Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2018, № 1 (127) | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.834

MSC 91A12

ON INTEGER BANKRUPTCY PROBLEM STOCHASTIC SOLUTION

Sergei I. Dotsenko

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: sergei204@ukr.net

ВЕРОЯТНОСТНОЕ РЕШЕНИЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ЗАДАЧИ О БАНКРОТСТВЕ

С. И. Доценко

Факультет компьютерных наук и кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина, E-mail: sergei204@ukr.net

Abstract. The bankruptcy problem is considered by means of cooperative game theory. The lottery mechanism is proposed for the case when the game solution contains fractional components but all of the payments to claimers must be integer.
Keywords: Cooperative game, Shapley value, τ-value, nucleolus, lottery.

Аннотация. Задача о банкротстве рассматривается методами кооперативной теории игр. Для случая, когда решение игры содержит дробные компоненты, а выплаты кредиторам должны быть целыми, предложен механизм распределения дробных частей путем проведения лотереи.
Ключевые слова: кооперативная игра, вектор Шепли, τ-значение, n-ядро, лотерея.

Введение

Задача о банкротстве является актуальной прикладной экономической задачей и формулируется очень просто: как раздать долги, если суммарные претензии кредиторов превышают имеющуюся в наличии сумму?

Математически классическая задача о банкротстве формулируется следующим образом: пусть $\vec{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$ — вектор претензий кредиторов, $E > 0$ — сумма удовлетворения претензий, где $c_i > 0$, $0 < E < \sum_i c_i$. Решением задачи о банкротстве называется отображение из множества задач о банкротстве в множество векторов $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ удовлетворений претензий

$$F : (\vec{c}, E) \to \vec{x},$$

где $0 \le x_i \le c_i$, $\sum_i x_i = E$.

Существуют различные способы решения данной задачи, базирующиеся на концепции кооперативной теории игр и дающие различные, но близкие значения вектора $\vec{x}$. Однако, поскольку в общем случае компоненты вектора $\vec{x}$ могут быть дробными, то найденное решение может быть неприемлемым, когда речь идет о распределении неделимых предметов. Автором предложен возможный способ выхода из данной ситуации путем построения специальной лотереи. При этом нахождение целочисленного решения задачи о банкротстве состоит из таких этапов:

1) Нахождение решения задачи о банкротстве.
2) Гарантированная выплата всем кредиторам целых частей найденного решения.
3) Построение лотереи, удовлетворяющей двум свойствам: а) каждый из участников получает дополнительно 1 с вероятностью, равной дробной части его компоненты в найденном решении, и 0 с дополнительной вероятностью; б) при любом исходе лотереи сумма выплат равна сумме дробных частей всех компонент найденного решения.

Статья построена следующим образом:

1) Рассматриваются основные положения кооперативной теории игр.
2) Рассматривается связь задачи о банкротстве с кооперативной теорией игр.
3) Приводится механизм проведения лотереи распределения дробных частей решения задачи о банкротстве.
4) Рассматривается типовой пример, в котором для конкретной задачи о банкротстве с тремя игроками находятся три варианта решения, построенные на основе вектора Шепли, n-ядра и τ-значения вспомогательной характерической функции, и для каждого найденного решения строятся лотереи распределения дробных частей.

1. Основные сведения о кооперативных играх

Кооперативная игра задается парой $\langle N, V \rangle$, где N — конечное множество игроков, n — их количество, V — отображение $2^N \to R$ из множества всех коалиций в множество действительных чисел, называемое характеристической функцией (которая ставит в соответствие каждой коалиции совместный заработок ее членов), и при этом $V(\phi) = 0$ (что по сути означает, что пустая коалиция никогда ничего не зарабатывает). Множество всех кооперативных игр на множестве игроков N обозначается через G^N.

Кооперативная игра называется супераддитивной, если

$$\left(\forall S, T \in 2^N, S \cap T = \phi\right) \left(V(S) + V(T) \le V(S \cap T)\right).$$

Кооперативная игра называется выпуклой, если

$$\left(\forall S, T \in 2^N\right) \left(V(S) + V(T) \le V(S \cup T) + V(S \cap T)\right).$$

Решением кооперативной игры $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ называется отображение $f : G^N \to \mathbb{R}^n$, ставящее в соответствие каждой кооперативной игре n-мерный вектор, i-я компонента которого равна платежу i-му игроку в данной игре. Решение игры называется эффективным, если $X(N) = V(N)$, где $X(S) = \sum\limits_{i\in S} x_i$. Эффективность решения означает, что заработок гранд-коалиции распределяется между ее членами без потерь.

C-ядром игры называется множество эффективных и стабильных решений $\vec{x}$ таких, что любая коалиция S, отделившись от гранд-коалиции, не сможет обеспечить суммарный заработок ее членов больший, чем $X(S)$

$$C(V) := \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | X(N) = V(N), X(S) \geq V(S), \forall S \in 2^N\right\}.$$

Рассмотрим перестановку игроков $\pi = (i_1, ..., i_n)$. Пусть $\pi(i)$ — номер позиции i-го игрока в перестановке π, $\pi^i = \{j \in N | \pi(j) \leq \pi(i)\}$ — множество игроков, включающее i и всех, кто стоит перед ним в перестановке π. Назовем маргинальным вкладом игрока i в перестановку π величину

$$m_i^\pi = V\left(\pi^i\right) - V\left(\pi^i \setminus \{i\}\right).$$

Очевидно, что для любой перестановки сумма маргинальных вкладов всех игроков равна $V(N)$.

Вектором Шепли (В.Ш.) называется решение кооперативной игры, представляющее собой вектор маргинальных вкладов игроков, усредненных по всем возможным $n!$ перестановкам. Компоненты В.Ш. также могут быть вычислены по формуле

$$\phi_i(V) = \sum_{S\subset N\setminus\{i\}} \frac{|S|!\,(n-|S|)!}{n!} \left(V\left(S \cup \{i\}\right) - V\left(S\right)\right). \tag{1}$$

Оказывается, что для выпуклой игры ядро всегда непусто, а В.Ш. является «центром масс» ядра, и следовательно, принадлежит ему. Для невыпуклой игры ядро может оказаться пустым, а В.Ш. может не принадлежать ядру, даже если ядро не пусто. Понятие n-ядра было впервые введено в [1]. Это точечное решение кооперативной игры, которое базируется на понятиях эксцесса и лексикографического порядка.

Определение 1. Эксцесс коалиции — это значение

$$e(x, S) = V(S) - \sum_{i\in S} x_i,\ \vec{x} \in D(V), S \in 2^N, \tag{2}$$

где $D(V)$ — множество решений игры $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$, удовлетворяющих условиям эффективности и индивидуальной рациональности, т.е. $\sum_{i\in N} x_i = V(N)$ и $x_i \geq V(i)$, $i = 1, ..., n$ соответственно.

Другими словами, эксцесс является мерой сожаления того, что суммарный заработок коалиции не такой большой, как хотелось бы. Если суммарный заработок членов коалиции S больше, чем $V(S)$, то эксцесс будет отрицательным.

Определение 2. Вектор $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ лексикографически меньше, чем $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)$, если существует некоторое $k \in \{1, ..., n\}$, такое, что $x_k < y_k$ и $x_i = y_i$ для всех $i < k$.

Определение 3. n-ядро (nucleolus) кооперативной игры — это эффективное решение $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$, для которого достигается лексикографический минимум эксцессов на множестве всех непустых коалиций $S \in 2^N \backslash \phi$, выписанных в убывающем порядке.

Определение 4. Маргинальной выплатой игроку i называется величина $M_i = V(N) - V(N \backslash i)$, а минимальным правом игрока i —

$$m_i = \max_{\{S \backslash i \in S\}} \left(V(S) - \sum_{j \in S \backslash i} M_j \right).$$

Вектора $\vec{M}$ и $\vec{m}$ с компонентами M_i и m_i называются векторами маргинальных выплат и минимальных прав соответственно.

Определение 5. τ-значение — это решение кооперативной игры, задаваемое вектором, являющимся пересечением отрезка $[\vec{m}; \vec{M}]$ с гиперплоскостью эффективных решений

$$\sum_{i \in N} x_i = V(N).$$

2. Связь задачи о банкротстве с кооперативной теорией игр

В [2] была проанализирована задача о банкротстве на основе текстов Талмуда, в частности, была приведена такая притча. К раввину пришли два кредитора, один из которых претендовал на все наследство, а второй — на половину, и попросили их рассудить. Очевидно, удовлетворить претензии каждого из кредиторов в полной мере не представлялось возможным, и тогда раввин предложил такой вариант дележа. Поскольку первый кредитор претендует на все, то он не уступит второму ничего. Поскольку второй претендует на половину наследства, то он готов уступить первому половину. Если не хватает денег, чтобы удовлетворить претензии, то их хватит для того, чтобы удовлетворить уступки. Тогда нужно раздать каждому причитающуюся ему уступку (т.е. 1/2 и 0 соответственно), а оставшуюся сумму (т.е. 1/2) поделить между ними поровну. Таким образом, претенденты получат 3/4 и 1/4 от суммы наследства. Части наследства для двух кредиторов могут быть расчитаны по следующей формуле.

Если E — величина наследства, c_1, c_2 — претензии кредиторов, то они получат удовлетворение претензий в размере

$$x_i = \frac{(E - c_{3-i})_+ - (E - c_i)_+}{2}, \; i = 1, 2.$$

В [3] было предложено каждой задаче о банкротстве ставить в соответствие характеристическую функцию (х. ф.) кооперативной игры, вычисляемую по формуле

$$V(S) = \left(E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i\right)_+ \tag{3}$$

а кредиторов считать игроками в кооперативной игре с такой х.ф. Значение х.ф. от коалиции S — это уступка ей со стороны членов коалиции $N \setminus S$, т.е. сумма, которая останется после попытки полного удовлетворения претензий членов $N \setminus S$.

В [4] было показано, что такая х.ф. всегда является выпуклой, следовательно C-ядро игры не пусто, а такие решения кооперативной игры, как вектор Шепли, n-ядро и τ-значение заведомо принадлежат C-ядру.

При этом рассмотренная талмудическая притча является частным случаем кооперативной игры с х.ф. (3) для двух игроков, а вектор распределения (x_1, x_2) является одновременно вектором Шепли, n-ядром и τ-значением такой игры, а все возможные точки дележа, лежащие на отрезке, соединяющем точки уступок $(c_1; E - c_1)$ и $(E - c_2; c_2)$, образуют C-ядро игры.

3. Механизм проведения лотереи распределения дробных частей решения

Пусть в лотерее принимают участие $m \leq n$ агентов, чьи компоненты решения задачи о банкротстве оказались дробными. Обозначим $p_i = [x_i]$ и назовем эту величину претензией i-го игрока на выигрыш 1. Эта величина по сути означает вероятность в дальнейшем выиграть 1 (и прибавить ее к своей компоненте целочисленного решения).

Зададим некоторую перестановку игроков. Начальный набор исходов опишем так: $[1; (p_1; p_2; ...; p_m)]$. Рассмотрим два случая : $p_1 + p_2 \leq 1$ и $p_1 + p_2 > 1$.

Если $p_1 + p_2 \leq 1$, то пусть первый и второй игрок играют в справедливую азартную игру, ставками в которой являются их претензии, и таким образом, с вероятностью $\frac{p_1}{p_1+p_2}$ претензия первого игрока игроков увеличится до $p_1 + p_2$ а второго — упадет до нуля, а с вероятностью $\frac{p_2}{p_1+p_2}$ — наоборот и набор исходов описывается как

$$\left[\frac{p_1}{p_1 + p_2}; (p_1 + p_2;\ 0; p_3; ...; p_m)\right]; \quad \left[\frac{p_2}{p_1 + p_2}; (0; p_1 + p_2; p_3; ...; p_m)\right].$$

Здесь и далее в такой формуле компонента игрока, стоящая в круглых скобках означает вероятность получить 1 в данной лотерее (описываемой круглыми скобками), а компонента, стоящая за круглыми скобками — вероятность того, что система распределения придет к такой лотерее.

На втором и последующеих шагах вновь «дробим» каждое выражение, стоящее в квадратных скобках на два, реализуя сценарий азартной игры для двух игроков, стоящих слева, чьи компоненты строго больше нуля и меньше 1, до тех пор, пока все компоненты, стоящие в круглых скобках, не станут равными нулю либо 1. При этом механизм «дробления» лотерей строится таким образом, чтобы для каждого из игроков на каждом шаге полная вероятность выигрыша 1 (равная сумме произведений компоненты игрока в каждой лотерее на коэффициент, стоящий за круглыми скобками) равнялась его начальному шансу p_i.

Если же $p_1+p_2>1$, то ставками игроков являются дополнения претензий противников до 1, т.е $1-p_2$ и $1-p_1$ соответственно, и таким образом с вероятностью $\frac{1-p_2}{2-p_1-p_2}$ претензия первого игрока увеличится до 1, а второго — упадет до p_1+p_2-1, а с вероятностью $\frac{1-p_1}{2-p_1-p_2}$ — наоборот, и набор исходов описывается как

$$\left[\frac{1-p_2}{2-p_1-p_2};(1;\,p_1+p_2-1;p_3;...;p_m)\right];$$
$$\left[\frac{1-p_1}{2-p_1-p_2};(\,p_1+p_2-1;\,1;p_3;...;p_m)\right].$$

Сам процесс проведения лотерей достаточно прост и эффективен. Заметим, что на каждом шаге выбывает по крайней мере один участник (по причине того, что он получил либо 0, либо 1). Однако, процесс нахождения простой лотереи, которая эквивалентна проводимой последовательности лотерей, в общем случае может быть громоздким и порождать ветвящееся дерево исходов, поэтому рассмотрим некоторые особые случаи.

1) $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i=1$, т.е. разыгрывается только одна единица. Здесь независимо от перестановки игроков окончательный набор исходов имеет вид

$$[p_1;(1;0;...;0)]\,;\,[p_2;(0;1;0;...;0)]\,;...;\,[p_m;(0;...;0;1)]\,.$$

2) $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i=m-1$, т.е. разыгрывается количество единиц на 1 меньше количества игроков, следовательно, единица не достанется только одному игроку. Здесь независимо от перестановки игроков окончательный набор исходов имеет вид

$$[1-p_1;(0;1;...;1)]\,;\,[1-p_2;(1;0;1;...;1)]\,;...;\,[1-p_m;(1;...;1;0)]\,.$$

Заметим, что в случае трех игроков количество распределяемых единиц равно либо 1, либо 2, поэтому имеет место один из двух упомянутых случаев.

Рассмотрим типовой пример решения целочисленной задачи о банкротстве для трех игроков.

Пусть $\vec{c}=(23;\,11;\,4)\,,\ E=25$. Вычислим характеристическую функцию по формуле (3):

$V(1)=(25-11-4)_+=10,\quad V(2)=(25-23-4)_+=0,\quad V(3)=(25-23-11)_+=0,\quad V(1,2)=(25-4)_+=21,\quad V(1,3)=(25-11)_+=14,\quad V(2,3)=(25-23)_+=2,\quad V(1,2,3)=E=25.$

4. Решение для вектора Шепли

Применяя формулу (1) для случая трех игроков, имеем

$$Sh_1=\frac{1}{3}V(1)-\frac{1}{6}\left(V(2)+V(3)\right)+\frac{1}{6}\left(V(1,2)+V(1,3)\right)-\frac{1}{3}V(2,3)+\frac{1}{3}V(2,3).$$

Формулы для вычисления второй и третьей компонент вектора Шепли легко получаются из данной циклической перестановкой индексов игроков. Для характеристической функции рассматриваемого примера имеем

$$Sh = \left(16\frac{5}{6};\ 4\frac{2}{3};\ 3\frac{1}{2}\right).$$

Значит, игроки получают удовлетворения своих претензий в размере 16, 4 и 3 соответственно и кроме того, поскольку сумма дробных частей (равная 2) на единицу меньше количества игроков, то разыгрывается лотерея

$$L = [1/6; (0; 1; 1)]; [1/3; (1; 0; 1)]; [1/2; (1; 1; 0)].$$

5. Решение для n-ядра

В общем случае n-ядро кооперативной игры ищется путем решения последовательности вспомогательных задач линейного программирования, однако для случая трех игроков это значение может быть найдено аналитически (см. [5]). При этом вначале по исходной характеристической функции строится так называемая редуцированная характеристическая функция по формуле

$$W(S) = \frac{V(S) - \sum_{i\in S} V(i)}{V(N) - \sum_{i\in N} V(i)}.$$

Согласно построения значение редуцированной х.ф. от всех отдельных игроков равно нулю, а от гранд-коалиции — единице. Затем вычисляются значения $W(1,2)$, $W(1,3)$, $W(2,3)$ и упорядочиваются в порядке возрастания. Обозначим найденные значения через d_1, d_2, d_3, где

$$0 \le d_1 \le d_2 \le d_3 \le 1.$$

В зависимости от соотношения d_1, d_2, d_3 существует пять формул вычисления n-ядра для редуцированной х.ф. и при помощи обратного перехода от редуцированной х.ф. к исходной восстанавливаются значения n-ядра для исходной задачи по формуле

$$n_V(i) = \left(V(N) - \sum_{i\in N} V(i)\right) n_W(i) + V(i).$$

Для данной задачи имеем

$$V(1,2,3) - V(1) - V(2) - V(3) = 15;$$

$$W(2,3) = \frac{2-0-0}{15} = \frac{2}{15};\ \ W(1,3) = \frac{4}{15};\ \ W(1,2) = \frac{21-10-0}{15} = \frac{11}{15},$$

отсюда

$$\vec{d} = \left(\frac{2}{15};\ \frac{4}{15};\ \frac{11}{15}\right).$$

Причем оказалось, что порядок компонент вектора $\vec{d}$ соответствует естественному порядку игроков (1, 2, 3). В данном случае d_1, d_2, d_3 удовлетворяют соотношениям $d_3 > \frac{1}{3}$, $d_2 > \frac{1-d_3}{2}$, $d_1 \le \frac{1-d_3}{2}$ и значение n-ядра редуцированной х.ф. вычисляется по формуле

$$n_W = \left(\frac{d_2+d_3}{2}; \frac{1-d_2}{2}; \frac{1-d_3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{11}{30}; \frac{4}{30}\right),$$

а n-ядро исходной задачи равно

$$n_V = \left(15 \cdot \frac{1}{2} + 10;\ 15 \cdot \frac{11}{30} + 0;\ 15 \cdot \frac{4}{30} + 0\right) = \left(17\frac{1}{2};\ 5\frac{1}{2};\ 2\right).$$

Значит, игроки получают удовлетворения своих претензий в размере 17, 5 и 2 соответственно и кроме того разыгрывается лотерея

$$L = [1/2;\ (1;0;0)];\ [1/2;\ (0;1;0)].$$

6. Решение для τ-значения

Максимальные (утопические) претензии игроков равны

$$M_1 = V(1,2,3) - V(2,3) = 23, \quad M_2 = V(1,2,3) - V(1,3) = 11,$$

$$M_3 = V(1,2,3) - V(1,2) = 4.$$

Поскольку характеристическая функция V выпуклая, то компоненты вектора минимальных претензий mi совпадают с $V(i)$.

Таким образом, $\vec{M} = (23,11,4)$, $\vec{m} = (10,0,0)$. Компоненты τ-значения находим как координаты пересечения отрезка $[\vec{m};\ \vec{M}]$ и гиперплоскости эффективных распределений $x_1 + x_2 + x_3 = 25$. Имеем

$$\vec{\tau} = (16.964;\ 5.893;\ 0.143)\,.$$

Аналогично предыдущему случаю, игроки получают удовлетворения своих претензий в размере 16, 5 и 2 соответственно и разыгрывается лотерея, вероятности исходов которой находятся как дополнения дробных частей найденного значения $\vec{\tau}$

$$L = [0.036;\ (0;1;1)];\ [0.107;\ (1;0;1)];\ [0.857;\ (1;1;0)].$$

Литература

1. Schmeidler D. The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal of applied mathematics.* 1969. Vol. 17. P. 1163–1170.
2. Aumann R., Maschler M. Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. *Journal of economic theory.* 1985. No. 36. P. 195–213.
3. O'Neill B. A problems of rights arbitration from the Talmud. *Mathematical social sciences.* 1982. Vol. 2. P. 345–371.
4. Curiel I., Maschler B., Tijs S. Bankruptcy games. *Zeitshrift fur Operations Research.* 1987. Vol. 31. No. 5. P. 143–159.
5. Mazalov V. Mathematical game theory and applications. Wiley. 2014. 432 p.

Поступила: 28.03.2018 / Принята: 26.04.2018