Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2018, № 1 (127) | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.85
MSC 47J20, 49J40, 65K15, 90C25

MATHEMATICAL MODEL OF MAGNETIC FIELD SOURCE FOR MAGNETIC ORE-SEPARATOR

S. S. Zub, S. I. Lyashko, V. V. Semenov

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko Kyiv National University, Kyiv, Ukraine, E-mail: stah@univ.kiev.ua, {lyashko.serg, semenov.volodya}@gmail.com

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИСТОЧНИКА МАГНИТНОГО ПОЛЯ ДЛЯ МАГНИТНОГО СЕПАРАТОРА РУДЫ

С. С. Зуб, С. И. Ляшко, В. В. Семёнов

Факультет компьютерных наук и кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина, E-mail: stah@univ.kiev.ua, {lyashko.serg, semenov.volodya}@gmail.com

Abstract. The investigation of contactless separation process for magnetic materials by the action of magnetic field require effective mathematical models. The several independent models of this process can be identified. First of all, it is a model of the rigid body dynamics in magnetic field that is closely conected to the model of a body. Secondly, the model of magnetic field source that provides non-magnetic and magnetized materials separation. For optimization we must have effective models of numerical simulation by all parameters of the system.
Keywords: dynamic systems, mathematical models, optimization, ballistics, ecology.

Аннотация. Исследование процесса бесконтактного разделения магнитных материалов под действием магнитного поля требует создания эффективных математических моделей. Можно выделить несколько независимых моделей данного процесса. Прежде всего, это модель динамики твердого тела в магнитном поле, которая тесно связана с моделью тела. Во-вторых, это модель источника магнитного поля, которое обеспечивает необходимое разделенных немагнитных и намагниченных материалов. Для проведения оптимизации все модели должны быть достаточно эффективными для численного моделирования при всех необходимых параметрах системы.
Ключевые слова: динамические системы, математические модели, оптимизация, баллистика, экология.

1. Введение

В [1,2] предложен новый метод разделения магнитных материалов, основанный на бесконтактном воздействии на магнитный материал в полете.

Как хорошо известно из классических курсов макроскопической электродинамики, на тела, помещённые в неоднородное магнитное поле, действует сила, зависящая от магнитной проницаемости тела и степени неоднородности поля. У парамагнетиков объёмная плотность силы направлена в сторону увеличения индукции поля, тогда как у диамагнетиков объёмная плотность силы направлена в сторону уменьшения индукции поля.

В частности, магнитное и немагнитное тела, начинающие движение с одинаковой скоростью из одной и той же области поля, будут испытывать различные ускорения и будут двигаться по разным траекториям. В этом и состоит идея нашего метода.

Физические процессы, происходящие в ферромагнитных материалах под влиянием магнитного поля, очень сложны, и построение теоретических моделей, детально учитывающих все свойства этих веществ и тел, из них состоящих, не только невозможно, но и нецелесообразно.

Для исследования предложенного метода мы разрабатываем достаточно простые идеализированные модели, которые, тем не менее, отражают существенные свойства поведения тел в магнитном поле.

2. Математическая модель динамики намагниченного тела

Форма намагниченного тела может быть произвольной. При малых скоростях она будет мало влиять на траекторию тела. Поэтому в качестве модели тела мы выбираем простейшую его форму, т.е. шар. Тогда все моменты инерции равны, т.е. для шара массы m и радиуса R, имеем $I = \frac{2}{3}mR^2$. Объём шара, как известно $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

В [2] показано, что магнитная энергия шара есть

$$W_m = \frac{1}{2}\int (\mu_1 - \mu_2)\vec{H}_1\vec{H}_2,$$

где $\vec{H}_2$ — напряжённость внешнего магнитного поля, $\vec{H}_1$ — напряжённость поля внутри шара, аналогично μ_1, μ_2 — магнитные проницаемости внутри и вне шара.

Тогда действующая на шар со стороны поля сила имеет вид

$$\vec{F} = \nabla W_m.$$

Замечание 1. Предположим, что в пределах шара поле изменяется слабо, тогда магнитная энергия может быть приведена к виду [2]

$$W_m = \frac{1}{2}V\frac{3\chi}{3+\chi}\frac{1}{\mu_0}\vec{B}_0^2,$$

где $\vec{B}_0$ — индукция магнитного поля источника, χ — магнитная восприимчивость материала, μ_0 — магнитные проницаемости вакуума.

Так как магнитный момент шара параллелен внешнему полю, то магнитное поле не создает момента сил, также как и сила тяжести. Тогда вращательные степени свободы можно не рассматривать.

Таким образом, полная система уравнений движения имеет вид [2]

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \vec{v}; \\ \dot{\vec{v}} = \kappa B_s B_{s,r} \vec{e}_r - g\vec{e}_3, \end{cases}$$

где ϱ — плотность вещества, $\kappa = \frac{3\chi}{3+\chi}\frac{1}{\varrho\mu_0}$.

3. Математическая модель источника поля

Этот раздел посвящен вычислению магнитного поля модели магнита в виде параллелепипеда, ориентированного по осям координат и намагниченного вдоль оси z. К сожалению, в литературе не удалось найти решения этой задачи. Поэтому мы подробно осветим ход вычислений.

Выводим формулу скалярного магнитного потенциала φ и его производных $\varphi_{,r}, \varphi_{,rs}$ для магнитного полюса:

$$\begin{cases} \varphi & = \frac{1}{|\vec{x}|}; \\ \varphi_{,r} & = \partial_r \varphi = \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x^r}\frac{1}{\sqrt{x_k x^k}} = -\frac{1}{\sqrt{x_k x^k}^2}\frac{\partial}{\partial x^r}\sqrt{x_k x^k} = \\ & = -\frac{1}{\sqrt{x_k x^k}^2}\frac{1}{2\sqrt{x_k x^k}}\partial_r(x_k x^k) = -\frac{2x^r}{2\sqrt{x_k x^k}^3} = -\frac{x^r}{|\vec{x}|^3}; \\ \varphi_{,rs} & = \partial^2_{sr}\varphi = \partial_s(\varphi_{,r}) = \frac{\partial}{\partial x^s}\left(-\frac{x_r}{|\vec{x}|^3}\right) = \\ & = -\frac{\delta_{sr}}{|\vec{x}|^3} - x_r\frac{\partial}{\partial x^s}\left(\frac{1}{|\vec{x}|^3}\right) = -\frac{\delta_{sr}}{|\vec{x}|^3} - x_r\left(\frac{-3}{|\vec{x}|^4}\right)\frac{x_s}{|\vec{x}|} = \\ & = -\frac{\delta_{sr}}{|\vec{x}|^3} + 3\frac{x_r x_s}{|\vec{x}|^5} = \frac{1}{|\vec{x}|^3}\left(\frac{3x_r x_s}{|\vec{x}|^2} - \delta_{sr}\right) = \frac{3x_r x_s - \vec{x}^2\delta_{sr}}{|\vec{x}|^5}. \end{cases} \tag{1}$$

Рассмотрим намагниченную вдоль оси z пластину, широкая сторона которой перпендикулярна направлению движения магнитной руды, а узкая — параллельна направлению движения.

Высота пластины достаточно велика, чтобы влиянием нижнего края можно было пренебречь.

Затем можно будет скомбинировать две такие пластины для создания квазиоднородного поля в области «инжекции» магнитной руды.

Идея состоит в том, чтобы составить такую пластину из тонких цилиндров, используя результаты (1), т.е., фактически, интегрируя выражения для поля по точкам расположения магнитных полюсов в плоскости, перпендикулярной оси z.

При этом, видимо, выгоднее интегрировать выражения для компонент поля, а не выражение для потенциала, т.к. при первом же интегрировании потециала возникают логарифмы.

Запишем компоненты поля магнитного «полюса», расположенного в точке с координатами a, b, c

$$\begin{cases} \varphi_{,x} = -(x-a)\cdot[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{-\frac{3}{2}}; \\ \varphi_{,y} = -(y-b)\cdot[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{-\frac{3}{2}}; \\ \varphi_{,z} = -(z-c)\cdot[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{-\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Необходимо взять двойной интеграл по переменным a, b. Во всех интегралах c является константой, поэтому можно несколько упростить подынтегральные выражения

$$\begin{cases} \varphi_{,x} &= -(x-a)\cdot[(x-a)^2+(y-b)^2+C^2]^{-\frac{3}{2}}; \\ \varphi_{,y} &= -(y-b)\cdot[(x-a)^2+(y-b)^2+C^2]^{-\frac{3}{2}}; \\ \varphi_{,z} &= -C\cdot[(x-a)^2+(y-b)^2+C^2]^{-\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Наибольшую сложность представляет вычисление двойного интеграла от z-компоненты поля.

Однако, 1-й интеграл (неопределённый) вычисляется легко с использованием формулы

$$\int \frac{da}{[(a-x)^2+D^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{(a-x)}{D^2\cdot[(a-x)^2+D^2]^{\frac{1}{2}}},$$

где

$$D^2 = (y-b)^2+C^2.$$

Таким образом,

$$\int_0^u \varphi_{,z}da = -\frac{uC}{[(y-b)^2+C^2][(a-x)^2+(y-b)^2+C^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

2-й интеграл имеется в справочнике [3, с.94].

Проверочное дифференцирование даёт правильный результат

$$\int \frac{db}{[(b-y)^2+C^2]\cdot[(b-y)^2+E^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{C[E^2-C^2]^{\frac{1}{2}}}\arctan\frac{(b-y)[E^2-C^2]^{\frac{1}{2}}}{C[(b-y)^2+E^2]^{\frac{1}{2}}},$$

где

$$E^2 = (x-a)^2+C^2.$$

Таким образом

$$\int \varphi_{,z}da = \frac{C(x-a)}{[(y-b)^2+C^2]\cdot[(a-x)^2+(y-b)^2+C^2]^{\frac{1}{2}}}$$

и

$$\int\int \varphi_{,z}dadb = \frac{(x-a)}{[(x-a)^2]^{\frac{1}{2}}}\arctan\frac{(b-y)[(x-a)^2]^{\frac{1}{2}}}{(z-c)[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

При этом вопросы вызывают знаки квадратных корней.

Прямое вычисление производных при помощи Maple даёт для величины

$$\psi_z(x,y,z;a,b,c) = -\arctan\frac{(x-a)(y-b)}{(z-c)[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{1}{2}}} \qquad (2)$$

следующий результат

$$\partial_a \partial_b \psi_z = -\frac{(z-c)}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} = \varphi_{,z}.$$

Поэтому,

$$\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \int_{-\frac{u}{2}}^{\frac{u}{2}} \varphi_{,z} dadb = \psi_z(x,y,z;\frac{u}{2},\frac{w}{2},c) - \psi_z(x,y,z;-\frac{u}{2},\frac{w}{2},c) \tag{3}$$

$$-\psi_z(x,y,z;\frac{u}{2},-\frac{w}{2},c) + \psi_z(x,y,z;-\frac{u}{2},-\frac{w}{2},c).$$

Для 1-й компоненты всё значительно проще

$$\int \frac{-(x-a)da}{[(a-x)^2+D^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{[(a-x)^2+D^2]^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{[(b-y)^2+E^2]^{\frac{1}{2}}},$$

где D и E определены, как и ранее.

Интегрирование по b дает следующий результат

$$\int \frac{-db}{[(b-y)^2+E^2]^{\frac{1}{2}}} = -\ln(b-y+[(b-y)^2+E^2]^{\frac{1}{2}}).$$

Введём величину

$$\psi_x(x,y,z;a,b,c) = -\ln(b-y+[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{1}{2}}), \tag{4}$$

тогда

$$\partial_a \partial_b \psi_x = -\frac{(x-a)}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} = \varphi_{,x}.$$

Аналогично введём величину

$$\psi_y(x,y,z;a,b,c) = -\ln(a-x+[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{1}{2}}), \tag{5}$$

тогда

$$\partial_a \partial_b \psi_y = -\frac{(y-b)}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} = \varphi_{,y}.$$

Отсюда

$$\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \int_{-\frac{u}{2}}^{\frac{u}{2}} \varphi_{,x} dadb = \psi_x(x,y,z;\frac{u}{2},\frac{w}{2},c) - \psi_x(x,y,z;-\frac{u}{2},\frac{w}{2},c) - \tag{6}$$

$$-\psi_x(x,y,z;\frac{u}{2},-\frac{w}{2},c) + \psi_x(x,y,z;-\frac{u}{2},-\frac{w}{2},c)$$

и

$$\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \int_{-\frac{u}{2}}^{\frac{u}{2}} \varphi_{,y} dadb = \psi_y(x,y,z;\frac{u}{2},\frac{w}{2},c) - \psi_y(x,y,z;-\frac{u}{2},\frac{w}{2},c) - \tag{7}$$

$$-\psi_y(x,y,z;\frac{u}{2},-\frac{w}{2},c) + \psi_y(x,y,z;-\frac{u}{2},-\frac{w}{2},c).$$

Полученные величины описывают поле, создаваемое слоем прямоугольной формы со сторонами u и w магнитных полюсов, расположенных на высоте c. Чтобы описать поле бруска, необходимо вычесть поле аналогичного слоя, расположеного на высоте $c - l$

$$\begin{aligned}\beta_i(x,y,z;z_0,u,w,l) = \psi_i(x,y,z;\frac{u}{2},\frac{w}{2},z_0) - \psi_i(x,y,z;-\frac{u}{2},\frac{w}{2},z_0) - \\ -\psi_i(x,y,z;\frac{u}{2},-\frac{w}{2},z_0) + \psi_i(x,y,z;-\frac{u}{2},-\frac{w}{2},z_0) - \\ -\psi_i(x,y,z;\frac{u}{2},\frac{w}{2},z_0-l) + \psi_i(x,y,z;-\frac{u}{2},\frac{w}{2},z_0-l) + \\ +\psi_i(x,y,z;\frac{u}{2},-\frac{w}{2},z_0-l) - \psi_i(x,y,z;-\frac{u}{2},-\frac{w}{2},z_0-l),\end{aligned} \tag{8}$$

где соответственно u, w, l — геометрические размеры параллелепипеда, z_0 — координата его верхней грани, а индекс i принимает значение x, y, z.

Учитывая соотношение между магнитным полем и магнитными полюсами, окончательно получим выражение для магнитной индукции, создаваемой нашим магнитом в форме параллелепипеда

$$B_i(x,y,z;z_0,u,w,l) = -\frac{\mu_0 J}{4\pi}\beta_i(x,y,z;z_0,u,w,l),$$

где J - намагниченость материала параллелепипеда $\left[\frac{A}{m}\right]$.

Знак «-» появляется ввиду $\vec{B} = -\nabla\psi$, где ψ — скалярный потенциал магнитного поля.

Замечание 2. Важной проверкой правильности вычислений может служить проверка равенства смешанных производных потенциала.

Замечание 3. Собственно, сам потенциал аналитически вычислить не удалось (мы вычислили его производные), однако его существование накладывает соотношения вида

$$\psi_{i,k} = \psi_{k,i},$$

где i, k пробегают значения x, y, z.

Соотношения $\psi_{x,y} = \psi_{y,x}$ проверяется очень легко. Некоторые вопросы вызывала проверка равенств $\psi_{z,x} = \psi_{x,z}$ и $\psi_{z,y} = \psi_{y,z}$. Дело в том, что если вычислить данные производные для неопределенных повторных интегралов (2), (4), (5), то равенства не будет. Однако, члены, на которые отличаются правые и левые стороны, вычитаются и обращаются в 0 в определенных интегралах (3), (6), (7).

Выражения $\psi_{x,z}$ ($\psi_{y,z}$) для неопределенных интегралов имеют несколько более простой вид, нежели $\psi_{z,x}$ ($\psi_{z,y}$), так что использовать их более предпочтительно.

Как и в предыдущих вычислениях, можно за основу взять неопределенные интегралы (в данном случае — их производные). Соответствующие выражения имеют вид

$$\psi_{xx}(x,y,z;a,b,c) =$$
$$= \frac{a-x}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(z-c)^2]^{1/2}[b-y+((a-x)^2+(b-y)^2+(z-c)^2)^{1/2}]}.$$

Аналогично для ψ_{xy}, ψ_{xz}, ψ_{yx}, ψ_{yy}, ψ_{yz}, ψ_{zx}, ψ_{zy}, ψ_{zz}.

Имеет смысл для компактности записи ввести векторные обозначения

$$\vec{x} = (x, y, z); \quad \vec{a} = (a, b, c); \quad |\vec{x} - \vec{a}| = [(a - x)^2 + (b - y)^2 + (z - c)^2]^{1/2}.$$

Тогда формулы получат следующий вид

$$\psi_{xx}(x, y, z; a, b, c) = -\frac{(\vec{x} - \vec{a})_1}{|\vec{x} - \vec{a}| \cdot (|\vec{x} - \vec{a}| - (\vec{x} - \vec{a})_2)};$$

$$\psi_{xy}(x, y, z; a, b, c) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|};$$

$$\psi_{xz}(x, y, z; a, b, c) = -\frac{(\vec{x} - \vec{a})_3}{|\vec{x} - \vec{a}| \cdot (|\vec{x} - \vec{a}| - (\vec{x} - \vec{a})_2)};$$

$$\psi_{yx}(x, y, z; a, b, c) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|};$$

$$\psi_{yy}(x, y, z; a, b, c) = -\frac{(\vec{x} - \vec{a})_2}{|\vec{x} - \vec{a}| \cdot (|\vec{x} - \vec{a}| - (\vec{x} - \vec{a})_1)};$$

$$\psi_{yz}(x, y, z; a, b, c) = -\frac{(\vec{x} - \vec{a})_3}{|\vec{x} - \vec{a}| \cdot (|\vec{x} - \vec{a}| - (\vec{x} - \vec{a})_1)};$$

$$\psi_{zx}(x, y, z; a, b, c) = -\frac{(\vec{x} - \vec{a})_2(\vec{x} - \vec{a})_3}{|\vec{x} - \vec{a}| \cdot (|\vec{x} - \vec{a}|^2 - (\vec{x} - \vec{a})_2^2)};$$

$$\psi_{zy}(x, y, z; a, b, c) = -\frac{(\vec{x} - \vec{a})_1(\vec{x} - \vec{a})_3}{|\vec{x} - \vec{a}| \cdot (|\vec{x} - \vec{a}|^2 - (\vec{x} - \vec{a})_1^2)};$$

$$\psi_{zz}(x, y, z; a, b, c) = \frac{(\vec{x} - \vec{a})_1(\vec{x} - \vec{a})_2 \cdot (|\vec{x} - \vec{a}|^2 + (\vec{x} - \vec{a})_3^2)}{|\vec{x} - \vec{a}| \cdot (|\vec{x} - \vec{a}|^2(\vec{x} - \vec{a})_3^2 + (\vec{x} - \vec{a})_1^2(\vec{x} - \vec{a})_2^2)}.$$

Для получения окончательного ответа (т.е. нахождения определенных интегралов) надо поступить, как в соотношении (8).

Замечание 4. Итак, нами рассмотрен параллелепипед, который сориентирован по осям координат и намагничен вдоль оси z.

Теперь мы хотим получить магнитное поле, которое создается нашим параллелепипедом при его произвольном движении в плоскости xz.

Общее линейное преобразование векторов имеет вид

$$L(\vec{x}) = L(x^r \vec{e}_r) = x^r L(\vec{e}_r) = x^r L^s{}_r \vec{e}_s = (L^s{}_r x^r)\vec{e}_s, = x'^s \vec{e}_s,$$

а поворот на угол θ в плоскости xz описывается следующим образом

$$\begin{cases} \vec{e}_x{}' = L^1{}_1 \vec{e}_x + L^2{}_1 \vec{e}_z = \vec{e}_x \cos\theta + \vec{e}_z \sin\theta; \\ \vec{e}_z{}' = L^1{}_2 \vec{e}_x + L^2{}_2 \vec{e}_z = -\vec{e}_x \sin\theta + \vec{e}_z \cos\theta. \end{cases}$$

Отсюда

$$L_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Предположим теперь, что к повороту добавляется трансляция на вектор $\vec{t}$, тогда

$$\vec{x} = L_\theta(\vec{x}') + \vec{t}; \qquad \vec{x}\,' = L_\theta^{-1}(\vec{x} - \vec{t}) = L_{(-\theta)}(\vec{x} - \vec{t}).$$

Тогда общее тензорное преобразование поля и его градиента выглядит так

$$\begin{cases} B^r(x) = x^r{}_{,r'} B^{r'}(x'); \\ B^r{}_{,s}(x) = x^r{}_{,r'} x^{s'}{}_{,s} B^{r'}{}_{,s'}(x'). \end{cases}$$

Для ортогональных преобразований эти соотношения упрощаются

$$\begin{cases} B^r(x) = L_{(\theta)}{}^r{}_{r'} B^{r'}(x'); \\ B^{r,s}(x) = L_{(\theta)}{}^r{}_{r'} L_{(\theta)}{}^s{}_{s'} B^{r',s'}(x'). \end{cases}$$

4. Заключение

Оценки по предложенным математическим моделям показывают обоснованность предложенного метода. Траектории намагниченных и немагнитных тел оказываются пространственно разделёнными. Величина разделения существенным образом зависит от магнитных свойств вещества с одной стороны, и от величины поля в области бросания с другой стороны. Для окончательного вывода о применимости метода для различных типов магнитных материалов необходимы дополнительные исследования.

Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект № F74/24921) и Министерства образования и науки Украины (проект № 0116U004777).

Литература

1. Zub S. S., Kivirenko O. B., Lyakhno V. Yu. Investigation of non-contact magnetic action on an ore sample moving in the field. 2009. https://www.researchgate.net/publication/324773086_zub-report-2009
2. Zub S. I., Zub S. S., Lyashko S. I. Method of magnetic ore separation on the fly. XVI conference on high-energy physics, nuclear physics and accelerators, Kharkiv, NSC KIPT, 20-23 of March 2018.
3. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Integrals and series. Elementary Functions. Moscow: Nauka, 1981. (in Russian)

Поступила: 19.04.2018 / Принята: 21.05.2018