

УДК 517.9

MSC 47J20, 49J40, 65K15, 90C25

Training of Artificial Neural Network

I.Sh. Didmanidze, G.A. Kakhiani, D.Z. Didmanidze

Batumi Shota Rustaveli state university, Batumi, Georgia

E-mail: ibraimd@mail.ru, g.kakhiani@bsu.edu.ge

The methodology of neural networks is even more often applied in tasks of management and decision-making, including in the sphere of trade and finance. The basis of neural networks is made by nonlinear adaptive systems which proved the efficiency at the solution of problems of forecasting.

Key words: Artificial neural network, nonlinear adaptive systems, synchronization of neural networks, neural network.

Обучение искусственной нейронной сети

И.Ш. Дидманидзе, Г.А. Кахиани, Д.З. Дидманидзе

Батумский государственный университет Щота Руставели, Батуми, Грузия

E-mail: ibraimd@mail.ru, g.kakhiani@bsu.edu.ge

Методология нейронных сетей всё чаще применяется в задачах управления и принятия решений, в том числе в сфере торговли и финансов. Основу нейронных сетей составляют нелинейные адаптивные системы, которые доказали свою эффективность при решении задач прогнозирования.

Ключевые слова: искусственная нейронная сеть, нелинейные адаптивные системы, синхронизация нейронных сетей, нейронная сеть.

1. Введение

Эффективность обучения многослойных нейронных сетей связана с количеством слоев, количеством нейронов в скрытых слоях и начальным уровнем инициализации синоптических коэффициентами между нейронами.

Чем больше количество нейронов в скрытых слоях, тем больше точность работы сети, однако слишком большое количество нейронов в скрытых слоях может привести к так называемый, переобучению нейронной сети. Делается следующие выводы:

1. Нейронная сеть с одним скрытым слоем в состоянии отобразить любой входной вектор в любой выходной
2. Количество нейронов в скрытом слое должен быть меньше набора объема данных, предназначенных для обучения нейронной сети
3. Мощность нейронной сети может быть увеличена как за счёт увеличения количества скрытых слоев, так и за счёт количества самих нейронов в скрытых слоях
4. Начальная инициализация синоптических связей внутри нейронной сети должна производиться в достаточно узком диапазоне значений.

2. Основная часть

Поведение искусственной нейронной сети зависит не только от коэффициентов синаптических связей, но также и от вида функции активации (возбуждения) нейрона. Известны три основные функции активации: единичный скачок или жесткая пороговая функция, линейный порог или гистерезис, сигмоидальная функция или сигмоид. При использовании линейного порога выходное значение нейрона устанавливается в одно из двух положений в зависимости от входящих данных. При использовании линейного порога выходное значение нейрона пропорционально входному значению. В случае с сигмоидальной функцией изменения выходного сигнала происходит пропорционально входному, однако эта зависимость нелинейна. Нейронные сети, предназначенные для решения конкретной задачи свои свойства, получают в результате обучения. Обучение подразумевает или определение коэффициентов синаптических связей или определение особых правил, согласно которым и будут изменяться синаптические связи в зависимости от реакции тех или иных нейронов в сети. Обучение сети производится с целью выработать желаемое (адекватное) множество реакций нейронной сети на множество входных данных сети. Каждое такое входящее или исходящее множество рассматривается как вектор. Обучение происходит путём подачи на вход каждого множества и выработки соответствующих синаптических связей согласно заранее выработанным правилам. Нейронные сети могут быть обучены одновременно, в этом случае имеет место синхронизация нейронных сетей. Различают два алгоритма обучения нейронной сети: обучение с учителем и обучение без учителя. При обучении с учителем подразумевается, что для каждого входящего вектора имеется заранее определенный выходящий вектор (целевой) значений и их вместе называют обучающим примером. Обычно процесс обучения происходит на определенном наборе обучающих примеров. Сети подаётся входной вектор, вычисляется исходящий вектор и происходит его сравнение с целевым вектором, разница (ошибка) посредством обратной связи возвращается сети и синаптические связи меняются с целью минимизации возвращенной ошибки. Примеры подаются последовательно один за другим пока суммарная ошибка сети по всем примерам не будет меньше заранее определенного порогового значения. Примерами алгоритмов обучения с учителем являются: алгоритм обучения персептрона (модель Розенблатта) и алгоритм обратного распространения ошибки.

Рассмотрим алгоритм обратного распространения ошибки. Согласно этому алгоритму на каждой итерации процесса обучения сети скорость обучения каждого слоя должна быть подобрана таким образом чтобы минимизировать средне-квадратическую ошибку сети:

$$\min E(y_j(t+1)),$$

где $j = \overline{1, m}$, m – количество нейронов в последнем слое. Выходное значение j -го нейрона зависит от функций активации и в общем случае определяется следующим образом:

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) - a(t) \frac{\partial E}{\partial w_{ij}}, \quad (1)$$

$$T_j(t+1) = T_j(t) - a(t) \frac{\partial E}{\partial T_j(t)}. \quad (2)$$

Среднеквадратическую ошибку сети можно выразить следующим образом: $E = \frac{1}{2} \sum_j (y_j - t_j)^2$. Тогда для отыскания $a(t)$ необходимо решить следующее

уравнение: $\frac{\partial E}{\partial a(t)} = \frac{\partial E}{\partial y_j(t+1)} \frac{\partial y_j(t+1)}{\partial a(t)}$. В ряде работ для поиска адаптивной скоро-

сти обучения предлагается использование метода линейного спуска. Однако этот подход связан с большим объемом вычислений. Поэтому предлагаем воспользоваться приближенным методом нахождения $a(t)$, который основывается на разложении в ряд Тейлора функции активации нейрона

Пусть выходное значение j -го нейрона последнего слоя вычисляется следующим образом:

$$y_j(t) = F(S_j(t)), \quad S_j(t) = \sum_i y_i(t) w_{ij}(t) - T_j(t), \quad (3)$$

где $y_i(t)$ – значение i -го нейрона скрытого слоя. Для поиска значения j -го нейрона в $t+1$ момент времени в (3) подставим (1) и (2):

$$S_j(t+1) = \sum_i y_i(t) \left(w_{ij} - a \frac{\partial E}{\partial w_{ij}} \right) - T_j + a \frac{\partial E}{\partial T_j} = \sum_i y_i w_{ij} - T_j + a \left(\sum_j y_j \frac{\partial E}{\partial w_{ij}} - \frac{\partial E}{\partial T_j} \right). \quad (4)$$

Введем следующие обозначения:

$$a_j = \sum_j y_j \frac{\partial E}{\partial w_{ij}} - \frac{\partial E}{\partial T_j}. \quad (5)$$

Тогда (4) можно переписать следующим образом:

$$S_j(t+1) = S_j(t) - aa_j. \quad (6)$$

Для $t+1$ момента времени выходное значение j -го нейрона будет равно:

$$y_j(t+1) = F(S_j(t+1)).$$

Раскроем последнее выражение в ряд Тейлора с точностью первых двух членов:

$$y_j(t+1) = F(0) + F'(0)F(S_j(t+1)), \quad (7)$$

где $F'(0) = \frac{\partial F}{\partial S_j}$, когда $S_j = 0$. С учётом (7) в (6) получим:

$$y_j(t) = F(0) + F'(0)S_j(t) - aF'(0)a_j. \quad (8)$$

Так как $y_j(t) = F(0) + F'(0)S_j(t)$, тогда (8) можно представить следующим образом:

$$y_j(t+1) = y_j(t)F(0) - aF'(0)a_j. \quad (9)$$

Для адаптивной скорости обучения следует обеспечить выполнение следующего условия:

$$E = \frac{1}{2} \sum_j (y_j(t+1) - t_j)^2 \rightarrow \min.$$

Тогда $\frac{\partial E}{\partial a} = \sum_j (y_j(t) - t_j - aF'(0)a_j)(-F'(0)a_j) = 0$. Из последнего выражения отыщем $a(t)$, получим:

$$a(t) = \frac{\sum_j (y_j(t) - t_j) a_j}{F'(0) \sum_j a_j^2}. \quad (10)$$

Так как $\frac{\partial^2 E}{\partial a^2} > 0$, тогда для $a(t)$ – достигается минимум среднеквадратической ошибки. Отыщем выражение для a_j . Для этого введем определение:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial E}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial S_j} \frac{\partial S_j}{\partial w_{ij}} = (y_j - t_j) F'(S_j) y_j, \quad (11)$$

$$\frac{\partial E}{\partial T_j} = \frac{\partial E}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial S_j} \frac{\partial S_j}{\partial T_j} = -(y_j - t_j) F'(S_j). \quad (12)$$

Если (11) и (12) подставить в (5) получим:

$$a_j = \left(1 + \sum_i y_i^2\right) (y_j - t_j) F'(S_j). \quad (13)$$

Исходя из принципа независимости слоёв, предположим, что:

$$\gamma_j = y_j - t_j. \quad (14)$$

Если учесть (14) и (13) в (10) получим выражение для расчета примерной скорости адаптивного обучения нейронной сети:

$$a(t) = \frac{\sum_j \gamma_j^2 F'(S_j)}{F'(0) \left(1 + \sum_i y_i^2\right) \sum_j \gamma_j^2 \left(F'(S_j)\right)^2}, \quad (15)$$

где γ_j – ошибка j -го нейронного элемента сети.

3. Заключение

Следует отметить, что для каждого слоя сети $a(t)$ рассчитывается отдельно. Как показали численные эксперименты в случае применения адаптивной скорости обучения сети $a(t)$ может принимать большие значения. Это может привести к десинхронизации процесса обучения сети, когда весовые коэффициенты нейронной сети резко меняются в одном направлении. В результате чего изменения среднеквадратической ошибки по времени получит колебательный характер. Поэтому рекомендуется ограничивать значение $a(t)$ по его абсолютному значению.

Полученные выше выражения для адаптивной скорости обучения позволяют ощутимо повысить скорость обучения нейронной сети и обойти проблему подбора скорости обучения произвольным образом. Это является ощутимым преимуществом по сравнению со стандартным алгоритмом обратного распространения ошибки. Хотя при удачном подборе скорости обучения сети время работы данного алгоритма не превышает время работы стандартного алгоритма градиентного спуска.

ЛИТЕРАТУРА

1. Didmanidze Ibraim, Kakhiani Gregori, Shatashvili Tamara, Dumbadze Zurab. The process of learning in artificial neural networks. XXXV international conference "Problems of decision making under uncertainties" (PDMU-2020). Abstracts. May 11-15, 2020, Baku-Sheki, Republic of Azerbaijan, p. 36.
2. Дидманидзе И.Ш., Кахиани Г.А., Дидманидзе Д.З. Эффективность стратегии управления капиталом в торговле на бирже. материалы II Международной научно-практической конференций «Актуальные проблемы развития ресторанного, гостиничного и туристического бизнеса в условиях мировой интеграции: достижения и перспективы». 19-20 сентября 2019 года. Харьков–Варна. ХДУХТ 2019. С.194–197.
3. Didmanidze I., Kakhiani G., Didmanidze D., Dumbadze Z. Neural network's modeling problem. XXXIII International conference "Problems of decision making under uncertainties" (PDMU-2019). Abstracts. January 24 – February 1, 2019, Hurgada, Egypt. P. 35.
4. Didmanidze Ibraim, Kakhiani Grigol, Kakhidze Revaz. Dumbadze Zurab. Securities portfolio management through artificial neural networks. Материалы 6-ой международной конференции «Математическое моделирование, оптимизация информационных технологии» (ММОТИ-2018). 2018 г. Кишинэу, 12-16 ноября 2018 г. С. 73–75.
5. Didmanidze I., Shatashvili A., Kakhiani G., Fomina T., Dumbadze Z. Selection of adaptive artificial neural networks learning speed. XXXI International conference "Problems of decision making under uncertainties" (PDMU-2018). Abstracts. July 3-8, 2018, Lankaran-Baku, Republic of Azerbaijan. P. 53.
6. Didmanidze I., Kakhiani G., Didmanidze D., Dumbadze Z. Task of modeling the single line neural network's. XXXII international conference "Problems of decision making under uncertainties" (PDMU-2018). Abstracts. August 27-31, 2018, Prague, Czech Republic. P. 38.
7. Головкин В.А. Нейронные сети: обучение, организация и применение. М.: ИПРЖР, 2001. 256 с.

Надійшла 18.05.2021.

Навчання штучної нейронної мережі

І.Ш. Дідманідзе, Г.А. Кахіані, Д.З. Дідманідзе
Батумський державний університет Щота Руставелі, Батумі, Грузія
E-mail: ibraimd@mail.ru, g.kakhiani@bsu.edu.ge

Методологія нейронних мереж все частіше застосовується в задачах управління та прийняття рішень, в тому числі в сфері торгівлі і фінансів. Основу нейронних мереж складають нелінійні адаптивні системи, які довели свою ефективність при вирішенні задач прогнозування.

Ключові слова: штучна нейронна мережа, нелінійні адаптивні системи, синхронізація нейронних мереж, нейронна мережа.

УДК 532.5.031:004.942

MSC 76D17

Numerical scheme for calculating the boundary layer when modeling by the method of discrete vortices

S.O. Dovgiy

Institute of Telecommunications and Global Information Space, Kyiv, Ukraine

E-mail: itelua@kv.ukrtel.net

G.G. Bulanchuk

Pryazovskyi State Technical University, Mariupol, Ukraine

E-mail: ggbulan7@gmail.com

O.M. Bulanchuk

Donetsk State University of Management, Mariupol, Ukraine

E-mail: obulan65@gmail.com

In this paper, a six-point finite-difference numerical scheme for calculating the Prandtl equation of a laminar boundary layer is proposed to determine the point of separation of flows with large Reynolds numbers when flowing around smooth bodies. The input data for this scheme are the results of modeling by the method of discrete vortices within the model of an ideal fluid. The velocity profile around the critical point is determined from the analytical solution. The resulting system of linear algebraic equations is solved by the run method. Because the coefficients of the system are nonlinear, the iteration method is used to find the solution. The thickness of the boundary layer is determined during the solution process. The point of separation and circulation of descending vortices is determined from the calculation of the boundary layer. Then at the point of separation the rise of several free vortices is modeled, the dynamics of which is modeled within the method of discrete vortices. The scheme was tested on the problem of the flow around the cylinder and showed good results in comparison with the experimental data and calculations of other authors.

Key words: discrete vortex method, Prandtl equation, boundary layer equation, separation point, vortex descent.

Чисельна схема розрахунку пограничного шару при моделюванні методом дискретних вихорів

С.О. Довгий

Інститут телекомунікацій та глобального інформаційного простору, Київ, Україна

E-mail: itelua@kv.ukrtel.net

Г.Г. Буланчук

ДВНЗ “ Приазовський державний технічний університет”, Маріуполь, Україна

E-mail: ggbulan7@gmail.com

О.М. Буланчук

Донецький державний університет управління, Маріуполь, Україна

E-mail: obulan65@gmail.com

У даній роботі для визначення точки відриву течій із великими числами Рейнольдса при обтіканні гладких тіл пропонується шеститочкова кінцево-різницева чисельна схема розрахунку рівняння Прандтля ламінарного пограничного шару. Вхідними даними для даної схеми є результати моделювання методом дискретних ви-

хорів у рамках моделі ідеальної рідини. Профіль швидкості в околі критичної точки визначається із аналітичного розв'язку. Отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язується методом прогонки. Оскільки коефіцієнти системи є нелінійними, то для знаходження розв'язку використовується метод ітерацій. Товщина пограничного шару визначається в процесі розв'язку. Точка відриву та циркуляції вихорів, що сходять, отримуються із розрахунку пограничного шару. Потім в точці відриву моделюється схід вільних вихорів, динаміка яких визначається в рамках методу дискретних вихорів. Схема була апробована на задачі обтікання циліндра і показала добрі результати в порівнянні з експериментальними даними та розрахунками інших авторів.

Ключові слова: метод дискретних вихорів, рівняння Прандтля, рівняння пограничного шару, точка відриву, схід вихорів.

1. Вступ

На сьогодні теорія ламінарних і турбулентних пограничних шарів продовжує розвиватись і є самостійною областю механіки рідини і газу. Під пограничним шаром розуміють тонку область вихрової течії, де різко змінюється швидкість потоку. Якщо характер течії у пограничному шарі ламінарний, то розглядають ламінарний пограничний шар. Основна умова його утворення – значне число Рейнольдса. Рівняння ламінарного пограничного шару було отримане Прандтлем у 1904 році [1] і має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Вихори, що утворились біля поверхні тіла, зносяться зовнішнім потоком (конвекція) і дифундують за рахунок в'язкості. Якщо явище конвекції переважає, то пограничний шар залишається досить тонким, його відносна товщина має порядок

$$O\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right).$$

У методі дискретних вихорів [2, 3] використовується модель ідеальної рідини, тому зазвичай розглядають інерційний відрив потоку з гострих крайок. Інтерес до пограничного шару в даному методі викликаний бажанням врахувати в'язкий відрив від поверхні тіла гладкої форми. Це, зокрема, можна зробити при спільному використанні моделі ідеальної рідини для зовнішнього потоку і моделі пограничного шару біля тіла.

У роботі [4] була запропонована чисельна схема розрахунку нестационарного ламінарного пограничного шару і наведені ряд результатів. Однак, основні роботи, на які посилаються в цій книзі, недоступні і даний напрямок не отримав подальшого розвитку, хоча, ми вважаємо, є досить перспективним.

Тому в даній роботі розглянута дещо інша схема інтегрування пограничного шару, яка може бути використана для знаходження точки в'язкого відриву з подальшим використанням у методі дискретних вихорів для сходу вільних вихорів.

2. Чисельна схема пограничного шару

Задача розв'язувалась у безрозмірному вигляді. За характерні розміри вибрано модуль швидкості на нескінченності v_∞ та величину D , наприклад, діаметр циліндра, якщо ми розглядаємо обтікання циліндра. Безрозмірні величини будуть мати вигляд:

$$\tilde{u} = \frac{u}{v_\infty}, \tilde{v} = \frac{v}{v_\infty}, \tilde{p} = \frac{p}{\rho v_\infty^2 / 2}, \tilde{x} = \frac{x}{D}, \tilde{y} = \frac{y}{D}, \tau = \frac{t}{D/v_\infty}.$$

Тоді рівняння (1) у безрозмірних координатах буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де $R_e = \frac{v_\infty D}{\nu}$ – число Рейнольдса.

Хоча ми розглядаємо нестационарний процес, але на кожному кроці по часу ми вважаємо, що пограничний шар стаціонарний, тому розв'язуємо рівняння (2) в припущенні, що $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = 0$.

Для розв'язку рівняння (2) використовувалась шеститочкова чисельна схема (рис.1). При переході від одного шару до іншого кривизною поверхні нехтували, вважаючи що на одному кроці радіус кривизни поверхні значно більший ніж відстань між вузлами. Шар з індексом j знаходиться в контрольній точці. Розрахунки проводились послідовно, рухаючись від критичної точки (на малюнку показано рух зліва направо) по перерізам пограничного шару. В якості початкового профілю швидкості використовувався точний розв'язок рівняння Нав'є-Стокса в околі кри-

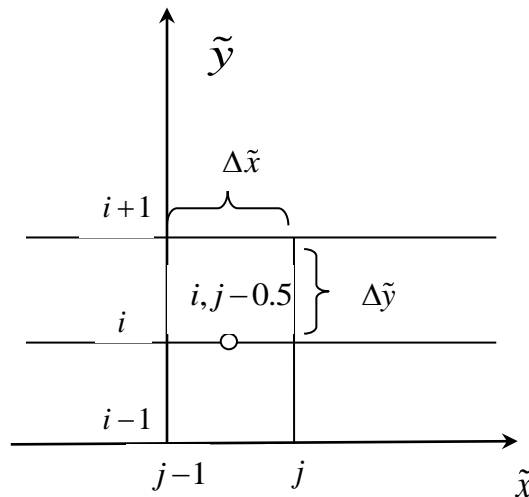


Рисунок 1. Шеститочкова чисельна схема пограничного шару

тичної точки [5]. Переріз пограничного шару будемо позначати індексом j . Всі величини у формулі (2) обчислювались у середній точці $(\tilde{x}_{i,j-0.5})$ (рис.1).

Значення величин в цій точці знаходились як середні значення у вузлових точках $j-1$ і j . Похідні по \tilde{x} визначались, відповідно, по значенням u_j і u_{j-1} , а похідні по \tilde{y} – по середнім значенням між $j-1$ і j в точці $i+1$ і в точці $i-1$. Отримаємо наближені формули:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{i,j-0.5} &= 0.5(\tilde{u}_{i,j-1} + \tilde{u}_{i,j}), \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} &\approx \tilde{u}_{i,j-0.5} \frac{\tilde{u}_{i,j} - \tilde{u}_{i,j-1}}{\Delta \tilde{x}}, \\ \tilde{v}_{i,j-0.5} &= 0.5(\tilde{v}_{i,j-1} + \tilde{v}_{i,j}), \\ \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &\approx \tilde{v}_{i,j-0.5} \cdot \left(\frac{0.5(\tilde{u}_{i+1,j-1} + \tilde{u}_{i+1,j}) - 0.5(\tilde{u}_{i-1,j-1} + \tilde{u}_{i-1,j})}{2\Delta \tilde{y}} \right) = \\ &= \frac{\tilde{v}_{i,j-0.5}}{4\Delta \tilde{y}} [\tilde{u}_{i+1,j-1} - \tilde{u}_{i-1,j-1} + \tilde{u}_{i+1,j} - \tilde{u}_{i-1,j}].\end{aligned}$$

Традиційно вважаємо, що тиск у поперечному перерізі пограничного шару не змінюється і дорівнює тиску ідеальної рідини зовнішньої течії. Із формули Бернуллі для зовнішнього обтікання (v_3 – швидкість ідеальної рідини зовнішньої течії) маємо:

$$p + \frac{\rho v_3^2}{2} + \rho g y = \text{const}.$$

Продиференціюємо цей вираз по x . Будемо мати:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x}.$$

Із врахуванням безрозмірних координат отримаємо

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = -2\tilde{v}_3 \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial \tilde{x}},$$

де $\tilde{v}_3 = v_3 / v_\infty$

Наближена формула для обчислення $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}}$ буде мати вигляд:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \approx -2\tilde{v}_{3i,j-0.5} \frac{\tilde{v}_{3i,j} - \tilde{v}_{3i,j-1}}{\Delta \tilde{x}}.$$

Для обчислення доданку $\frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}$ у рівнянні (2) знаходилась похідна від першої похідної за аналогічною схемою наближення. Використовувалась формула

$$\frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \approx \frac{1}{R_e} \left[\frac{0.5(\tilde{u}_{i+1,j-1} + \tilde{u}_{i+1,j}) - 0.5(\tilde{u}_{i,j-1} + \tilde{u}_{i,j})}{\Delta \tilde{y}} - \frac{0.5(u_{i,j-1} + u_{i,j}) - 0.5(u_{i-1,j-1} + u_{i,j})}{\Delta \tilde{y}} \right] / \Delta \tilde{y}.$$

Якщо всі ці доданки підставити у перше рівняння (2) і згрупувати, то отримаємо рівняння в перерізі j відносно невідомих $u_{i-1,j}$, $u_{i,j}$ і $u_{i+1,j}$, яке буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} & \tilde{u}_{i-1,j} \left(-\frac{\tilde{v}_{i,j-0.5}}{4\Delta \tilde{y}} - \frac{1}{2R_e \Delta \tilde{y}^2} \right) + \tilde{u}_{i,j} \left(-\frac{\tilde{u}_{i,j-0.5}}{4\Delta \tilde{x}} + \frac{1}{R_e \Delta \tilde{y}^2} \right) + \\ & + \tilde{u}_{i+1,j} \left(\frac{\tilde{v}_{i,j-0.5}}{4\Delta \tilde{y}} - \frac{1}{2R_e \Delta \tilde{y}^2} \right) = b_{ij}. \end{aligned} \quad (3)$$

Права частина b_{ij} виражена через величини перерізу $j-1$ і обчислюється за формулою:

$$b_{ij} = \tilde{u}_{i-1,j} \cdot \frac{\tilde{u}_{i,j-1}}{\Delta \tilde{x}} - \frac{\tilde{v}_{i,j-0.5}}{4\Delta \tilde{y}} (\tilde{u}_{i+1,j-1} - \tilde{u}_{i-1,j-1}) + \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{2R_e \Delta \tilde{y}^2} (\tilde{u}_{i+1,j-1} - 2\tilde{u}_{i,j-1} + \tilde{u}_{i-1,j-1}).$$

Величину $\tilde{v}_{i,j-0.5}$, що входить в ці формули, обчислимо, використавши рівняння нерозривності в точці $(i-0.5, j-0.5)$ (рис.2).

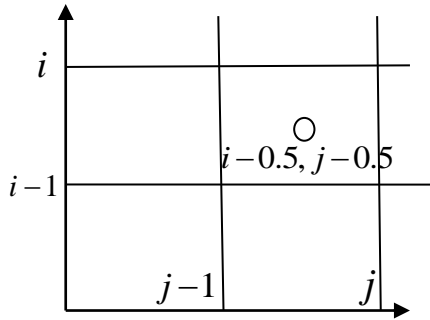


Рисунок 2. Розрахункова сітка

У рівнянні нерозривності системи (2) доданки апроксимуються за формулами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} & \approx \frac{0.5(u_{i,j} + u_{i-1,j}) - 0.5(u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1})}{\Delta \tilde{x}}, \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} & \approx \frac{v_{i,j-0.5} - v_{i-1,j-0.5}}{\Delta \tilde{y}}, \end{aligned}$$

Підставимо ці доданки у рівняння нерозривності системи (2) і виразимо $v_{i,j-0.5}$. Тоді для знаходження $v_{i,j-0.5}$ будемо мати:

$$v_{i,j-0.5} = v_{i-1,j-0.5} - \frac{\Delta \tilde{y}}{\Delta \tilde{x}} \cdot (0.5(u_{i,j} + u_{i-1,j}) - 0.5(u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1})).$$

Таким чином, у результаті ми отримаємо систему (3) з тридіагональною матрицею відносно невідомих коефіцієнтів біля $\tilde{y}_{i-1,j}$, $\tilde{y}_{i,j}$, $\tilde{y}_{i+1,j}$. Слід зазначити, що коефіцієнти матриці і права частина самі залежать від швидкостей $\tilde{y}_{i-1,j}$, $\tilde{y}_{i,j}$, $\tilde{y}_{i+1,j}$, тому система насправді є нелінійною і розв'язується методом ітерацій. Для кожної ітерації використовується метод прогонки. Таким чином, маємо два цикли: зовнішній ітераційний та внутрішній – метод прогонки. Ітерації продовжуються, поки відносна зміна швидкостей на двох послідовних ітераціях не стане меншою за певне значення. Після цього визначається товщина пограншару із умови, щоб значення у зовнішній точці пограншару не відрізнялося більше ніж на один відсоток від значення, що дає модель ідеальної рідини. При цьому товщина пограншару є невідомою величиною, за початкове значення було вибрано значення $\delta / D = 1 / \sqrt{\text{Re}}$. Біля критичної точки реальна товщина пограншару була меншою ніж оціночна. Тому при розрахунку першого шару визначалася його товщина, яка потім поступово збільшувалася, якщо умова для товщини не виконувалася. Якщо ця умова виконувалася раніше ніж задане наперед значення, то кількість точок у пограншарі запам'ятовувалася і на наступному кроці бралася із попереднього. Якщо умова не виконувалася, то шар потовщувався і ітерації продовжувалися, а значення швидкостей бралися із попередніх ітерацій. Після знаходження точки відриву на кожному кроці по часу розв'язується задача обтікання тіла ідеальною рідиною методом дискретних вихорів: знаходиться сумарна циркуляція в точці відриву за методикою викладеною в [4], яка присвоюється вільному вихору, що сходиться у потік. Розрахунки проводились до моменту появи вторинних відривів.

3. Результати розрахунків для циліндра

Схема була апробована на прикладі обтікання циліндра при числі Рейнольдса $\text{Re} = 10000$. У початковий момент часу обчислена точка відриву знаходилась у куті 104° від передньої критичної точки, що досить близько до розрахунку по методу Кочіна-Лойцянского [6] (103.12°). Розрахунки проводилися з двома точками відриву. Перевірявся самий простий та швидкий варіант розрахунку. Для сходження вибирався один вихор в одній точці відриву. Час розрахунку для одного кроку по часу становив 0.08 с: час розрахунку для ідеальної рідини за методом дискретних вихорів для 180 точок на циліндрі на одному кроці по часу становив 0.05с., розрахунок пограншару для двох точок займав 0.03с.

У даному дослідженні з'ясувалося, що результат істотно залежить від кроку по часу. Коли крок становив 0.07, то за 7 кроків по часу встановлювалась точка відриву на куті 80° , що майже співпадає з експериментальними даними (81°).

З'ясувалося, що величина кроку по часу впливає на результат розрахунків, при виході кроку по часу за певний діапазон результати не співпадали з експериментом. Критерієм визначення точок відриву було перевищення числа ітерацій 500. В

таблиці 1 представлено значення кута, на якому відбувається відрив в залежності від кроку по часу. Із результатів чисельного експерименту зокрема слідує, що найкращі результати отримуються, коли середня швидкість у перерізі, де відбувається відрив v_s і товщина пограншару пов'язані співвідношенням $v_s \Delta t \approx 4\delta \div 5\delta$.

Таблиця 1

Δt	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
φ	74°	76°	80°	80°	82°	84°

На рис.3 показано результат положення вихорів у момент часу $\tau = 0.49$, точка відриву знаходиться в куті 80° .

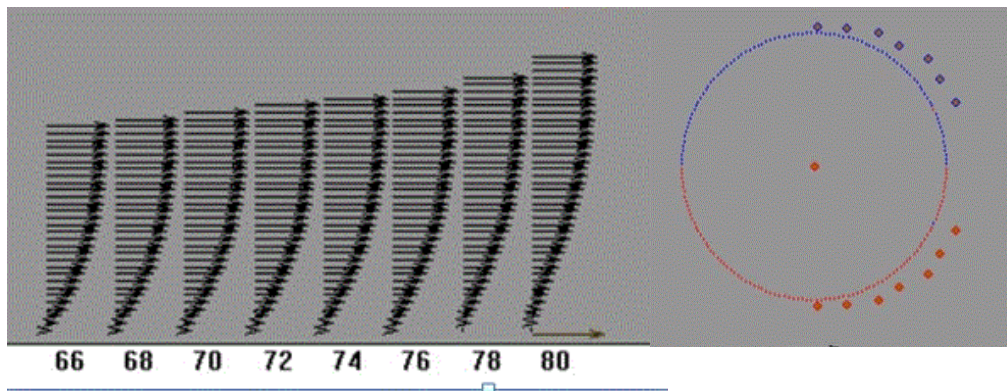


Рис. 3 Положення вільних вихорів за циліндром та профілі повздовжньої швидкості в момент часу $\tau = 0.49$, $\varphi = 80^\circ$

ЛІТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 2001.
2. Белоцерковский С.М. Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 352 с.
3. Довгий С.О., Буланчук Г.Г., Буланчук О.М. Вихрові течії ідеальної рідини. Класичні моделі та метод дискретних вихорів: монографія. Маріуполь: ПДТУ, 2016. 341 с.
4. Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания. М.: Наука. Физ.-мат. лит., 1988. 232 с.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
6. Loitsyanskii L.G. Laminar Boundary Layer (Fizmatgiz, Moscow, 1962) [in Russian].

Надійшла 20.05.2021.

Численная схема расчета пограничного слоя при моделировании методом дискретных вихрей

С.А. Довгий

Институт телекоммуникаций и глобального информационного пространства,
Киев, Украина

E-mail: itelua@kv.ukrtel.net

Г.Г. Буланчук

ДВНЗ "Приазовский государственный технический университет", Мариуполь, Украина

E-mail: ggbulan7@gmail.com

О.Н. Буланчук

Донецкий государственный университет управления, Мариуполь, Украина

E-mail: obulan65@gmail.com

В данной работе для определения точки отрыва течений с большими числами Рейнольдса при обтекании гладких тел предлагается шеститочечная конечно-разностная численная схема расчета уравнения Прандтля ламинарного пограничного слоя. Входными данными для данной схемы являются результаты моделирования методом дискретных вихрей в рамках модели идеальной жидкости. Профиль скорости в окрестности критической точки определяется с аналитического решения. Полученная система линейных алгебраических уравнений решается методом прогонки. Поскольку коэффициенты системы являются нелинейными, то для нахождения решения используется метод итераций. Толщина пограничного слоя определяется в процессе решения. Точка отрыва и циркуляции сходящихся вихрей определяются из расчета пограничного слоя. Затем в точке отрыва моделируется отрыв свободных вихрей, динамика которых находится в рамках метода дискретных вихрей. Схема была апробирована на задачи обтекания цилиндра и показала хорошие результаты по сравнению с экспериментальным данным и расчетами других авторов.

Ключевые слова: метод дискретных вихрей, уравнение Прандтля, уравнение пограничного слоя, точка отрыва, сход вихрей.