Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2018, № 1 (127) | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.6
MSC 65K10

OPTIMAL CONTROL OF RICHARDS-KLUTE EQUATION

Andrii Tymoshenko
Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: inna-andry@ukr.net

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ РІВНЯННЯМ РІЧАРДСА-КЛЮТА

А. А. Тимошенко
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченко, Київ, Україна, E-mail: inna-andry@ukr.net

Abstract. This article offers an approach to humidity control in porous media. The main problems and some ideas to solve them are represented. The basic problem for the research is humidity regulation in an area of ground, described by Richards-Klute equation. The optimization problem is to minimize the difference between a reached state and a desired state. The mathematical model is developed with a number of simplifications: moisture incompressibility, constant external pressure an isothermal requirements.
Keywords: control, optimization, Richards-Klute equation.

Анотація. У статті пропонується підхід до розв'язання задачі керування вологістю у пористому середовищі за допомогою точкових джерел. Наведено основні проблеми та ідеї щодо їх вирішення. У якості базової задачі розглядається зволоження області грунту, що описується рівнянням Річардса-Клюта. Оптимізаційна задача ставиться як мінімізація різниці між станом, отриманим у результаті керування, та бажаним станом. Математична модель включає ряд спрощень: нестискуваність рідини, постійний зовнішній тиск та постійна температура середовища.
Ключові слова: управління, оптимізація, рівняння Річардса-Клюта.

Вступ

Закон Дарсі та рівняння Річардса є базовими для математичних моделей проникнення води крізь пористі середовища [1]. Зазвичай при розробці математичної моделі мають місце деякі додаткові припущення — нестискуваність рідини, постійній зовнішній тиск та постійна температура. Теорія моделювання руху рідини у пористому середовищі є досить розвиненою. Аналітичні результати моделювання вологості у пористому середовищі при наявності кількох точкових джерел отримано у [2]. Також там запропоновано метод переходу до лінеаризованого рівняння при виконанні умов, накладених на початкове нелінійне рівняння. Для дослідження нелінійного диференціального рівняння можна використати [3], де наведено алгоритми знаходження наближеного розв'язку. Постановка прямої задачі моделювання залежить від підходу [4, 5], що обирається для конкретної задачі. Емпіричні моделі та їх перевірка на реальних задачах для кількох типів середовища наведено у [6].

Якщо рівняння вдалось сформулювати або звести до лінійного вигляду, можна перейти до ітераційних методів розв'язку [7, 8], які використовують просторову та часову дискретизацію, досліджену у [9–11] для рівняння Річардса.

На відміну від вищезгаданих задач задача оптимального керування інтенсивністю точкових джерел є дослідженою не повністю. Для лінійних рівнянь та деяких типів нелінійних рівнянь існування та єдиність розв'язку задачі оптимального керування проаналізовано у роботах [12–15]. У нашому дослідженні використовується триетапний метод знаходження оптимальної інтенсивності джерела, наведений у [14]. Для побудови спряженого рівняння використовується теорія спряжених операторів, наведена у [16–20].

Отже, дана робота є спробою поєднати перехід від початкової постановки задачі до лінійного рівняння та знаходження оптимального керування потужністю джерела у пористому середовищі.

1. Опис процесу та математична модель

Запишемо математичну модель процесу у загальному вигляді [1]

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = div(Kgrad\Psi) - \frac{\partial K}{\partial z}.$$

У цій формулі Ψ — гідравлічний потенціал рідини, K — водопроникність, ν — вологість середовища, t — час, z — вертикальна просторова координата, взята позитивною знизу догори. Це рівняння може бути застосоване як до однорідного, так і до неоднорідного середовища. Якщо K та Ψ залежать тільки від ν, то можемо переписати це рівняння, ввівши дифузійність $D(\nu) = K(\nu)\dfrac{d\Psi}{d\nu}$ у вигляді

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = \operatorname{div}\left(D \operatorname{grad} \nu\right) - \frac{dK}{d\nu}\frac{\partial \nu}{\partial z}.$$

Оскільки функції $K(\nu)$, $\Psi(\nu)$, $D(\nu)$ є зазвичай нелінійними, зручно ввести потенціал Кірхгофа

$$\Theta = \int\limits_{\nu_1}^{\nu} D(\nu)d\nu.$$

Тоді рівняння можна переписати як

$$\frac{1}{D\left(\nu\right)}\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \operatorname{div}\operatorname{grad}\Theta - \frac{1}{K(\nu)}\frac{dK}{d\nu}\frac{\partial \nu}{\partial z}.$$

2. Перехід до лінійної постановки задачі

У основу нашого підходу покладемо результати Новосельського [2], у яких досліджується зміна вологості грунту при дії зосереджених джерел.

Розглянемо задачу крапельного зволоження грунту

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K_x(\omega)\frac{\partial H}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[K_y(\omega)\frac{\partial H}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(\omega)\frac{\partial H}{\partial z}\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} Q_j(t)\delta(x-x_j)\delta(z-z_j) - I(\omega, x, y, z, t),$$

$$(x, y, z, t) \in \Omega_0 \times (0, \infty),$$

$$z = z_0, K_z(\omega) - D_z(\omega)\frac{\partial \omega}{\partial z} = \varepsilon(x, y, t),$$

$$z \to \pm\infty$$

,

$$\omega(x, y, z, t) = \omega_0 = const, (x, y, z, t) \in \Gamma^0 \times [0, \infty),$$

$$x, y \to \pm\infty, \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0,$$

$$\omega(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), (x, y, z) \in \overline{\Omega},$$

де I — інтенсивність поглинання вологи корінням, $H = \Psi(\omega) - z$ — напор, ε — інтенсивність випаровування, $D_z(\omega) = K_z(\omega)d\psi/d\omega$ — коефіцієнт дифузійності вздовж вісі z, $\Omega_0 = [(x, z) : -\infty < x, z < \infty]$, $z = z_0$ — площина, що співпадає з поверхнею грунту, Γ^0 — границя області Ω_0. Наслідуючи [17], приймемо $K_x(\omega) = k_1 k(\omega), K_y(\omega) = k_2 k(\omega), K_z(\omega) = k_3 k(\omega)$, де k_1, k_2, k_3 — коефіцієнти фільтрації вздовж головних вісей Ox, Oy, Oz, $k(\omega)$ — функція вологості грунту. Також введемо $\xi = \beta_1 x, \eta = \beta_2 y, \varsigma = \beta_3 z, \tau = \alpha t, \beta_3 = 0.5\ell$, $\beta_1 = \sqrt{\dfrac{k_3}{k_1}}\beta_3$, $\beta_2 = \sqrt{\dfrac{k_3}{k_1}}\beta_3$, $\alpha = \langle D_z\rangle \beta_2^2$.

Потенціал Кірхгофа має вигляд

$$\Theta = \frac{4\pi\sqrt{k_1 k_2}}{Q^* k_3 \beta_3}\int_{\omega_0}^{\omega} D_z(\omega)d\omega,$$

Тоді запишемо лінеаризовану постановку задачі

$$L\Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - \Delta\Theta + 2\frac{\partial \Theta}{\partial \varsigma} = -\lambda_1 g(\tau)\Theta - \lambda_2 f(\xi, \eta, \varsigma, \tau) + 4\pi\sum_{j=1}^{N} q_j(\tau)\delta(\xi - \xi_j)\delta(\zeta - \zeta_j),$$

$$(\xi, \eta, \varsigma, \tau) \in \Omega \times (0, \infty),$$

$$\varsigma = \varsigma_0, \Theta - 0.5\frac{\partial \Omega}{\partial \varsigma} = \varepsilon_0(\xi, \eta, \tau) + \widetilde{k_0},$$

$$\varsigma \to \infty, \Theta = 0, \xi, \eta \to \pm\infty, \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = 0,$$

$$(\xi, \eta, \varsigma, \tau) \in \Gamma \times [0, \infty).$$

Початкові умови мають вигляд

$$\Theta(\xi,\eta,\tau,0)=\varphi_1(\xi,\eta,\varsigma),(\xi,\eta,\varsigma)\in\overline{\Omega},$$

де $\varepsilon_0=\dfrac{2\pi\sqrt{k_1k_2}\varepsilon}{k_3\beta_3^2Q^*}$, $\widetilde{k_0}=\dfrac{2\pi\sqrt{k_1k_2}K_z(\omega_0)}{k_3\beta_3^2Q^*}$, $q_j=\dfrac{Q_j}{Q^*}$, Q^* — векторний параметричний масштабний множник, Ω,Γ — безрозмірні аналоги Ω_0,Γ_0, $\lambda_1=\lambda_2\epsilon[0,1]$, $\langle D_z\rangle$ — середнє значення $D_z(\omega),\varphi_1=\Theta(\varphi)$, $g(\tau)$ вводяться в умовах переходу. Якщо $\omega_0=\omega_c$, ω_c — вміст супутньої вологи, то $\widetilde{k_0}=0$. Для здійснення такого переходу у [2] вимагається виконання наступних умов:

- зв'язок між $\Theta(\omega)$ та $K_z(\omega)$ лінійний: $D_z^{-1}(\omega)\dfrac{dK_x(\omega)}{d\omega}=\ell=const$;
- при $\lambda_2=0,\lambda_1=1$ I є функцією від ω,t такою, що

$$D_z^{-1}(\omega)\frac{\partial I_1(\omega,t)}{\partial\omega}=g(\tau),I_1(\omega,t)=\frac{4\pi\sqrt{k_1k_2}}{k_3\beta_3^3Q^*}I(\omega,\frac{\tau}{\alpha}),$$

  де $g(\tau)$ — функція врахування всмоктування рослинами;
- при $\lambda_2=1,\lambda_1=0$ I є функцією, залежною від просторових координат та часу: $f(\xi,\eta,\varsigma,\tau)=\frac{4\pi\sqrt{k_1k_2}}{k_3\beta_3^3Q^*}I\left(\dfrac{\xi}{\beta_1},\dfrac{\eta}{\beta_1},\frac{\varsigma}{\beta_1},\frac{\tau}{\alpha}\right)$;
- лінеаризуємо рівняння вологопересносу заміною

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{k_3\beta_3Q^*}{4\pi\sqrt{k_1k_2}}\frac{1}{D_z(\omega)}\frac{\partial\Theta}{\partial t}\simeq\frac{k_3\beta_3^3Q^*}{4\pi\sqrt{k_1k_2}}\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}.$$

Даний підхід дає гарне наближення для нелінійних задач переносу вологи [2].

3. Управління та оптимізація

Перейдемо до постановки задачі керування. Введемо позначення аналогічно [14] та скористаємось теоретичною базою щодо єдиності розв'язку для нашої задачі.

Нехай r_β — точки розташування джерел невідомої потужності $q_\beta(t)$. Виміри концентрації рідини $\phi(z,t)$ вважаємо заданими у вигляді неперервної функції. Потрібно знайти $q_\beta(t)$, $\beta=\overline{1,p}$ з умови мінімізації різниці між бажаним значенням вологості $\varphi(z,t)$ та фактичними показниками датчиків $u(z,t)$.

Нехай оптимальне управління належить до Гільбертового простору зі скалярним добутком

$$\langle X,Y\rangle=\sum_{\beta=1}^{p}\int_0^T x_\beta(t)y_\beta(t)dt.$$

Позначимо

$$J_\alpha(Q)=\sum_{m=1}^{m}\int_0^T\int_\Omega(\phi(t)-u(t,x)dx)^2dt+\alpha\|Q\|^2,$$

де $\alpha > 0$ — параметр регуляризації похибки вимірювання. Тоді задача оптимального управління має вигляд

$$J_\alpha(Q^*) = \min_{Q \in H} J_\alpha(Q).$$

Ітераційний алгоритм, запропонований у [14], має вигляд:

– розв'язати пряму задачу

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial \tau} + Lu^{(k)} = f^{(k)}, 0 < t \leq T, u^{(k)}(0) = g(x);$$

– розв'язати спряжену задачу

$$-\frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \tau} - L^* u^{(k)} = 2(u^{(k)} - \phi(t)), 0 < t \leq T, \psi^{(k)}(T) = 0;$$

– визначити нове наближення оптимальної потужності

$$\frac{Q^{(k+1)} - Q^{(k)}}{\tau_{k+1}} + \Psi^{(k)} + \alpha Q^{(k)} = 0, k = 0, 1, \ldots .$$

Отже, задачу керування вологістю вдалося звести до кількох підзадач — прямої задачі, спряженої задачі та ітераційного переходу, у результаті чого стала можливою параметризація та спрощення.

4. Модельна задача

Нехай задано суху область з точковим джерелом води фіксованої інтенсивності. Бажану вологість задано у вигляді неперервної функції. Задача оптимізації полягає у знаходженні інтенсивності, яка б забезпечувала максимально схожу вологість у кінцевий момент часу.

Досліджується одновимірна задача вигляду

$$L\Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \Theta} + 2\frac{\partial \Theta}{\partial \varsigma} = -f(\xi, \tau) + 4\pi q_j(\tau)\delta\left(\zeta - \zeta_j\right).$$

Коефіцієнти водопроникності за всіма осями взяті рівними 0.1, на нижній границі області підтримується нульова вологість, перетворення Кірхгофа запишемо у вигляді

$$\Theta = \frac{4\pi\sqrt{k_1 k_2}}{Q^* k_3 \beta_3}\left(-2 + 2\exp^{0.5\omega}\right).$$

Дискретизація за часом відбувається з десятьма кроками, а за простором — $h = \frac{1}{100}$. Запишемо неявну різницеву схему для досягнення збіжності

$$\frac{\Theta_i^n - \Theta_i^{n-1}}{\tilde{\tau}} - \frac{\Theta_{i+1}^n - 2\Theta_i^n + \Theta_{i-1}^n}{h^2} + \\ + 2\frac{\Theta_{i+1}^n - \Theta_i^n}{h} = -f^n(\zeta_i, \tau) + 4\pi q_1(\tau)\delta\left(\zeta_i - \zeta_1\right).$$

Застосувавши метод прогонки $\Theta_{i-1}^n = \alpha_i^n \Theta_i^n + \beta_i^n$, рівняння зводимо до вигляду

$$\Theta_i^n = \frac{\tilde{\tau} - 2h\tilde{\tau}}{h^2 + 2\tilde{\tau} - 2h\tilde{\tau} - \tilde{\tau}\alpha_i^n}\Theta_{i+1}^n + \\ + \frac{h^2\Theta_i^{n-1} + \tilde{\tau}\beta_i^n - f^n(\zeta_i, \tau) + 4\pi q_1(\tau)\delta(\zeta_i - \zeta_1)}{h^2 + 2\tilde{\tau} - 2h\tilde{\tau} - \tilde{\tau}\alpha_i^n}.$$

У результаті значення Θ можна знайти з початкових та крайових умов, але вони залежать від q_1. Спряжену задачу розв'язуємо аналогічним чином, але похідна обчислюється у зворотньому напрямку, щоб використати кінцеву умову рівності нулю.

Оптимальну потужність знаходимо як розв'язок задачі оптимізації у кінцевий момент часу

$$\min_{q_1}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\Theta(\zeta_i; q_1) - \phi(\zeta_i)\right)^2 + \alpha q_1^2\right).$$

Оскільки $\Theta \geq 0$, за наближений розв'язок можна взяти значення похідної мінімізаційного функціоналу та прирівняти до нуля. Знаючи його, можна ітеративно виконати третій етап методу.

Введемо позначення $x = \dfrac{\zeta_i}{h}$. Бажану функцію вологості задамо у вигляді

$$\phi(x) = \begin{cases} 0.2, & 1 \leq x \leq 10; \\ \phi(x) = 0, & x > 10 \end{cases}$$

для області у вигляді відрізка $x = 1..100$. Для цієї функції отримано середнє лінійне відхилення 0.5895 (Рис. 1). Замінимо функцію вологості на

$$\phi(x) = \begin{cases} 0.1 - 0.0005x, & 1 \leq x \leq 40; \\ \phi(x) = 0, & x > 40. \end{cases}$$

Для цієї функції отримано більш точний результат — відхилення складає 0.0947 (Рис. 2).

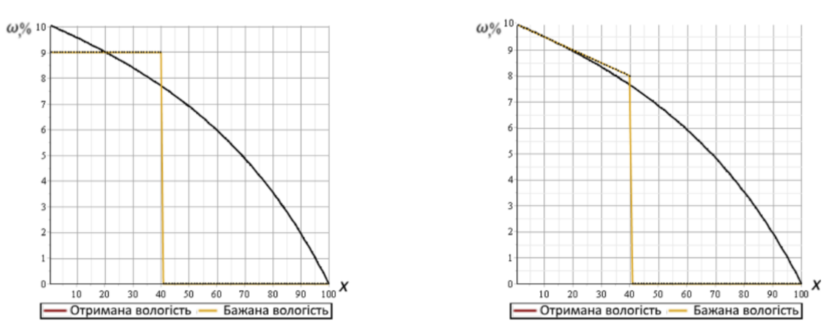

Рис. 1 та 2.

Далі задамо функцію вологості на всій області

$$\phi(x) = \begin{cases} 0.1 - 0.001x, , & 1 \le x \le 100; \\ \phi(x) = 0, & x > 100. \end{cases}$$

Для цієї функції відхилення складає 0.6353 (Рис. 3).

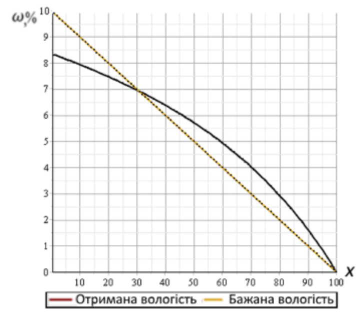

Рис. 3.

Отже, щоб підвищити точність алгоритму, необхідно врахувати фізичні особливості грунту при виборі бажаної функції.

5. Висновки

Запропонований алгоритм ідентифікації оптимальної потужності джерела дає можливість з високою точністю розв'язати ряд нелінійних задач, для яких виконуються умови переходу. Підхід базується на перетворенні Кірхгофа та легко застосовується. Бажана функція має враховувати фізичні особливості середовища для підвищення точності методу. Від розв'язку лінеаризованої та масштабованої задачі можна перейти до показників вологості в останній момент часу.

Література

1. Pullan A. J. The Quasilinear Approximation for Unsaturated Porous Media Flow. *Water resources research.* 1990. Vol. 26. No. 6. P. 1219–1234. doi: https://doi.org/10.1029/WR026i006p01219
2. Novoselskiy S. N. Solution of some Boundary Value Problems of Moisture Transport with Irrigation Sources. Candidate thesis in Mathematics and Physics: 01.02.05 / Kalinin Polytechnic Institute. Kalinin, 1981 (in Russian)
3. Gajevskiy H., Groger K., Zaharias K. Nonlinear operator equations and operator differential equations. Moscow: MIR. 336 p. (in Russian)
4. Van Genuchten M. Th. A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 1980. Vol. 44. P. 892–898. doi: https://doi.org/10.2136/sssaj1980.03615995004400050002x
5. Kashenko N. M. Processes of moisture transport in porous media. *Vestnir Ros. gos. univ. im. I. Kanta.* 2010. No. 10. P. 56–58 (in Russian)

6. Shatkovskiy A. P. Scientific Basics of Intensive Technologies for Drip Irrigation of Cultivated Plants Under Conditions of Ukrainian Steppes. Doctor thesis of Agricultural Sciences: 06.01.02 / National Academy of Agrarian Sciences of Ukraine. Kyiv, 2016. 496 p.(in Ukrainian)
7. List F., Radu F. A study on iterative methods for Richards' equation. arXiv:1507.07837v1 *Math.NA*. URL: http://arxiv.org/abs/1507.07837. 28 Jul 2015. doi: https://doi.org/10.1007/s10596-016-9566-3
8. Kelley C. T. Iterative methods for linear and nonlinear equations. North Carolina State University. SIAM Philadelphia. 1995. 171 p. doi: https://doi.org/10.1137/1.9781611970944
9. Arbogast T. An error analysis for Galerkin approximations to an equation of mixed elliptic-parabolic type. Technical Report TR90-33, Department of Computational and Applied Mathematics, Rice University. Houston, TX. 1990. 28 p.
10. Ginting V. Time integration techniques for Richards equation. *Procedia Computer Science.* 9. 2012. P. 670–678. doi: https://doi.org/10.1016/j.procs.2012.04.072
11. Pop I. S. Error estimates for a time discretization method for the Richards' equation. *Comput. Geosci. 6.* 2002. P. 141–160. doi: https://doi.org/10.1023/A:1019936917350
12. Lions J.-L. Optimal control of systems, described by partial differential equations. Moscow: MIR. 1972. 416 p. (in Russian)
13. Kirk Donald E. Optimal control theory. An Introduction. New Jersey: Dover Books on Electrical Engineering, 1971. 472 p.
14. Lyashko S., Klyushin D., Semenov V., Shevchenko K. Identification of point contamination source in ground water. *International Journal of Ecology and Development.* Fall 2006. Vol. 5. No.6. P. 36–43.
15. Lyashko S. I. Generalized control of linear systems. Kyiv: Nauk. dumka. 1998. 470 p. (in Russian)
16. Vabishchevich P. N. Numerical Solution of the Problem of the Identification of the Right-hand Side of a Parabolic Equation. *Russian Math. Iz. VUZ.* 2003. 47:1. P. 29–37. (in Russian)
17. Marchuk G. I. Conjugate equations and their application. *Tr. IMM UrO RAN.* 2006. Vol 12. No 1. P. 184–195. (in Russian)
18. Marchuk G. I., Shutyaev V. P. Conjugate equations and iterational algorythms in problems of variational data assimilation. *Tr. IMM UrO RAN.* 2011. Vol. 17. No. 2. P. 136–150. (in Russian)
19. Marchuk G. I. About some approaches to building conjugate operators in nonlinear tasks. *Tr. MIAN.* 1994. Vol. 203. P. 126–134. (in Russian)
20. Marchuk G. I. Construction of conjugate operators in nonlinear problems of mathematical physics. *Matem. sb.* 1998. Vol. 189. No. 10. P. 75–88. (in Russian)

Надійшла: 20.04.2018 / Прийнята: 14.05.2018