Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2018, № 1 (127) | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.585, 517.9, 519.6

MSC 34E05, 34L16, 35P20, 47A11, 76M50, 80M40

SPECTRAL ASYMPTOTICS OF MATHIEU EQUATION WITH RAPIDLY OSCILLATION POTENTIAL

G. V. Sandrakov

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko Kiev National University, Kiev, Ukraine, E-mail: gsandrako@gmail.com

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Г. В. Сандраков

Факультет компьютерных наук и кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина, E-mail: gsandrako@gmail.com

Abstract. Spectral problems for Mathieu equation with rapidly oscillation potential and periodic boundary value conditions on a finite interval are considered. Asymptotic expansions for eigenvalues and eigenfunctions of the problem are constructed. Statement on the asymptotic accuracy estimates between the constructed asymptotic expansions and an exact solution, which are depending on the eigenvalue number for initial numbers, is stated.
Keywords: homogenization, Mathieu equation, asymptotic expansion, eigenvalue, eigenfunction.

Аннотация. Рассматриваются спектральные задачи для уравнения Матье с быстро осциллирующим потенциалом и периодическими граничными условиями на конечном интервале. Построены асимптотические разложения собственных значений и функций такой задачи. Сформулировано утверждение об оценках асимптотической близости построенных асимптотических разложений и точных решений исходной задачи, зависящие от номера соответствующего собственного значения для начальных номеров.
Ключевые слова: осреднение, уравнение Матье, асимптотическое разложение, собственное значение, собственная функция.

1. Введение

Проблемы исследования и разработки методов вычислений спектров и собственных функций задач для дифференциальных уравнений с краевыми условиями, характеризующих квантовые эффекты в решетках, кристаллах и наноструктурах, возникают прежде всего при конструировании наноструктур с заданными свойствами, которые принято называть фотонными кристаллами [1, 2]. Простейшими фотонными кристаллами являются наноструктуры, составленные из большого количества тонких слоев материалов с различными проводящими свойствами, которые используются для поляризации и оптимальной дифракции фотонных, магнитных и электрических полей. Используются и более сложные фотонные кристаллы, имеющие периодическую структуру и составленные из очень большого количества образующих заданной формы. Подробная библиография о конструировании и использовании таких наноструктур и нанокристаллов, содержащая тысячи наименований, приведена, например, в работах [1, 2].

В данной работе будут представлены асимптотические методы, актуальные прежде всего для фотонных кристаллов, имеющих слоистую наноструктуру. Такие методы рассматриваются как начальный шаг к исследованию общих наноструктур. Таким образом, будут рассмотрены спектральные задачи для фотонных кристаллов, имеющих слоистую структуру с большим количеством очень тонких периодически чередующихся слоев. Такие задачи возникают и исследуются достаточно давно, например, в физике твердого тела [3, 4]. Так, спектральная задача для оператора Штурма-Лиувилля на всей прямой с периодическим кусочно-постоянным потенциалом называется задачей Кронига-Пенни и является одной из основных упрощенных моделей в физике твердого тела [4]. Спектральные задачи для общих операторов Штурма-Лиувилля также изучаются давно [5–7]. Такие задачи с периодическим потенциалом обычно изучаются на всей прямой [6, 7]. Современный обзор методов изучения таких и более общих задач с периодическими потенциалами и коэффициентами приведен в работе [8].

Задачи об асимптотическом разложении собственных значений и функций для уравнения второго порядка с малым периодическим потенциалом, рассматриваемые на расширяющемся интервале, впервые были поставлены и изучены в [6]. Задачи, рассматриваемые на интервале, который асимптотически расширяется, сложнее чем задачи на всей прямой, поскольку содержат зависимость от некоторого большого параметра N. После осуществления перехода к пределу при $N \to \infty$ такие задачи заменяются, в некотором смысле, задачами на всей прямой.

Однако, совершенно не изучена корректность такой замены. Точнее, практически не исследована корректность и точность этой замены решений задачи на расширяющемся интервале решениями задачи на всей прямой. Первые шаги в этом направлении будут приведены здесь для уравнения Матье, поскольку спектральные задачи на расширяющемся интервале могут быть сведены к задачам с быстро осциллирующим потенциалом на конечном интервале. Более того, такие задачи эквивалентны и для фиксированного N имеют дискретный спектр, зависимость которого от N является достаточно сложной. Исследованию такой зависимости для начальных собственных значений и функций в спектральной задаче для уравнения Матье с быстро осциллирующим потенциалом и посвящена данная работа.

При исследовании спектральной задачи для уравнения Матье второго порядка с быстро осциллирующим потенциалом и периодическими граничными условиями здесь используются асимптотические методы разложений и теория осреднения. Вопросы осреднения спектральных задач изучались во многих работах [9, 10], где можно найти и более обширную библиографию по таким исследованиям. Следует отметить, что в этих работах изучались задачи с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами, но с нулевым потенциалом. Здесь будут использованы асимптотические методы работы [11], применимые к уравнениям с произвольными быстро осциллирующими потенциалами и коэффициентами.

Спектральная задача для уравнения Матье с периодическим быстро осциллирующим потенциалом на отрезке $[0, 2\pi]$ будет поставлена в следующем параграфе, где определены классические собственные числа и функции уравнения Матье [5], используемые в дальнейших построениях. В третьем параграфе методами работы [11] строится асимптотика решений и осредненные уравнения для рассматриваемой задачи. Частично такие построения были выполнены совместно с М. И. Базилевой и представлены в работе [12], где доказано и утверждение об оценках асимптотической близости для собственных значений с не очень большими номерами.

2. Постановка задачи

Будет рассматриваться следующая спектральная задача для уравнения Матье второго порядка с быстро осциллирующим потенциалом и периодическими граничными условиями на отрезке $[0, 2\pi]$: найти такие собственное действительноее значение λ_ε и ненулевую собственную функцию u_ε, что

$$\begin{gathered} -\varepsilon^2 (u_\varepsilon)'' + 2q\, u_\varepsilon \cos\left(\frac{2x}{\varepsilon}\right) = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon \quad \text{для} \quad x \in (0, 2\pi), \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(2\pi), \quad u'_\varepsilon(0) = u'_\varepsilon(2\pi), \end{gathered} \tag{1}$$

где $\varepsilon = (N)^{-1}$ с некоторым положительным целым N. Основной целью работы является исследование собственных значений и функций этой задачи при достаточно больших N и, соответственно, при достаточно малых ε. Уравнение задачи (1) зависит от фиксированного действительного параметра q и записано в форме, принятой в теории функций Матье, определяемых рассматриваемой задачей при $\varepsilon = 1$ в соответствии с [5, 13].

Уравнение задачи (1) можно разделить на ε^2 и рассматривать, таким образом, спектральную задачу для одномерного уравнения Шредингера с очень большим осциллирующим потенциалом (при достаточно малых ε) на конечном интервале. Такая задача является основной составляющей при исследовании прохождения, отражения и рассеяния волн на тонких кристаллических пленках, для которых N обозначает число атомов, составляющих кристалл, рассматриваемый как одномерная структура.

Для фиксированного ε известно [4], что существуют счетные множества собственных значений $\lambda_\varepsilon^0, \lambda_\varepsilon^1, \ldots, \lambda_\varepsilon^n, \ldots$ и ортонормированных собственных функций $u_\varepsilon^0, u_\varepsilon^1, \dots, u_\varepsilon^n, \dots$, являющихся решениями задачи (1), для которых с учетом возможной кратности выполняются неравенства

$$\lambda_\varepsilon^0 \le \lambda_\varepsilon^1 \le \dots \le \lambda_\varepsilon^n \le \dots \qquad \text{и} \qquad \lambda_\varepsilon^n \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Под кратностью здесь понимается возможное совпадение собственных чисел $\lambda_\varepsilon^n, \lambda_\varepsilon^{n+1}, \dots$ для различающихся собственных функций $u_\varepsilon^n, u_\varepsilon^{n+1}, \dots$. Таким образом, учет кратности означает нумерацию собственных чисел в соответствии с нумерацией различающихся собственных функций.

Для построения асимптотических разложений собственных значений и функций задачи (1) рассмотрим следующую спектральную задачу

$$\begin{gathered} -u'' + 2q\,u\cos(2x) = \lambda\,u \quad \text{для} \quad x \in (0, 2\pi), \\ u(0) = u(2\pi), \quad u'(0) = u'(2\pi), \end{gathered} \tag{2}$$

совпадающую с задачей (1) при $\varepsilon = 1$. Для фиксированного $q \ne 0$ известно [5,13], что существуют счетные множества однократных собственных значений $\Lambda = \{\lambda_1^n\}_{n=0}^\infty$ и ортонормированных функций $u_1^0, u_1^1, \dots, u_1^n, \dots$, являющихся решениями задачи (2), для которых выполняются неравенства

$$\lambda_1^0 < \lambda_1^1 < \dots < \lambda_1^n < \dots \qquad \text{и} \qquad \lambda_1^n \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Собственные функции задачи (2), нормированные соответствующим образом, принято называть специальными *функциями Матье.*

Исследованию функций Матье посвящены главы в справочниках по специальным функциям и целые книги, где приняты специальные обозначения [5, 13]. В соответствии с этими обозначениями множество собственных значений задачи (2) разбивается на два множества $\Lambda = \{a_n\}_{n=0}^\infty \bigcup \{b_n\}_{n=1}^\infty$, а собственные функции при $m = 0, 1, \dots$ на четыре класса

$$\begin{aligned} u_1^n &= \sqrt{2}\, ce_{2m}(x) \quad \text{для} \quad a_{2m} \in \{a_n\}_{n=0}^\infty \quad \text{и} \quad n = 2m, \\ u_1^n &= \sqrt{2}\, ce_{2m+1}(x) \quad \text{для} \quad a_{2m+1} \in \{a_n\}_{n=0}^\infty \quad \text{и} \quad n = 2m+1, \\ u_1^n &= \sqrt{2}\, se_{2m+1}(x) \quad \text{для} \quad b_{2m+1} \in \{b_n\}_{n=1}^\infty \quad \text{и} \quad n = 2m+1, \\ u_1^n &= \sqrt{2}\, se_{2m+2}(x) \quad \text{для} \quad b_{2m+2} \in \{b_n\}_{n=1}^\infty \quad \text{и} \quad n = 2m+2, \end{aligned} \tag{3}$$

где корень появляется из условия ортонормирования $(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}(u_1^n)^2\,dx = 1$ и традиционно принятых [5, 13] следующих условий нормирования

$$ce_n(0) > 0, \qquad \int_0^{2\pi} ce_n(x)^2\,dx = \pi,$$

$$se'_{n+1}(0) > 0, \qquad \int_0^{2\pi} se_{n+1}(x)^2\,dx = \pi$$

для функций Матье с подходящими номерами. При этом известно [13], что $ce_n(0) \ne 0$ и $se'_{n+1}(0) \ne 0$ для каждого фиксированного q, от которого зависят $a_n, ce_n(x)$ и $b_{n+1}, se_{n+1}(x)$ в соответствии с уравнением из (2). Кроме того, собственные функции $ce_n(x)$ и $se_{n+1}(x)$ с различными собственными значениями a_n и b_{n+1} являются взаимно ортогональными для $n = 0, 1, \dots$.

Известно также [5, 13], что собственные значения a_n и b_{n+1} действительны и различны при $n = 0, 1, \ldots$ и удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < b_3 < a_3 < \ldots \qquad &\text{для} \quad q > 0, \\ a_0 < a_1 < b_1 < b_2 < a_2 < a_3 < b_3 < b_4 < \ldots \qquad &\text{для} \quad q < 0, \end{aligned} \tag{4}$$

а значение a_0 всегда отрицательно для $q \neq 0$ и $a_0 = 0$ для $q = 0$.

При $n = 0, 1, \ldots$ функции Матье $ce_n(x)$ на отрезке $[0, \pi]$ удовлетворяют также следующим однородным граничным условиям Неймана

$$ce_n'(0) = ce_n'(\pi) = 0, \tag{5}$$

а функции $se_{n+1}(x)$ удовлетворяют граничным условиям Дирихле

$$se_{n+1}(0) = se_{n+1}(\pi) = 0. \tag{6}$$

По определению при $n = 0, 1, \ldots$ функции Матье $ce_n(x)$ и $se_{n+1}(x)$ являются 2π периодическими и поэтому могут быть продолжены на всю прямую. Такие продолжения также обозначаются через $ce_n(x)$ и $se_{n+1}(x)$. При $n = 0, 1, \ldots$ функции $ce_n(x)$ являются четными, а функции $se_{n+1}(x)$ нечетными относительно начала координат [5, 13].

Кроме того, при $m = 0, 1, \ldots$ функции $ce_{2m}(x)$ и $se_{2m+2}(x)$ имеют период π, а функции $ce_{2m+1}(x)$ и $se_{2m+1}(x)$ являются апериодическими на отрезке $[0, \pi]$, удовлетворяя, например, граничным условиям

$$ce_{2m+1}(0) = -\, ce_{2m+1}(\pi), \quad ce_{2m+1}'(0) = -\, ce_{2m+1}'(\pi).$$

При $m = 0, 1, \ldots$ непосредственно проверяется, что функции

$$\begin{aligned} u_{1\varepsilon}^n = \sqrt{2}\, ce_{2m}(x/\varepsilon), \quad u_{1\varepsilon}^n = \sqrt{2}\, ce_{2m+1}(x/\varepsilon), \\ u_{1\varepsilon}^n = \sqrt{2}\, se_{2m+1}(x/\varepsilon), \quad u_{1\varepsilon}^n = \sqrt{2}\, se_{2m+2}(x/\varepsilon) \end{aligned} \tag{7}$$

являются собственными функциями задачи (1) с собственными значениями a_{2m}, a_{2m+1}, b_{2m+1}, b_{2m+2} соответственно, где учтено, например, равенство

$$(2\pi)^{-1}\int\limits_0^{2\pi} (u_{1\varepsilon}^n)^2\, dx = (\pi)^{-1}\int\limits_0^{2\pi} (ce_{2m}(x/\varepsilon))^2\, dx = (\pi N)^{-1}\int\limits_0^{2\pi N} (ce_{2m}(y))^2\, dy = 1,$$

гарантирующее ортонормированность определенных в (7) функций.

Однако функции (7) не исчерпывают всех собственных функций задачи (1). Далее будут построены приближенные собственные функции задачи (1), порождающие дополнительные собственные функции задачи (1), ответвляющиеся от функций (7) и отличные от этих функций. Для таких построений понадобятся дополнительные обозначения и определения.

Уравнение задачи (2) имеет второй порядок и всегда можно определить два базисных решения $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ этого уравнения. Такие решения называются *фундаментальными*, если выполнены следующие условия

$$\phi_2(0) = \phi_1'(0) = 0, \qquad \phi_2'(0) = \phi_1(0) = 1. \tag{8}$$

2.1. C-решения. Для $\lambda = a_n$ в уравнении задачи (2) при $n = 0, 1, \ldots$ в качестве первого фундаментального решения, учитывая (5), определим

$$\phi_1(x) = \phi_{1n}^c(x) = ce_n(x)(ce_n(0))^{-1}.$$

В таком случае, следуя [5], можно найти такую однозначно определенную периодическую функцию $f_n^c(x)$ на отрезке $[0,2\pi]$, что $f_n^c(0)=f_n^c(2\pi)=0$ и

$$\phi_2(x)=\phi_{2n}^c(x)=\alpha_n\, x\, \phi_{1n}^c(x)+\alpha_n\, f_n^c(x), \tag{9}$$

где $n=0,1,\dots$ и постоянная α_n выбирается из условия выполнения равенств (8), из которых следует, что $\alpha_n=(1+f_n^{c\prime}(0))^{-1}$.

Собственное значение $\lambda=a_n$ для задачи (2) при $n=0,1,\dots$ является однократным и функция $\phi_{2n}^c(x)$ не может быть периодической с периодом 2π для $q\neq 0$ (как отмечено в [5]). Для каждого фиксированного и ненулевого q из равенств (8) и (9) следует, что

$$\phi_{2n}^c(2\pi)=\alpha_n\, 2\pi$$

и поэтому $\alpha_n\neq 0$ при $n=0,1,\dots$. Для фундаментального решения ϕ_{2n}^c традиционно [5] используется также представление

$$\phi_2(x)=\phi_{2n}^c(x)=C_n\, x\, ce_n(x)+f_n(x),$$

где постоянная $C_n=\alpha_n\,(ce_n(0))^{-1}$ и периодическая функция $f_n=\alpha_n f_n^c(x)$ однозначно определены условиями (8) и представлением (9).

Для малых и ненулевых q известно, что постоянная C_n при $n=0,1,\dots$ кратна q^n в соответствии с [5]. Поэтому постоянная α_n при $n=0,1,\dots$ из представления (9) всегда положительна для четных n и имеет знак q для нечетных n и ненулевых q в силу теоремы о непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров.

2.2. ***S*-решения.** Для $\lambda=b_n$ в уравнении задачи (2) при $n=1,2,\dots$ в качестве второго фундаментального решения, учитывая (6), определим

$$\phi_2(x)=\phi_{2n}^s(x)=se_n(x)(se_n'(0))^{-1}.$$

В случае такого выбора, следуя [5], можно найти такую периодическую функцию $g_n^s(x)$ на отрезке $[0,2\pi]$, что $g_n^{s\prime}(0)=g_n^{s\prime}(2\pi)=0$ и

$$\phi_1(x)=\phi_{1n}^s(x)=\beta_n\, x\, \phi_{2n}^s(x)+\beta_n\, g_n^s(x), \tag{10}$$

где $n=1,2,\dots$ и постоянная β_n выбирается из условия выполнения равенств (8), из которых следует, что $\beta_n=g_n^s(0)^{-1}$.

Собственное значение $\lambda=b_n$ для задачи (2) при $n=1,2,\dots$ является однократным и функция $\phi_{1n}^s(x)$ не может быть периодической с периодом 2π для $q\neq 0$ (как отмечено в [5]). Для каждого фиксированного и ненулевого q из равенств (8) и (9) следует, что

$$\phi_{1n}^{s\prime}(2\pi)=\beta_n\, 2\pi$$

и поэтому $\beta_n\neq 0$ при $n=1,2,\dots$. Для фундаментального решения ϕ_{1n}^s традиционно используется также представление

$$\phi_1(x)=\phi_{1n}^s(x)=S_n\, x\, se_n(x)+g_n(x),$$

где постоянная S_n при $n=1,2,\dots$ кратна q^n для малых и ненулевых q в соответствии с [5]. Таким образом, постоянная β_n при $n=1,2,\dots$ из представления (10) всегда положительна для четных n и имеет знак q для нечетных n и ненулевых q при выборе $\lambda=b_n$ в уравнении задачи (2).

3. Асимптотические разложения спектральной задачи

Следуя общим принципам работы [11], разложение собственных функций u_ε задачи (1) будем определять в виде асимптотической суммы

$$u_\varepsilon^a(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{11}$$

начальные слагаемые которой представимы в виде функций

$$u_0(x,y) = v_0(x)\, N_0(y), \quad u_1(x,y) = v_1(x)\, N_1(y), \quad u_2(x,y) = v_2(x)\, N_2(y)$$

двух переменных $(x,y) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$, рассматриваемых при $y = \frac{x}{\varepsilon}$ и имеющих разделенные переменные. Неизвестные периодические функции $v_0(x), v_1(x), v_2(x)$ и $N_0(y), N_1(y), N_2(y)$ с периодом 2π будут найдены из условия приближенного выполнения условий задачи (1) при малых ε.

Разложение собственных значений λ_ε задачи (1) представим в виде

$$\lambda_\varepsilon^a = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 \tag{12}$$

с неизвестными числами $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, определяемыми в процессе построений.

Используя формулу дифференцирования сложной функции, получаем

$$\begin{aligned}(u_\varepsilon^a(x))'' = \big(u''_{0xx}(x,y) &+ \varepsilon^{-1} 2\, u''_{0xy}(x,y) + \varepsilon^{-2} u''_{0yy}(x,y) + \\ &+ \varepsilon\, u''_{1xx}(x,y) + 2\, u''_{1xy}(x,y) + \varepsilon^{-1}\, u''_{1yy}(x,y) + \\ &+ \varepsilon^2 u''_{2xx}(x,y) + 2\,\varepsilon\, u''_{2xy}(x,y) + u''_{2yy}(x,y)\big)\Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}.\end{aligned} \tag{13}$$

Поэтому, используя разложения (11), (12) вместо решений в (1), имеем

$$\begin{gathered}L^y N_0(y)v_0 + \varepsilon L^y N_1(y)v_1 + \varepsilon^2 L^y N_2(y)v_2 - \lambda_0 N_0(y)v_0 - \lambda_0\varepsilon N_1(y)v_1 - \\ -\lambda_0\varepsilon^2 N_2(y)v_2 - \lambda_1\varepsilon N_0(y)v_0 - \lambda_1\varepsilon^2 N_1(y)v_1 - \lambda_1\varepsilon^3 N_2(y)v_2 - \lambda_2\varepsilon^2 N_0(y)v_0 - \\ -\lambda_2\varepsilon^3 N_1(y)v_1 - \lambda_2\varepsilon^4 N_2(y)v_2 - 2\varepsilon N_0'(y)v_0'(x) - 2\varepsilon^2 N_1'(y)v_1'(x) - 2\varepsilon^3 N_2'(y)v_2'(x) - \\ -\varepsilon^2 N_0(y)v_0''(x) - \varepsilon^3 N_1(y)v_1''(x) - \varepsilon^4 N_2(y)v_2''(x) = 0 \quad \text{при} \quad y = \frac{x}{\varepsilon},\end{gathered}$$

где, например, введено обозначение

$$L^y N_0(y) = -(N_0(y))'' + 2q\cos(2y)N_0(y).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε в полученном соотношении для определения неизвестных функций и чисел из (11) и (12). При $\varepsilon^0, \varepsilon^1$ и ε^2 соответственно получаем следующие уравнения

$$L^y N_0(y)v_0(x) - \lambda_0 N_0(y)v_0(x) = 0, \tag{14}$$

$$(L^y N_1(y) - \lambda_0 N_1(y))\, v_1(x) = 2N_0'(y)v_0'(x) + \lambda_1 N_0(y)v_0(x), \tag{15}$$

$$(L^y N_2(y) - \lambda_0 N_2(y))\, v_2 = 2N_1'(y)v_1' + N_0(y)v_0'' + \lambda_1 N_1(y)v_1 + \lambda_2 N_0(y)v_0. \tag{16}$$

3.1. C-асимптотика. При $\lambda_0 = a_n$ для $n = 0, 1, \ldots$ и произвольном $v_0(x)$ соотношение (14) будет выполнено, если определить

$$N_0(y) = N_{0n}^c(y) = \sqrt{2}\, ce_n(y) = \sigma_n\, \phi_{1n}^c(y), \tag{17}$$

где $\sigma_n = \sqrt{2}\, ce_n(0)$ выбрано из условия нормировки $(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}(N_{0n}^c)^2 dy = 1$.

Фиксируем далее выбор $\lambda_0 = a_n$ для $n = 0, 1, \ldots$ и рассмотрим соотношение (15) как уравнение относительно $N_1(y)$ для каждого $x \in [0, 2\pi]$. Известно [4] и непосредственно проверяется, что такое уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда правая часть ортогональна $N^c_{0n}(y)$. Последнее условие записывается в виде

$$v_0'\,(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} 2(N^c_{0n})'(N^c_{0n})\,dy = -\lambda_1 v_0\,(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}(N^c_{0n})^2\,dy.$$

Интегрируя по частям периодические функции, для левой части имеем

$$\int_0^{2\pi}(N^c_{0n})'(N^c_{0n})\,dy = -\int_0^{2\pi}(N^c_{0n})(N^c_{0n})'\,dy,$$

поэтому этот интеграл равен нулю. Таким образом, уравнение (15) может быть разрешимым для произвольного v_0 только если $\lambda_1 = 0$.

Естественно выбрать $v_1(x) = v_0'(x)$ в уравнении (15). В таком случае это соотношение выполняется для $n = 0, 1, \dots$, если определить $N_1(y) = N^c_{1n}(y)$ как 2π-периодическое решение уравнения

$$L^y N^c_{1n}(y) - a_n N^c_{1n}(y) = 2\,(N^c_{0n}(y))'. \tag{18}$$

Это уравнение разрешимо в силу последнего равенства для интегралов и можно попытаться найти решение этого уравнения методом вариации постоянных. Однако, известно [5] и непосредственно проверяется, что периодическая функция $f^c_n(y) = \alpha_n^{-1}\phi^c_{2n}(y) - y\,\phi^c_{1n}(y)$ для $n = 0, 1, \dots$, заданная равенством (9), является частным решением уравнения

$$L^y f^c_n(y) - a_n f^c_n(y) = 2\,(\phi^c_{1n}(y))'.$$

Сравнивая это уравнение с предыдущим и учитывая (17), заключаем, что общее 2π-периодическое решение уравнения (18) определяется равенством

$$N_1(y) = N^c_{1n}(y) = \sigma_n\left(\alpha_n^{-1}\phi^c_{2n}(y) - y\,\phi^c_{1n}(y)\right) + \gamma_n N^c_{0n}(y), \tag{19}$$

где $\sigma_n = \sqrt{2}\,ce_n(0)$ и постоянная γ_n выбирается из условия ортогональности $(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} N^c_{1n}(y)N^c_{0n}(y)\,dy = 0$, которое будет использовано в дальнейшем.

Рассмотрим соотношение (16) как уравнение относительно $N_2(y)$. Это уравнение имеет решение, если правая часть ортогональна $N^c_{0n}(y)$. Последнее условие ортогональности для $n = 0, 1, \dots$ можно записать в виде

$$\lambda_2 v_0 + \left(2\,(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}(N^c_{1n}(y))'\,N^c_{0n}(y)\,dy\right)v_0'' + v_0'' = 0, \tag{20}$$

поскольку $v_1(x) = v_0'(x)$ и $(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}(N^c_{0n}(y))^2 dy = 1$. Введем обозначение

$$I_n = \pi^{-1}\int_0^{2\pi}(N^c_{1n}(y))'\,N^c_{0n}(y)\,dy = -\pi^{-1}\int_0^{2\pi} N^c_{1n}(y)\,(N^c_{0n}(y))'\,dy =$$

$$= -\sigma_n^2\,\alpha_n^{-1}\,\pi^{-1}\left(\int_0^{2\pi}\phi^c_{2n}(y)\,(\phi^c_{1n}(y))'\,dy - \alpha_n\int_0^{2\pi} y\,\phi^c_{1n}(y)\,(\phi^c_{1n}(y))'\,dy\right),$$

где использовано (17), (19) и интегрирование по частям для $n = 0, 1, \dots$.

Для фундаментальных решений выполнено [5] тождество Вронского

$$\phi_1(y)\phi_2'(y) - \phi_1'(y)\phi_2(y) = 1$$

и правило Лейбница $(\phi_2\phi_1)' = \phi_1'\phi_2 + \phi_1\phi_2'$. Таким образом, получаем $2\,\phi_2(y)\phi_1'(y) = (\phi_2(y)\phi_1(y))' - 1$ и, учитывая (8), для $n = 0, 1, \ldots$ имеем

$$I_n = \sigma_n^2\,\alpha_n^{-1}\,(2\pi)^{-1}\left(\int_0^{2\pi}\left(1 - (\phi_{2n}^c\phi_{1n}^c)'\right)\,dy + \alpha_n\int_0^{2\pi} y\,\left((\phi_{1n}^c)^2\right)'\,dy\right) =$$

$$= \sigma_n^2\,\alpha_n^{-1}(2\pi)^{-1}\left((y - \phi_{2n}^c(y)\phi_{1n}^c(y))\,\Big|_0^{2\pi} + \alpha_n\,y\,(\phi_{1n}^c(y))^2\,\Big|_0^{2\pi} - \alpha_n\int_0^{2\pi}(\phi_{1n}^c)^2dy\right) =$$

$$= \sigma_n^2\,\alpha_n^{-1}\left((1-\alpha_n) + \alpha_n - \alpha_n\,\sigma_n^{-2}\right) = \sigma_n^2\,\alpha_n^{-1} - 1.$$

Следовательно, для каждого фиксированного n соотношение (20) является спектральной задачей для определения λ_2 и 2π-периодического $v_0(x)$:

$$-\left(\sigma_n^2\,\alpha_n^{-1}\right)v_0''(x) = \lambda_2\,v_0(x) \quad \text{для} \quad x \in (0, 2\pi). \tag{21}$$

Известно и непосредственно проверяется, что функция e^{ikx} для целого ненулевого k определяет собственную 2π-периодическую функцию задачи (21) с собственным двукратным значением $k^2\left(\sigma_n^2\,\alpha_n^{-1}\right)$ для каждого фиксированного n. Удобно перенумеровать такие собственные функции и значения (с учетом кратности) следующим образом

$$v_0^1 = e^{ix},\ v_0^2 = e^{-ix},\ v_0^3 = e^{i2x},\ v_0^4 = e^{-i2x},\ v_0^5 = e^{i3x},\ v_0^6 = e^{-i3x}, \ldots,$$

$$\lambda_{2n}^{1c} = \rho_n,\ \lambda_{2n}^{2c} = \rho_n,\ \lambda_{2n}^{3c} = 2^2\rho_n,\ \lambda_{2n}^{4c} = 2^2\rho_n,\ \lambda_{2n}^{5c} = 3^2\rho_n,\ \lambda_{2n}^{6c} = 3^2\rho_n, \ldots,$$

где введено обозначение $\rho_n = \sigma_n^2\,\alpha_n^{-1}$ для каждого фиксированного n.

Таким образом, для каждого фиксированного $n = 0, 1, \ldots$ заданы

$$\begin{aligned} v_0^l = e^{ikx}, &\qquad \lambda_{2n}^{lc} = ((l+1)/2)^2\left(\sigma_n^2\,\alpha_n^{-1}\right) \qquad \text{для} \quad l = 2k-1, \\ v_0^l = e^{-ikx}, &\quad \lambda_{2n}^{lc} = (l/2)^2\left(\sigma_n^2\,\alpha_n^{-1}\right) \quad \text{для} \quad l = 2k \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{22}$$

как собственные функции и числа для осредненного уравнения (21) с периодическими граничными условиями. Решения этой задачи можно также представить в виде линейных комбинаций $\cos(kx)$ и $\sin(kx)$ для $k = 1, 2, \ldots,$ если интересоваться только действительнозначными решениями.

Определим $v_2 = v_0''(x)$, зафиксируем некоторые l и v_0^l и учтем осредненное уравнение (21) в (16). Тогда соотношение (16) будет выполнено, если определить $N_2(y) = N_{2n}^c(y)$ как периодическое решение уравнения

$$L^y N_{2n}^c(y) - a_n N_{2n}^c(y) = 2(N_{1n}^c(y))' + \left(1 - \sigma_n^2\,\alpha_n^{-1}\right)N_{0n}^c(y),$$

которое разрешимо в силу приведенных выше вычислений, и можно найти такое решение этого уравнения, что $(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} N_{2n}^c(y)N_{0n}^c(y)\,dy = 0$.

Таким образом, для целых неотрицательных l и n определены приближенные решения задачи (1), которые можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \lambda_{ac}^{ln} &= a_n + \varepsilon^2\lambda_{2n}^{lc}, \\ u_{ac}^{ln} &= N_{0n}^c\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v_0^l(x) + \varepsilon N_{1n}^c\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(v_0^l(x)\right)' + \varepsilon^2 N_{2n}^c\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(v_0^l(x)\right)''. \end{aligned} \tag{23}$$

Отметим, что эти приближенные решения согласованы и при $l = 0$, поскольку в этом случае $v_0^0 = 1$ и $\lambda_2^0 = 0$ являются решением задачи (21), и равенства (23) задают точные решения задачи (1) в соответствии с (7).

3.2. S-асимптотика. При $\lambda_0 = b_n$ для $n = 1, 2, \ldots$ и произвольном $v_0(x)$ соотношение (14) также будет выполнено, если определить

$$N_0(y) = N^s_{0n}(y) = \sqrt{2}\, se_n(y) = \kappa_n\, \phi^s_{2n}(y), \tag{24}$$

где $\kappa_n = \sqrt{2}\, se'_n(0)$ выбрано из условия нормировки $(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}(N^s_{0n})^2 dy = 1$.

Фиксируем далее выбор $\lambda_0 = b_n$ для $n = 1, 2, \ldots$ и рассмотрим соотношение (15) как уравнение относительно $N_1(y)$ для каждого $x \in [0, 2\pi]$. Как и в п. 3.1 проверяется, что это уравнение может быть разрешимым для произвольного v_0 только если $\lambda_1 = 0$. Далее, выбирая $v_1(x) = v'_0(x)$, заключаем, что соотношение (15) будет выполнено для $n = 1, 2, \ldots$, если определить $N_1(y) = N^s_{1n}(y)$ как 2π-периодическое решение уравнения

$$L^y N^s_{1n}(y) - b_n N^s_{1n}(y) = 2\,(N^s_{0n}(y))'. \tag{25}$$

Это уравнение разрешимо, что проверяется как и для уравнения (18), и общее 2π-периодическое решение уравнения (25) определяется равенством

$$N_1(y) = N^s_{1n}(y) = \kappa_n \left(\beta_n^{-1}\phi^s_{1n}(y) - y\,\phi^s_{2n}(y)\right) + \varkappa_n\, N^s_{0n}(y), \tag{26}$$

где $\kappa_n = \sqrt{2}\, se'_n(0)$ и постоянная $\varkappa_n$ выбирается из условия ортогональности $(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} N^s_{1n}(y) N^s_{0n}(y)\, dy = 0$, используемого в дальнейшем. В сравнении с (19) здесь важно, что индексы 1 и 2 поменялись местами.

Таким образом, рассматривая соотношение (16) как уравнение относительно $N_2(y)$, получаем для $n = 1, 2, \ldots$ следующее условие разрешимости

$$\lambda_2 v_0 + J_n v''_0 + v''_0 = 0, \tag{27}$$

где

$$J_n = \pi^{-1}\int_0^{2\pi} (N^s_{1n}(y))'\, N^s_{0n}(y)\, dy = -\pi^{-1}\int_0^{2\pi} N^s_{1n}(y)\, (N^s_{0n}(y))'\, dy =$$

$$= -\kappa_n^2\, \beta_n^{-1}\, \pi^{-1}\left(\int_0^{2\pi} \phi^s_{1n}(y)\, (\phi^s_{2n}(y))'\, dy - \beta_n \int_0^{2\pi} y\, \phi^s_{2n}(y)\, (\phi^s_{2n}(y))'\, dy\right).$$

Здесь также использованы (24), (26) и интегрирование по частям.

Из тождества Вронского и правила Лейбница для фундаментальных решений следует, что $2\,\phi_1(y)\phi'_2(y) = (\phi_2(y)\phi_1(y))' + 1$. Здесь важно изменение знака в сравнении с предыдущим случаем, поскольку индексы 1 и 2 не являются симметричными в тождестве Вронского. Далее, учитывая (6), (8) и (10), имеем $\phi^s_{1n}(0) = \phi^s_{1n}(2\pi) = 1$, $\phi^s_{2n}(0) = \phi^s_{2n}(2\pi) = 0$ для $n = 1, 2, \ldots$ и

$$J_n = \kappa_n^2\, \beta_n^{-1}\, (2\pi)^{-1}\left(-\int_0^{2\pi} \left(1 + (\phi^s_{2n}\phi^s_{1n})'\right)\, dy + \beta_n \int_0^{2\pi} y\, \left((\phi^s_{2n})^2\right)'\, dy\right) =$$

$$= \kappa_n^2\, \beta_n^{-1}(2\pi)^{-1}\left(-\,(y + \phi^s_{2n}\phi^s_{1n})\,\Big|_0^{2\pi} + \beta_n\, y\, (\phi^s_{2n})^2\,\Big|_0^{2\pi} - \beta_n \int_0^{2\pi} (\phi^s_{2n})^2 dy\right) =$$

$$= \kappa_n^2\, \beta_n^{-1}\left(-1 - \beta_n\, \kappa_n^{-2}\right) = -\,\kappa_n^2\, \beta_n^{-1} - 1.$$

Следовательно, для каждого фиксированного n соотношение (27) является спектральной задачей для определения λ_2 и 2π-периодического $v_0(x)$:

$$\left(\kappa_n^2\, \beta_n^{-1}\right) v''_0(x) = \lambda_2\, v_0(x) \quad \text{для} \quad x \in (0, 2\pi). \tag{28}$$

Таким образом, для каждого фиксированного $n = 1, 2, \dots$ заданы

$$\begin{gathered} v_0^l = e^{ikx}, \qquad \lambda_{2n}^{ls} = ((l+1)/2)^2 \left(-\kappa_n^2\,\beta_n^{-1}\right) \qquad \text{для} \quad l = 2k-1, \\ v_0^l = e^{-ikx}, \quad \lambda_{2n}^{ls} = (l/2)^2 \left(-\kappa_n^2\,\beta_n^{-1}\right) \quad \text{для} \quad l = 2k \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \dots \end{gathered} \tag{29}$$

как собственные функции и числа для осредненного уравнения (28) с периодическими граничными условиями.

Определим $v_2 = v_0''(x)$, зафиксируем некоторые l и v_0^l и учтем осредненное уравнение (28) в (16). Тогда соотношение (16) будет выполнено, если определить $N_2(y) = N_{2n}^s(y)$ как периодическое решение уравнения

$$L^y N_{2n}^s(y) - b_n N_{2n}^s(y) = 2(N_{1n}^s(y))' + \left(1 + \kappa_n^2\,\beta_n^{-1}\right) N_{0n}^s(y),$$

которое разрешимо в силу приведенных выше вычислений, и можно найти такое решение этого уравнения, что $(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} N_{2n}^s(y) N_{0n}^s(y)\,dy = 0$.

Таким образом, для целых неотрицательных l и n определены приближенные решения задачи (1), которые можно представить в следующем виде

$$\begin{gathered} \lambda_{as}^{ln} = b_n + \varepsilon^2 \lambda_{2n}^{ls}, \\ u_{as}^{ln} = N_{0n}^s\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v_0^l(x) + \varepsilon N_{1n}^s\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(v_0^l(x)\right)' + \varepsilon^2 N_{2n}^s\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(v_0^l(x)\right)''. \end{gathered} \tag{30}$$

Существенным различием разложения (23) от разложения (30) является отличие знаков в определениях собственных чисел (22) и (29). Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, например, для положительных q в задаче (1) значения $\sigma_n^2\,\alpha_n^{-1}$ в (22) всегда положительны, а значения $-\kappa_n^2\,\beta_n^{-1}$ в (29) всегда отрицательны. Это означает, что собственные числа λ_{ac}^{ln} из (23) строго возрастают, а числа $\lambda_{as}^{l(n+1)}$ из (30) строго убывают с ростом номера l для фиксированного n и положительных q, что вполне иллюстрируется рисунком. Учитывая замечания к представлениям (9) и (10), полезно нарисовать такой же рисунок для отрицательных q в качестве упражнения.

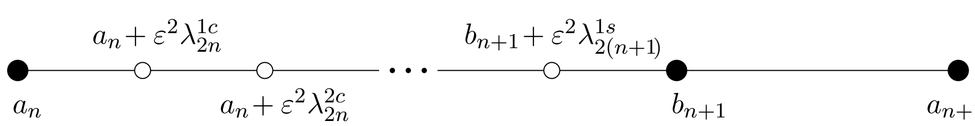

Рисунок. Распределение λ_{ac}^{ln} и $\lambda_{as}^{l(n+1)}$ для $n, l = 0, 1, \dots$ и $q > 0$

Такое представление приближенных собственных чисел означает, что всегда найдутся интервалы на спектральной прямой, свободные от этих чисел. Такие интервалы называются *лакунами.* Возникновение лакун известно для уравнений с периодическими потенциалами на всей прямой [4]. Однако, для уравнений на всей прямой спектральные интервалы, соседние с лакунами, заполняются точками непрерывного спектра. Тогда, как в рассматриваемом здесь случае такие интервалы заполняются собственными значениями. Лакунарная структура спектра характеризует фактически структуру проводимости полупроводников [4]. Отметим, что α_n и β_n являются собственными значениями матрицы монодромии уравнения (1).

Асимптотические разложения (23) и (30) не являются полными, поскольку необходимо дополнительно доказывать их согласование на интервалах пересечения, что требует дополнительных построений. Тем не менее, для начальных разложений (23) в [12] доказано следующее утверждение.

Теорема. *Для собственных значений λ_ε^l и собственных функций u_ε^l задачи (1) существует такая постоянная C, не зависящая от ε и l, что*

$$\left|\lambda_\varepsilon^l - \left(a_0 + \varepsilon^2 \lambda_{20}^{lc}\right)\right| \le C\,(\varepsilon\, l)^3, \qquad \left\| u_\varepsilon^l - v_\varepsilon^l \right\|_{L^2(0,2\pi)} \le C\,\varepsilon\, l^2$$

при $l^2 \ll \varepsilon^{-1}$ и $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$, где λ_{20}^{lc} и v_ε^l определяются собственными значениями и функциями осредненной задачи (21).

Литература

1. Wave Propagation in Periodic Media. Progress in Computational Physics: Ehrhardt M. (ed.). Berlin: Bergische Universitat, 2010. 373 p.
2. Skorobogatiy M., Yang J. Fundamentals of Photonic Crystal Guiding. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 280 p.
3. Борн М. Динамическая теория кристаллических решеток. Москва: Издательство иностранной литературы, 1958. 488 с.
4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 4. Москва: Мир, 1982. 426 с.
5. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. Москва: Издательство иностранной литературы, 1953. 476 с.
6. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Том 2. Москва: Издательство иностранной литературы, 1960. 555 с.
7. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. Москва: Наука, 1988. 432 с.
8. Kuchment P. An overview of periodic elliptic operators. *Bull. Amer. Math. Soc.* 2016. V. 53. P. 343–414.
9. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. Москва: Наука, 1984. 352 с.
10. Олейник О. А., Шамаев А. С., Иосифьян Г. А. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. Москва: Издательство МГУ, 1990. 312 с.
11. Сандраков Г. В. Принципы осреднения уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами. *Матем. сборник.* 1989. Т. 180. № 12. С. 1634–1679.
12. Сандраков Г. В., Базилева М. И. Осреднение уравнения Матье с быстро осциллирующим потенциалом. *Журнал обчисл. та прикл. матем.* 2017. № 1 (110). С. 63–70.
13. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Москва: Наука, 1979. 832 с.

Поступила: 19.04.2018 / Принята: 02.05.2018