторів $\mathcal{L}$ та $\mathcal{L}^*$ доведено нерівності

$$\begin{cases} c^{-1}\|u\|_{W^+} \le \|\mathcal{L}u\|_{W^-} \le c\|u\|_{W^+}, \\ c^{-1}\|v\|_{W^+} \le \|\mathcal{L}^*v\|_{W^-} \le c\|v\|_{W^+}. \end{cases} \tag{6}$$

Спираючись на ці оцінки та на результати роботи [7], сформулюємо теореми узагальненої розв'язності.

**Теорема 1.** *Означення 1, 2, 3 еквівалентні.*

**Теорема 2.** *Для довільного елемента $F \in W^-$ існує єдиний розв'язок задачі (4) в сенсі означень 1–3.*

**Теорема 3.** *Нехай $u(x,t)$ — розв'язок задачі (4) з правою частиною $F \in W^-$ в сенсі означень 1, 2, 3. Тоді має місце оцінка*

$$||u||_{W^+} \le c||F||_{W^-},$$

*де стала $c$ не залежить від $F$.*

**Зауваження 3.** Аналогічні теореми можна сформулювати і для спряженої задачі (5).

У наступному пункті запропонуємо аналог методу Гальоркіна для наближеного знаходження узагальненого розв'язку.

## 5. Аналог методу Гальоркіна

Побудуємо чисельний метод розв'язання задачі (4). Спочатку припустимо, що права частина $F \in L_2(Q)$. Будемо шукати наближений розв'язок у вигляді

$$u_n(x,t) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x) w_j(t), \tag{7}$$

де функції $\{g_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ утворюють базис у просторі $L_2(\Omega)$ і належать простору $C^{\infty}$. Функції $\{w_j(t)\}_{j=1}^{n}$ оберемо як розв'язки системи

$$(\mathcal{L}u_n, g_k)_{L_2(\Omega)} = (F, g_k)_{L_2(\Omega)}, \ k = 1, 2, ..., n. \tag{8}$$

Запишемо у явному вигляді ліву частину (8)

$$(\mathcal{L}u_n, g_k)_{L_2(\Omega)} = \left(\mathcal{L}\sum_{i=1}^{n} g_j \omega_j, g_k\right)_{L_2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} (\mathcal{L}g_j \omega_j, g_k)_{L_2(\Omega)}. \tag{9}$$

Після інтегрування частинами система матиме вигляд

$$\sum_{j=1}^{n} \left( a_{kj} w_j(t) - b_{kj} \int_0^t K(t,\tau) w_j(\tau)\, d\tau \right) = \int_\Omega F(x,t) g_k(x)\, d\Omega, k = 1, 2..., n,$$

де

$$a_{kj} = -\int_\Omega \sum_{i=1}^{m} (g_j(x))_{x_i} (g_k(x))_{x_i} dx - \int_\Omega g_j(x) g_k(x) dx = -(g_k, g_j)_{H_0^1(\Omega)},$$

$$b_{kj} = -\int_\Omega \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^4 g_j(x)}{\partial x_i^4} g_k(x) \int_0^t K(t,\tau) d\tau dx.$$

Тут

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x,t) v(x,t) + \sum_{i=1}^{m} u_{x_i}(x,t) v_{x_i}(x,t) d\Omega.$$

**Зауваження 4.** Праві частини системи (8) належать простору $L_2[0,T]$.

*Доведення.* Дійсно, за нерівністю Коші-Буняковського маємо

$$\left( \int_\Omega F(x,t) g_k(x)\, d\Omega \right)^2 \le \int_\Omega F^2(x,t)\, d\Omega \int_\Omega g_k^2(x)\, d\Omega,$$

а тому

$$\int_0^T \left( \int_\Omega F(x,t) g_k(x)\, d\Omega \right)^2 dt \le \int_0^T \int_\Omega F^2(x,t)\, d\Omega \int_\Omega g_k^2(x)\, d\Omega\, dt =$$

$$= \int_\Omega g_k^2(x)\, d\Omega \int_0^T \int_\Omega F^2(x,t)\, d\Omega\, dt = \int_\Omega g_k^2(x)\, d\Omega \int_Q F^2(x,t)\, dQ < \infty.$$

□

**Лема 5.** *Система (8) має розв'язок.*

*Доведення.* Як відомо, визначник Грамма $det\|a_{ij}\| \neq 0$, а тому систему (8) можна розв'язати відносно функцій $w_j(t)$, що не стоять під інтегралом. Тобто, звести до вигляду

$$w_k(t) - \sum_{j=1}^{n} \int_0^t K_{kj}(t,\tau) w_j(\tau)\, d\tau = f_k(t),\ k = 1, 2, ..., n.$$

Згідно [22] така система має єдиний розв'язок. □

**Лема 6.** *Справедлива нерівність*

$$\|u_n\|_{W^+} \leq \|F\|_{L_2(Q)}.$$

*Доведення.* Домножимо рівняння системи (8) на $w_k(t)$ відповідно, додамо всі рівняння і проінтегруємо за змінною $t$ від 0 до $T$. Отримаємо

$$(\mathcal{L}u_n, u_n)_{L_2(Q)} = (F, u_n)_{L_2(Q)}. \tag{10}$$

Далі маємо

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}u_n, u_n) =& ((\Delta - E - \Delta^2 B)u_n, u_n) = \\ =& (\Delta u_n, u_n)_{L_2(Q)} - (u_n, u_n)_{L_2(Q)} - (B\Delta^2 u_n, u_n)_{L_2(Q)}.\end{aligned}$$

Інтегруючи частинами маємо

$$-\sum_{i=1}^{m} ((u_n)_{x_i}, (u_n)_{x_i})_{L_2(Q)} - \|u_n\|_{L_2(Q)} - (B\Delta u_n, u_n)_{L_2(Q)} = -\|u_n\|^2_{W^+}.$$

І нарешті застосуємо нерівність Коші-Буняковського

$$\|u_n\|^2_{W^+} = |(F, u_n)_{L_2(Q)}| \leq \|F\|_{L_2(Q)} \cdot \|u_n\|_{L_2(Q)} \leq \|F\|_{L_2(Q)} \cdot \|u_n\|_{W^+}.$$

Після скорочення в останній нерівності отримаємо твердження леми. □

Наступні твердження доводяться аналогічно подібним результатам робіт [7, 18].

**Теорема 4.** *Якщо права частина $F$ задачі (4) належить простору $L_2(Q)$, то послідовність (7) слабко збігається до розв'язку задачі (4) у просторі $W^+$.*

**Теорема 5.** *Нехай вкладення $W^+ \subseteq L_2(Q)$ компактне. Якщо права частина $F$ задачі (4) належить простору $L_2(Q)$, то послідовність (7) збігається за нормою до розв'язку задачі (4) у просторі $L_2(Q)$.*

**Теорема 6.** *Якщо права частина $F$ задачі (4) належить простору $L_2(Q)$, то послідовність (7) збігається за нормою до розв'язку задачі (4) у просторі $W^+$. При цьому $\|\mathcal{L}u_n - F\|_{W^-} \to 0$.*

Розглянемо тепер випадок, коли права частина є елементом негативного простору $F \in W^-$. Оскільки пристір $L_2(Q)$ щільний в $W^-$, то існує послідовність $F_m \in L_2(Q)$ така, що $\|F_m - F\|_{W^-} \to 0$, $m \to \infty$. Згідно з теоремою (6) для кожного $F_m$ існує послідовність $u_{i,m}$ така, що для кожного $m$ послідовність $u_{i,m}$ збігається до розв'язку задачі $\mathcal{L}u = F_m$, який позначимо через $u^{(m)}$, при $i \to \infty$, і при цьому $\|\mathcal{L}u_{i,m} - F_m\|_{W^-} \to 0$. Позначимо через

$\varepsilon_n > 0$ послідовність дійсних чисел, що прямує до нуля. Тоді для кожного $m$ можна знайти таке $s(m)$, що $\|\mathcal{L}u_{s(m),m} - F_m\|_{W^-} < \varepsilon_m$. Справедлива така теорема

**Теорема 7.** *Якщо права частина $F$ задачі (4) належить простору $W^-$, то для довільного числа $s(m)$ такого, що $\|\mathcal{L}u_{s(m),m} - F_m\|_{W^-} < \varepsilon_m$, яке обов'язково існує, послідовність наближень $u_{s(m),m}$ збігається за нормою до розв'язку задачі (4) у просторі $W^+$.*

## Литература


1. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. — Москва: Наука, 1980. — 384 с.
2. Фалалеев М. В., Орлов С. С. Интегро-дифференциальные уравнения с вырождением в банаховых пространствах и их приложение в математической теории упругости // Известия Иркутского государственного университета. Серия „Математика“ — 2011. — Т. 4, №1. — С. 118–134.
3. Shaw S., Whiteman J. R. Towards adaptive finite element schemes for partial differential Volterra equation solvers // Advances in Computational Mathematics. — №6. — P. 309–323.
4. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. — Москва: Физматлит, 2007. — 734 с.
5. Ляшко С. И., Номировский Д. А., Петунин Ю. И., Семенов В. В. Двадцатая проблема Гильберта. Обобщенные решения операторных уравнений. — М.: Диалектика, 2009. — 185 с.
6. Petunin Yu. I., Klyushin D. A., Lyashko S. I., Nomirovskii D. A., Semenov V. V. Generalized Solutions of Operator Equations and Extreme Elements. — Springer, 2012. — 200 p.
7. Ляшко С. И. Обобщенное управление линейными системами. — К.: Наукова думка, 1998. — 465 с.
8. Anikushyn A., Nomirovskyi D. Generalized solutions for linear operators with weakened a priori inequalities // Ukr. Math. J. — 2011. — 62, №8. — P. 1175–1186.
9. Nomirovskyi D. Generalized solvability of parabolic systems with nonhomogeneous transmission conditions of nonideal contact type // Diff. Eq. — 2004. — 40, №10. — P. 1467–1477.
10. Lyashko S., Nomirovskyi D. Generalized Solutions and Optimal Controls in Systems Describing the Dynamics of a Viscous Stratified Fluid // Diff. Eq. — 2003. — 39, №1. — P. 90–98.
11. Nomirovskyi D. Unique solvability of pseudohyperbolic equations with singular right-hand sides// Math. Notes. — 2006. — 80, №3–4. — P. 550–562.
12. Nomirovskyi D. The control of pseudohyperbolic systems // J. Math. Sc. — 1999. — 97, №2. — P. 3945–3951.
13. Nomirovskyi D. Generalized solvability and optimization of a parabolic system with a discontinuous solution // J. Diff. Eq. — 2007. — 233, №1. — P. 1–21.
14. Анікушин А. В. Узагальнена розв'язність лінійних інтегро-диференціальних рівнянь еліптичного типу // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. — 2010. — №3. — С. 163–168.

15. Анікушин А. В. Узагальнена розв'язність гіперболічних інтегро-диференціальних рівнянь // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. — 2013. — №4. — С. 60–65.
16. Аникушин А. В., Гуляницкий А. Л. Обобщенная разрешимость параболических интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50. — №1. — С. 98–109.
17. Анікушин А. В. Оптимальне керування інтегро-диференціальними системами параболічного типу // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2010. — №3. — С. 3–16.
18. Anikushyn A. Generalized optimal control for systems described by linear integro-differential equations with nonnegative definite integral operators // J. Aut. Inform. Sc. — 2014. — 46, №6. — P. 58–67.
19. Анікушин А. В. Узагальнена розв'язність одного інтегро-диференціального рівняння // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2014. — №1. — С. 89–96.
20. Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функциональный анализ. — К.: Вища школа, 1990. — 600 с.
21. Крейн С. Г. Функциональный анализ (Справочная математическая библиотека). — М.: Наука, 1972. — 544 с.
22. Volterra V. Lecons sur les fonctions de Lignes. — Paris, 1913. — 230 p.

Надійшла 02.12.2016