Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2018, № 1 (127) | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.988
MSC 65K15, 65J15

INERTIAL HYBRID SPLITTING METHOD FOR OPERATOR INCLUSION PROBLEMS

S. V. Denisov, V. V. Semenov

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko Kiev National University, Kiev, Ukraine, E-mail: {sireukr, semenov.volodya}@gmail.com

ИНЕРЦИОННЫЙ ГИБРИДНЫЙ МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

С. В. Денисов, В. В. Семёнов

Факультет компьютерных наук и кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина, E-mail: {sireukr, semenov.volodya}@gmail.com

Abstract. In this paper, new algorithm for solving an operator inclusion problems with maximal monotone operators acting in a Hilbert space is proposed. Algorithm is based on inertial extrapolation and two well-known methods: Tseng forward-backward splitting algorithm and hybrid algorithm for approximation of fixed points of nonexpansive operators. Theorem on the strong convergence of the sequences generated by algorithm is proved.
Keywords: operator inclusion problem, maximal monotone operator, Hilbert space, inertial method, Tseng algorithm, hybrid algorithm, strong convergence.

Аннотация. Предложен новый инерционный алгоритм для решения операторных включений с максимальными монотонными операторами, действующими в гильбертовом пространстве. Алгоритм основан на инерционной экстраполяции и двух известных методах: алгоритме расщепления Tseng и гибридном алгоритме для аппроксимации неподвижных точек нерастягивающих операторов. Доказана теорема о сильной сходимости порожденных алгоритмом последовательностей.
Ключевые слова: операторное включение, максимальный монотонный оператор, гильбертово пространство, инерционный метод, алгоритм Tseng, гибридный алгоритм, сильная сходимость.

Введение

Многие задачи обработки данных, исследования операций и математической физики можно записать в виде вариационных неравенств или в более абстрактной форме операторных включений с монотонными операторами [1], для решения которых к настоящему времени предложено и теоретически обосновано много надежных численных методов [1–19]. Хотя далеко не все вопросы разработаны с исчерпывающей полнотой. Одним из эффективных способов ускорения итерационных методов является введение в процесс инерции. В выпуклой оптимизации первым методом данного типа стал широкоизвестный метод тяжелого шарика Б. Т. Поляка. В последнее время этот прием приобрел большую популярность, что отражено в публикациях [12–19]. В работе [16] предложен и обоснован инерционный экстраградиентный метод для решения вариационных неравенств. А в недавней статье [17] предложены две инерционные модификации алгоритма Красносельского-Манна для аппроксимации неподвижных точек нерастягивающих операторов, действующих в гильбертовом пространстве. В работах [18, 19] для операторных включений с операторами, имеющими вид суммы максимального монотонного и обратно сильно монотонного оператора, предложено и изучено несколько вариантов инерционных модификаций классической «forward-backward» схемы расщепления. Однако, для операторных включений с монотонными и только липшицевыми операторами вместо обратно сильно монотонных последние методы не работают. Наша цель — построить для таких включений сильно сходящийся алгоритм.

В данной статье для решения операторных включений с максимальным монотонным и монотонным липшицевым операторами, действующими в гильбертовом пространстве, предложен новый инерционный алгоритм. Алгоритм основан на инерционной экстраполяции и двух известных методах: алгоритме расщепления Tseng [2] и гибридном CQ-алгоритме для аппроксимации неподвижных точек нерастягивающих операторов [20]. Доказана теорема о сильной сходимости порожденных алгоритмом последовательностей к метрической проекции заданной точки на множество решений операторного включения.

1. Постановка задачи

Всюду далее H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и порожденной нормой $\|\cdot\|$. Для многозначного оператора $A : H \to 2^H$ используем следующие обозначения

$$\operatorname{dom}(A) = \{x \in H : \ \ Ax \neq \emptyset\}, \quad A^{-1}0 = \{x \in H : \ \ 0 \in Ax\}.$$

Напомним, что резольвентой многозначного оператора $A : H \to 2^H$ называют оператор $J_A = (I + A)^{-1} : H \to 2^H$, где I — единичный оператор [1]. Известно, что в случае максимальной монотонности оператора A резольвента J_T является однозначным, всюду заданным и твердо нерастягивающим оператором, а множество $A^{-1}0$ — замкнутым и выпуклым (возможно пустым) [1].

Лемма 1 ([1]). *Пусть $A : H \to 2^H$ — максимальный монотонный оператор, x, $u \in H$. Тогда*

$$(u - v, x - y) \geq 0 \ \ \forall y \in \operatorname{dom}(A) \ \forall v \in Ay \Leftrightarrow x \in \operatorname{dom}(A), u \in Ax.$$

Пусть также P_C — оператор проектирования на непустое выпуклое и замкнутое множество $C \subseteq H$, то есть $P_C x$ — единственный элемент множества C со свойством $\|P_C x - x\| = \min_{z \in C} \|z - x\|$. Известны следующие характеризации элемента $P_C x$ [1]

$$\begin{aligned} y = P_C x \ &\Leftrightarrow \ y \in C \text{ и } (y - x, z - y) \geq 0 \ \forall z \in C; \\ y = P_C x \ &\Leftrightarrow \ y \in C \text{ и } \|y - z\|^2 \leq \|x - z\|^2 - \|y - x\|^2 \ \ \forall z \in C. \end{aligned}$$

Заметим, что $P_C = J_{N_C}$, где N_C — нормальный конус множества C [1].

Перейдем к формулировке задачи. Пусть $A : H \to H$ — монотонный и липшицевый оператор с константой Липшица $L > 0$, причем $\operatorname{dom}(A) = H$; $B : H \to 2^H$ — максимальный монотонный оператор. Отметим, что оператор $A + B : H \to 2^H$ является максимальным монотонным и $\operatorname{dom}(A + B) = \operatorname{dom}(B)$. Рассмотрим операторное включение

$$0 \in (A + B)\, x. \tag{1}$$

Замечание 1. Если $B = N_C$ — нормальный конус замкнутого выпуклого множества $C \subseteq H$, то задача (1) является вариационным неравенством: найти такой элемент $x \in C$, что $(Ax, y - x) \geq 0 \ \forall y \in C$.

Предположим, что множество решений включения (1) не пусто, то есть

$$S = (A + B)^{-1}\, 0 \neq \emptyset.$$

2. Описание алгоритма

Для получения сильно сходящихся аппроксимаций решений операторного включения (1) предлагаем следующий алгоритм.

Алгоритм 1. Инерционный гибридный метод расщепления.

Инициализация. Выбираем $x_0, x_1 \in H$. Задаем последовательности чисел $\lambda_n \in [a, b]$, $\theta_n \in [0, \theta]$, где a, $b \in \left(0, \frac{1}{L}\right)$, $\theta \in (0, 1)$. Полагаем $n = 1$.

Шаг 1: Вычислить

$$y_n = x_n + \theta_n \left(x_n - x_{n-1}\right).$$

Шаг 2: Вычислить

$$\begin{aligned} u_n &= y_n - \lambda_n A y_n, \\ v_n &= J_{\lambda_n B} u_n, \\ w_n &= y_n - u_n + v_n - \lambda_n A v_n. \end{aligned}$$

Шаг 3: Вычислить

$$x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_1,$$

где

$$\begin{aligned} C_n &= \left\{z \in H : \ \|w_n - z\| \leq \|y_n - z\|\right\}, \\ Q_n &= \left\{z \in H : \ (x_n - z, x_1 - x_n) \geq 0\right\}. \end{aligned}$$

Положить $n := n + 1$ и перейти на шаг 1.

Замечание 2. Алгоритм 1 реализует идею инерционной экстраполяции и регуляризации метода расщепления Tseng [2] с помощью гибридного CQ-метода Nakajo–Takahashi [20].

Замечание 3. Очевидно, что определенные в алгоритме 1 множества $C_n \cap Q_n$ являются выпуклыми и замкнутыми. Далее показана их непустота и корректность определения элементов x_n.

Замечание 4. Для вариационных неравенств замечания 1 шаг 2 алгоритма имеет вид

$$\begin{aligned} v_n &= P_C\left(y_n - \lambda_n A y_n\right), \\ w_n &= v_n - \lambda_n\left(A v_n - A y_n\right). \end{aligned}$$

Замечание 5. Вычисление метрической проекции $P_{C_n \cap Q_n} x_1$ в алгоритме 1 можно выполнить явно [1].

Справедливо важное неравенство, связывающее расстояния от порожденных алгоритмами точек до множества S.

Лемма 2. *Для последовательностей (y_n), (v_n) и (w_n), порожденных алгоритмом 1, имеет место неравенство*

$$\|w_n - z\|^2 \le \|y_n - z\|^2 - \left(1 - \lambda_n^2 L^2\right) \|y_n - v_n\|^2,$$

где $z \in S$.

Доказательство. Смотри монографию [1] или статьи [2, 8, 9]. □

Перейдем к доказательству сильной сходимости алгоритма.

3. Сильная сходимость алгоритма

Сначала установим важное свойство локализации множества решений операторного включения (1) с помощью множеств $C_n \cap Q_n$.

Лемма 3. *Для всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место вложение*

$$S \subseteq C_n \cap Q_n. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $z \in S = (A + B)^{-1} 0$. Из неравенства леммы 2 следует, что $\|w_n - z\| \le \|y_n - z\|$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $S \subseteq C_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Теперь с использованием математической индукции покажем, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо вложение $S \subseteq C_n \cap Q_n$. Для $n = 1$ имеем $Q_n = H$. Следовательно, $S \subseteq C_1 \cap Q_1$. Пусть для некоторого $k \in \mathbb{N}$ выполняется $S \subseteq C_k \cap Q_k$. Тогда существует единственная точка $x_{k+1} \in C_k \cap Q_k$ такая, что $x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k} x_1$. Из $x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k} x_1$ следует

$$(x_{k+1} - z, x_1 - x_{k+1}) \ge 0 \quad \forall z \in C_k \cap Q_k.$$

Поскольку $S \subseteq C_k \cap Q_k$, то $S \subseteq Q_{k+1}$. Таким образом, $S \subseteq C_{k+1} \cap Q_{k+1}$. Вложение (2) доказано для всех $n \in \mathbb{N}$. □

Лемма 4. *Последовательности (x_n), (y_n), (v_n) и (w_n) ограничены и*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = \\ = \lim_{n\to\infty} \|w_n - x_{n+1}\| = \lim_{n\to\infty} \|v_n - y_n\| = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Покажем сначала, что последовательности (x_n) и (y_n) ограничены. Из $x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_1$ следует

$$\|x_{n+1} - x_1\| \le \|z - x_1\| \quad \forall z \in C_n \cap Q_n.$$

Поскольку $P_S x_1 \in S \subseteq C_n \cap Q_n$, то

$$\|x_{n+1} - x_1\| \le \|P_S x_1 - x_1\| \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Откуда следует ограниченность (x_n) и, естественно, ограниченность (y_n).

Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \tag{5}$$

Из $x_{n+1} \in C_n \cap Q_n \subseteq Q_n$ и $x_n = P_{Q_n} x_1$ следует

$$\|x_{n+1} - x_1\| \ge \|x_n - x_1\| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность $(\|x_n - x_1\|)$ ограничена и неубывающая. Следовательно, существует предел $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_1\|$. Однако, поскольку $x_{n+1} \in Q_n$, то $(x_n - x_{n+1}, x_1 - x_n) \ge 0$ и

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_{n+1}\|^2 &= \|(x_n - x_1) - (x_{n+1} - x_1)\|^2 = \\
&= \|x_n - x_1\|^2 - 2\,(x_n - x_1, x_{n+1} - x_1) + \|x_{n+1} - x_1\|^2 = \\
&= \|x_{n+1} - x_1\|^2 - \|x_n - x_1\|^2 - 2\,(x_n - x_{n+1}, x_1 - x_n) \le \\
&\qquad \le \|x_{n+1} - x_1\|^2 - \|x_n - x_1\|^2 .
\end{aligned}$$

Откуда получаем (5).

Поскольку

$$\|y_n - x_n\| = \theta_n \|x_n - x_{n-1}\| \le \theta \|x_n - x_{n-1}\|,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0. \tag{6}$$

А из (5) и (6) следует

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_{n+1}\| = 0. \tag{7}$$

Поскольку $x_{n+1} \in C_n$, то $\|w_n - x_{n+1}\| \le \|y_n - x_{n+1}\|$. Откуда получаем ограниченность последовательности (w_n) и, учитывая (7), асимптотику

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n - x_{n+1}\| = 0. \tag{8}$$

Используя лемму 2, получаем

$$\begin{aligned}
\|y_n - v_n\|^2 &\le \frac{\|y_n - z\|^2 - \|w_n - z\|^2}{1 - \lambda_n^2 L^2} = \\
&= \frac{(\|y_n - z\| - \|w_n - z\|)\,(\|y_n - z\| + \|w_n - z\|)}{1 - \lambda_n^2 L^2} \le \\
&\le \frac{(\|y_n - z\| + \|w_n - z\|)}{1 - \lambda_n^2 L^2} \|y_n - w_n\| \le \\
&\le \frac{(\|y_n - z\| + \|w_n - z\|)}{1 - \lambda_n^2 L^2} (\|y_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - w_n\|),
\end{aligned}$$

где $z \in S$. Из (7) и (8) следует

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - v_n\| = 0$$

и ограниченность последовательности (v_n). $\square$

Лемма 5. *Слабые предельные точки последовательностей* (x_n), (y_n), (v_n) *и* (w_n) *принадлежат множеству* S.

Доказательство. Из ограниченности последовательности (x_n) следует существование подпоследовательности (x_{n_k}), слабо сходящейся к точке $q \in H$. Покажем, что $q \in S$. Из (3) следует

$$y_{n_k} \to q \text{ слабо}, \quad v_{n_k} \to q \text{ слабо}, \quad w_{n_k} \to q \text{ слабо}$$

и

$$r_{n_k} = \frac{y_{n_k} - v_{n_k}}{\lambda_{n_k}} + Av_{n_k} - Ay_{n_k} \to 0, \;\; r_{n_k} \in (A+B)\, v_{n_k}.$$

Имеем

$$(r_{n_k} - p, v_{n_k} - y) \geq 0 \quad \forall y \in \operatorname{dom}(A+B) \;\; \forall p \in (A+B)\, y.$$

После предельного перехода получим

$$(0 - p, q - y) \geq 0 \quad \forall y \in \operatorname{dom}(A+B) \;\; \forall p \in (A+B)\, y.$$

Поскольку оператор $A+B$ является максимальным монотонным, то согласно лемме 1 имеем $0 \in (A+B)\, q$. $\square$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть* $A : H \to H$ *— монотонный и липшицевый оператор с константой Липшица* $L > 0$, *причем* $\operatorname{dom}(A) = H$, $B : H \to 2^H$ *— максимальный монотонный оператор и* $S = (A+B)^{-1}\, 0 \neq \emptyset$. *Тогда порожденная алгоритмом 1 последовательность* (x_n) *сильно сходится к элементу* $P_{(A+B)^{-1}0} x_1$.

Доказательство. Пусть подпоследовательность (x_{n_k}) слабо сходится к элементу $w \in H$. Известно, что $w \in S = (A+B)^{-1}\, 0$. Для $P_{(A+B)^{-1}0} x_1$ из слабой полунепрерывности снизу нормы и неравенства (4) следует

$$\left\| x_1 - P_{(A+B)^{-1}0} x_1 \right\| \leq \|x_1 - w\| \leq$$
$$\leq \liminf_{k\to\infty} \|x_1 - x_{n_k}\| \leq \limsup_{k\to\infty} \|x_1 - x_{n_k}\| \leq \left\| x_1 - P_{(A+B)^{-1}0} x_1 \right\|.$$

Таким образом, получено

$$\lim_{k\to\infty} \|x_1 - x_{n_k}\| = \|x_1 - w\| = \left\| x_1 - P_{(A+B)^{-1}0} x_1 \right\|.$$

Откуда $x_{n_k} \to w = P_{(A+B)^{-1}0} x_1$. Следовательно, $x_n \to P_{(A+B)^{-1}0} x_1$. $\square$

Замечание 6. В силу (3) получаем $y_n \to P_{(A+B)^{-1}0} x_1$, $v_n \to P_{(A+B)^{-1}0} x_1$ и $w_n \to P_{(A+B)^{-1}0} x_1$.

Заключение

В данной работе рассмотрена проблема решения операторных включений

$$0 \in (A+B)\, x,$$

где оператор $A : H \to H$ монотонный и липшицевый, а $B : H \to 2^H$ максимальный монотонный. Предложен новый инерционный алгоритм аппроксимации метрической проекции заданной точки на множество решений операторного включения. Алгоритм является регуляризацией схемы расщепления Tseng [2] с введенной инерцией. Регуляризация была осуществлена при помощи гибридного CQ-метода поиска неподвижных точек нерастягивающих операторов [20]. Доказана теорема о сильной сходимости порожденных алгоритмом последовательностей.

Замечание 7. Условие $\lambda_n \in [a,b] \subseteq (0,1/L)$ в алгоритме является не совсем конструктивным (в случае неизвестной константы Липшица или известной её грубой верхней оценки) и имеет скорее теоретическое значение. На практике величину λ_n можно получить дроблением какой-нибудь начальной величины $\sigma > 0$ за конечное число шагов. Например,

$$\begin{cases} j\,(n) = \min\left\{ j \geq 0 : \quad \frac{\left\| AJ_{\sigma\tau^j B}\left(I-\sigma\tau^j A\right)y_n - Ay_n \right\|}{\left\| J_{\sigma\tau^j B}(I-\sigma\tau^j A)y_n - y_n \right\|} \leq \frac{\tau^j\theta}{\sigma} \right\}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}, \end{cases}$$

где $\sigma > 0$, $\theta \in (0,1)$, $\tau \in (0,1)$ — заданные параметры [2, 21, 22]. Используя рассуждения работ [21, 22], можно гарантировать корректность этого правила выбора λ_n и без предположения о глобальной липшицевости оператора A. Заметим, что в этой схеме дробления необходимо вычислять значения композиций $\left(I+\sigma\tau^j B\right)^{-1}\left(I-\sigma\tau^j A\right)$, что может сказаться на общей вычислительной эффективности метода.

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН Украины (проект «Розробка алгоритмів моделювання та оптимізації динамічних систем для оборони, медицини та екології», 0116U004777).

Литература

1. Bauschke H. H., Combettes P. L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2011. 408 p.
2. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. *SIAM J. Control Optim.* 2000. Vol. 38. P. 431–446.
3. Войтова Т. А., Семенов В. В. Метод решения двухэтапных операторных включений. *Журнал обчисл. та прикл. матем.* 2010. № 3 (102). С. 34–39.
4. Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T. A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2011. Vol. 47. P. 631–639.
5. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция операторных включений с максимальными монотонными операторами. *Журнал обчисл. та прикл. матем.* 2013. № 2 (112). С. 155–160.

6. Семенов В. В. Сильно збіжний декомпозиційний алгоритм для операторного включення з сумою двох максимальних монотонних операторів. *Журнал обчисл. та прикл. матем.* 2013. № 4 (114). С. 60–67.
7. Ляшко Н. И., Семенов В. В., Чабак Л. М. Алгоритм расщепления для вариационных неравенств с максимальными монотонными операторами. *Журнал обчисл. та прикл. матем.* 2014. № 3 (117). С. 131–139.
8. Semenov V. V. Hybrid Splitting Methods for the System of Operator Inclusions with Monotone Operators. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. Vol. 50. P. 741–749.
9. Semenov V. V. A Strongly Convergent Splitting Method for Systems of Operator Inclusions with Monotone Operators. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2014. Vol. 46. No. 5. P. 45–56.
10. Lyashko S. I., Semenov V. V. A New Two-Step Proximal Algorithm of Solving the Problem of Equilibrium Programming. *Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and Its Applications, vol. 115.* B. Goldengorin (ed.). Cham: Springer, 2016. P. 315–325.
11. Semenov V. V. A Version of the Mirror descent Method to Solve Variational Inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. Vol. 53. P. 234–243.
12. Alvarez F., Attouch H. An inertial proximal method for monotone operators via discretization of a nonlinear oscillator with damping. *Set-Valued Anal.* 2001. Vol. 9. P. 3–11.
13. Attouch H., Peypouquet J., Redont P. A dynamical approach to an inertial forward-backward algorithm for convex minimization. *SIAM J. Optim.* 2014. V. 24. P. 232–256.
14. Attouch H., Chbani Z., Riahi H. Combining fast inertial dynamics for convex optimization with Tikhonov regularization. *J. Math. Anal. Appl.* 2018. No. 457. P. 1065–1094.
15. Ochs P., Chen Y., Brox T., Pock T. Ipiano: inertial proximal algorithm for nonconvex optimization. *SIAM J. Imaging Sci.* 2014. Vol. 7. P. 1388–1419.
16. Dong Q. L., Lu Y. Y., Yang J. The extragradient algorithm with inertial effects for solving the variational inequality. *Optimization.* 2016. Vol. 65. P. 2217–2226.
17. Dong Q. L., Yuan H. B., Cho Y. J., Rassias Th. M. Modified inertial Mann algorithm and inertial CQ-algorithm for nonexpansive mappings. *Optim. Lett.* 2018. Vol. 12. No. 1. P. 87–102.
18. Moudafi A., Oliny M. Convergence of a splitting inertial proximal method for monotone operators. *J. Comput. Appl. Math.* 2003. No. 155. P. 447–454.
19. Lorenz D., Pock T. An inertial forward-backward algorithm for monotone inclusions. *J. Math. Imaging Vis.* 2015. No. 51. P. 311–325.
20. Nakajo K., Takahashi W. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups. *J. Math. Anal. Appl.* 2003. No. 279. P. 372–379.
21. Verlan D. A., Semenov V. V., Chabak L. M. A Strongly Convergent Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2015. Vol. 47. No. 7. P. 31–46.
22. Denisov S. V., Semenov V. V., Chabak L. M. Convergence of the Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2015. Vol. 51. P. 757–765.

Поступила: 01.02.2018 / Принята: 02.04.2018