

ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ В СИСТЕМАХ ІЗ ВНУТРІШНІМ МУЛЬТИПЛІКАТИВНИМ ШУМОМ

Д. О. Харченко¹, А. В. Дворніченко²

¹*Інститут прикладної фізики НАН України
вул. Петропавлівська, 58, Суми, 40030, Україна*

²*Сумський державний університет
вул. Римського-Корсакова, 2, Суми, 40007, Україна*

(Отримано 08 червня 2007 р.; в остаточному вигляді — 21 січня 2008 р.)

У роботі розглянуто механізм ентропійно керованого фазового переходу в розподілених стохастичних системах із внутрішнім мультиплікативним шумом. Аналітично та чисельно показано, що у випадку релаксації в полі заданого потенціалу з кінетичним коефіцієнтом, залежним від польової змінної, можливе проходження реверсивних фазових переходів. Виявлено, що внутрішній мультиплікативний шум спричиняє не лише якісну зміну стаціонарного розподілу, але й зміщення точок реверсивного фазового переходу.

Ключові слова: фазовий перехід, реверсивність, шум.

PACS number(s): 05.40.-a, 05.10.Gg, 64.60.-i

I. ВСТУП

Останнім часом при розв'язанні проблем сучасної теоретичної фізики стосовно опису процесів упорядкування все більше уваги приділяють висвітленню організуючої ролі флюктуаційних джерел, здатних суттєво впливати на процеси самоорганізації. Принципова особливість процесу самоорганізації стохастичних систем полягає в тому, що вони здатні активно реагувати на вплив середовища, змінюючи його властивості. Із макроскопічного погляду такий процес зводиться до нерівноважних фазових переходів, для яких флюктуації відіграють визначну роль, оскільки їхня дія сприяє переходові фізичної системи до макроскопічних станів, недосяжних у детермінованих (безшумових) умовах [1–4]. Така ситуація буває при переходах унімодального розподілу стохастичної змінної в бімодальний (у нульвимірних системах, коли стохастична змінна не залежить від просторової компоненти) [1, 5, 6], при стохастичному резонансі [7–9], фазових переходах, індукованих шумом (у розподілених системах) [4, 10–12], формуванні просторових та просторово-часових структур під дією шумів [13–15] тощо.

Загалом, при дослідженні індукованих шумом ефектів намагаються відрізнити різні види флюктуаційних джерел, що дає змогу виділити ті, якими можна керувати в реальному експерименті, задаючи статистичні властивості середовища (зовнішні шуми) та такі, що є невід'ємною частиною релаксаційних процесів у системі (внутрішні шуми). Тоді як зовнішні стохастичні сили можуть бути нав'язані системі флюктуаційним характером нерівноважного середовища, внутрішній шум пов'язаний із виконанням флюктуаційно-дисипаційної теореми. Справді, якщо корелятор флюктуацій визначається через кінетичний коефіцієнт, що задає дисипативні процеси, то такий шум є внутрішнім [1, 3, 4]. Характерно, що внутрішні шуми визначаються інтенсивністю, про-

порційною до температури теплової бані, що розглядається як рівноважне середовище, а зовнішні характеризуються флюктуаціями параметрів, які задають вплив нерівноважного середовища (інтенсивність опромінення молекулярних сполук, у реакціях ізомеризації тощо).

Під час досліджень індукованих шумом ефектів встановлено, що принципова роль флюктуацій проявляється у разі, коли їхня амплітуда/інтенсивність стає залежною від стохастичної змінної [1, 3, 4, 15] — мультиплікативний шум. Тоді, як зовнішні флюктуації мають таку властивість, для внутрішніх це не завжди відбувається, оскільки для достатньо вивченого кола систем кінетичний коефіцієнт є сталою величиною, пропорційною температурі. У такому разі приходимо до стандартної картини рівноважних фазових переходів, де внутрішні флюктуації входять адитивно в рівняння еволюції параметра стану (стохастичної змінної). Суттєво, що час релаксації колективної змінної в таких системах визначається сталою величиною (кінетичним коефіцієнтом) як для неупорядкованої, так і впорядкованої фаз. При цьому відповідний внутрішній шум приводить лише до розмивання піків стаціонарного розподілу, визначеного детерміністичними складниками і, загалом, не відіграє принципової ролі у процесах упорядкування. Однак доволі популярним прикладом, коли значення кінетичного коефіцієнта відрізняються для таких фаз, є системи із фазовим розшаруванням: кінетичний коефіцієнт стає залежним від концентрації певної речовини або різниці концентрацій речовин. Тоді процеси релаксації прискорюються в одній фазі та уповільнюються в іншій. Незважаючи на те, що така картина характерна для систем зі збереженим параметром порядку, є широке коло фізичних систем (полімерних сполук тощо), де динаміка параметра порядку не зберігається. Саме останнє відповідає релаксаційному потокові в полі заданого потенціалу. Очевидно, що на відміну від ідеалізованої ситуації при описі реальної картини внут-

рішні флюктуації мають бути врахованими, оскільки є невід'ємною характеристикою статистичних систем і мають вплив мікроскопічного рівня на поведінку системи на мезоскопічному рівні. Оскільки докладну інформацію про мікроскопічний рівень можна подати лише усередненням відповідних процесів, то його дію подають введенням стохастичних джерел, наділених наперед заданими (модельними) статистичними властивостями. Тому фізична картина процесів упорядкування в таких системах має бути узагальнена введенням флюктуаційних джерел, що тісно пов'язані з виконанням флюктуаційно-дисипаційної теореми. Зовнішні шуми можуть бути виключені з розгляду, якщо зовнішнє середовище є безфлюктуаційним.

Опис стохастичних систем, що зазнають індукованих зовнішнім шумом фазові переходи, спирається на аналіз апроксимованих функціоналів стаціонарного розподілу та відповідних термодинамічних функціоналів. Останніми роками виявлено клас стохастичних систем, для яких такі розподіли можна отримати точно. Суттєво, що до нього входять системи, які релаксують у полі заданого потенціалу з кінетичним коефіцієнтом, залежним від польової змінної [16–18]. Установлено, що в найпростіших моделях квадратичного (моностабільного) потенціалу зростання інтенсивності відповідного мультиплікативного шуму, пропорційного температурі, сприяє переходові системи до впорядкованої фази. Принципово, що тоді як функціонал вільної енергії не змінюється, дія флюктуацій приводить до зміни ентропії, яка й дає поштовх проходженню фазового переходу (entropy driven phase transitions). Подібного типу фазові переходи є певним узагальненням індукованих шумом переходів у нульмірних системах, де стохастична змінна залежить лише від часу [4]. Отже, механізм фазових переходів, керованих ентропією, полягає в балансі між детерміністичними силами та стохастичним рухом.

Системи такого класу інтенсивно не досліджували, оскільки вважалося, що внутрішні шуми не здатні суттєво впливати на стани системи. Окрім того, результати проведеного аналізу стосуються моделей із квадратичною формою заготовального потенціалу у функціоналі вільної енергії, тоді як поведінку таких систем із складнішою формою потенціалів не вивчали повною мірою. Тому метою нашої роботи є дослідити фазові переходи в системах із внутрішнім мультиплікативним шумом, що релаксують у полі потенціалу моделі x^4 для вивчення особливостей утворення упорядкованого стану при варіаціях параметрів дисипації та шуму. У межах теорії середнього поля та чисельного експерименту буде показано, що за рахунок конкуренції між стохастичною динамікою та силами детерміністичного типу в системі можливе впорядкування при вихідному моностабільному потенціалі та реалізація реверсивного фазового переходу.

Структура роботи така. У розділі II подано необхідний теоретичний матеріал для проведення розрахунків. Результати дослідження картини впорядкування подано в розділі III. Висновки та перспективи наступних досліджень зібрано в останньому розділі.

II. ТЕОРЕТИЧНИЙ ПІДХІД

Розглянемо модель фізичної системи, що описується дійсним скалярним полем $x = x(\mathbf{r}, t)$. Приймаючи умови, що система перебуває у флюктуаційному середовищі, відповідне рівняння еволюції поля x можна записати так:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -M(x) \frac{\delta}{\delta x} \mathcal{F}[x] + \zeta(\mathbf{r}, t). \quad (1)$$

Як зазначалося, в детерміністичному випадку рівняння (1) задає релаксаційний потік у потенціалі $\mathcal{F}[x]$ із кінетичним коефіцієнтом $M(x)$ — рухливістю, залежною від польової змінної. Функціонал вільної енергії \mathcal{F} приймемо у стандартному вигляді Гінзбурга–Ландау

$$\mathcal{F}[x] = \int d\mathbf{r} \left(V(x) + \frac{D}{4d} (\nabla x)^2 \right), \quad \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \quad (2)$$

де $V(x)$ — локальний потенціал, $D = \text{const}$, d — вимірність простору. Стохастичне джерело ζ , що подає термічні флюктуації, наділено властивостями гауссівського процесу. Розглядаючи систему із внутрішніми флюктуаціями, зв'яжемо дисипацію із флюктуаціями внаслідок використання співвідношення

$$\langle \zeta(\mathbf{r}, t) \zeta(\mathbf{r}', t') \rangle = 2T_0 M(x) \delta(t - t') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3)$$

та припустимо $\langle \zeta \rangle = 0$. Отже, маємо внутрішній мультиплікативний шум з інтенсивністю, що зводиться до ефективної температури бані T_0 . Наявність часової та просторової дельта-особливостей у кореляторі (3) говорить про те, що шум є білим як у часі, так і у просторі (відповідні спектральні густини не залежать від частоти та хвильового вектора, що дає весь спектр значень частот та хвильових векторів процесу $\zeta(\mathbf{r}, t)$).

При дослідженні фізичних систем форму вихідного потенціалу $V(x)$ приймаємо наперед заданою або одержуємо з використанням певних теоретичних підходів (загалом, вважається поліноміальною конструкцією, що відповідає одномірним катастрофам). Форму рухливості $M(x)$ можна встановити, враховуючи такі умови: динаміка системи уповільнюється в околі упорядкованої/щільної фази (мале M); флюктуації є великими в неупорядкованій/розбавленій фазі (велике M). Загалом, функція $M(x)$ виникає при одержанні основного кінетичного рівняння за умови, що ймовірність переходу між мікроскопічними станами залежить від рухливості [4, 19]. Розглядаючи динаміку системи з параметром порядку, що не зберігається, далі будемо вважати M лише функцією від поля x . Не зважаючи на те, що $M(x)$ може визначитися самоузгоджено, при теоретичних дослідженнях ефектів самоорганізації припустимо, що рухливість $M(x)$ наділена зазначеними вище властивостями.

Статистичні властивості системи визначимо використанням стаціонарного розподілу $\mathcal{P}_{\text{st}} = \mathcal{P}([x(\mathbf{r})], t \rightarrow \infty)$, який одержуємо зі стаціонарного рівняння Фоккера–Планка. Стандартна

процедура виведення рівняння Фоккера–Планка для розподілених систем з метою обходу сингулярностей полягає в переході до дискретного простору, який будемо далі вважати складеним із N^d комірок розміром ℓ , нумерованих індексом i [4, 17, 20]. У такому разі, замість рівняння у частинних похідних (1), переходимо до системи з N^d рівнянь зі звичайною похідною у часі

$$\frac{dx_i}{dt} = -M_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sqrt{M_i} \tilde{\zeta}_i(t), \quad (4)$$

де $x_i(t) \equiv x(\mathbf{r}_i, t)$, $M_i \equiv M(x_i)$, $\langle \tilde{\zeta}_i(t) \tilde{\zeta}_j(t') \rangle = 2T \delta_{ij} \delta(t - t')$, $T = T_0/\ell^d$. Використовуючи дискретне подання градієнтного складника $|\nabla x|^2$, потенціал вільної енергії запишемо так:

$$F = \sum_{i=1}^N \left[V_i + \frac{D}{4d\ell^2} \sum_{j \in nn^+(i)} (x_j - x_i)^2 \right], \quad (5)$$

де $nn^+(i)$ позначає найближчі сусіди в прямому напрямку кожної з просторових осей.

Розглядаючи систему в реальних умовах, будемо далі вважати шум ζ квазібілим (із часом кореляції наближеним до нуля). Тоді, використовуючи підхід Стратоновича, приходимо до рівняння Фоккера–Планка у вигляді [3]

$$\frac{\partial P(\{x_i\}, t)}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(M_i \frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{T}{2} \frac{\partial M_i}{\partial x_i} + T \frac{\partial}{\partial x_i} M_i \right) \times P(\{x_i\}, t). \quad (6)$$

Вважаючи граничні умови дифузійного процесу природними (відсутність потоку ймовірності на границях), у стаціонарному випадку маємо

$$P_{st}(\{x\}) \propto \exp(-U_{\text{eff}}(\{x\})/T), \quad (7)$$

$$U_{\text{eff}}(\{x\}) = F(\{x\}) + \frac{T}{2} \sum_{i=1}^N \ln M_i.$$

Повертаючись до континуального простору, шуканому функціоналові надамо вигляду розподілу Больцмана–Гіббса

$$\mathcal{P}_{st}[x] \propto \exp\left(-\frac{U_{\text{eff}}[x]}{T}\right) \quad (8)$$

де введено потенціал ефективної внутрішньої енергії

$$U_{\text{eff}}[x] = \mathcal{F}[x] + T S_{\text{eff}}[x], \quad (9)$$

визначений через ефективну ентропію

$$S_{\text{eff}}[x] = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \ln M(x). \quad (10)$$

Із наведеного випливає, що форма вільної енергії залишається незмінною, тоді як мультиплікативний внутрішній шум приводить до зміни в ентропії. Отже, шуканий розподіл одержано точно.

Для кількісного дослідження умов впливу мультиплікативних флюктуацій на картину впорядкування скористаємося теорією середнього поля Вейса. У межах такого підходу градієнтний складник у (5) можна переписати так:

$$\nabla^2 x \rightarrow \frac{2d}{\ell^2} (\eta - x)^2, \quad \eta \equiv \langle x \rangle. \quad (11)$$

Отже, приходимо до залежності потенціалу ефективної внутрішньої енергії від стохастичної змінної x та невідомої середньопольової η :

$$U_{\text{eff}}(x; \eta) = V(x) + \frac{D}{2\ell^2} (\eta - x)^2 + \frac{T}{2} \ln M(x). \quad (12)$$

Величину η , що відіграє роль параметра дальнього порядку, задаємо розв'язком рівняння самоузгодження

$$\eta = \int x P_{st}(x; \eta) dx, \quad (13)$$

де

$$P_{st}(x; \eta) = Z^{-1}(\eta) \exp(-U_{\text{eff}}(x; \eta)/T), \quad (14)$$

стала Z забезпечує виконання умови нормування $\int P_{st}(x; \eta) dx = 1$. Згідно з визначенням (13), стан із $\eta = 0$ вважається симетричним, а тому неупорядкованим, тоді як розв'язок $\eta \neq 0$ задає значення параметра порядку системи з порушеною симетрією функції $P_{st}(x; \eta)$.

Для знаходження межі фаз, заданих симетричним та несиметричним станами, можна використати умову Ньютона, яка справедлива лише для переходів другого роду. Загалом, для знаходження фазової діаграми можна скористатися розбіжністю узагальненої сприйнятливості в точках фазового переходу. Формула узагальненої сприйнятливості, визначена для процедури чисельного моделювання, у наближенні середнього поля має вигляд [10, 12, 21]

$$\chi = \frac{1}{T} \left[\int x^2 P_{st}(x; \eta) dx - \eta^2 \right]. \quad (15)$$

III. РЕЗУЛЬТАТИ

Для проведення розрахунків щодо визначення поведінки системи скористаймося моделлю x^4 потенціалу

$$V(x) = -\frac{\varepsilon}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^4, \quad (16)$$

де керуючий параметр $\varepsilon \in [-1, 1]$ у детерміністичному режимі визначає стаціонарні стани $x_0^{(0)} = 0$, $x_{\pm}^{(0)} = \pm\sqrt{\varepsilon}$.

Рухливість, що задовольняє необхідні умови, виберемо в найпростішій формі [4]

$$M(x) = \frac{1}{1 + \alpha x^2}, \quad \alpha \geq 0. \quad (17)$$

Тут при $\alpha = 0$ маємо сталу величину M , натомість при $\alpha > 0$ рухливість спадає до нульових значень зі зростанням величини x . Це означає, що флюктуації є значними в неупорядкованому стані з $x = 0$ та стають безмежно малими при переході до упорядкованого стану з $x \neq 0$. Розвинення рухливості в ряд дає наближену формулу $M(x) \approx 1 - \alpha x^2$. Вона є нічим іншим, як узагальненням рухливості, записаної через концентрацію $c = 1/2 - x$, $c \in [0, 1]$. Справді, поклавши $\alpha = 1$, приходимо до вельми відомого результату з теорії фазового розшарування $M(c) = c(1 - c)$. Змінюючи параметр α , розгляньмо окремо випадки адитивного ($\alpha = 0$) та мультиплікативного ($\alpha \neq 0$) шумів.

Принципово важливим для наведеного класу моделей фізичних систем є той факт, що внутрішні флюктуації не дестабілізують неупорядкований стан, визначений через $\langle x \rangle$. Справді, проводячи лінійний аналіз стійкості для фур'є-компоненти першого моменту стохастичного поля $\langle x_k(t) \rangle = \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \langle x(t, \mathbf{r}) \rangle d\mathbf{r}$, рівняння еволюції набуває вигляду

$$\frac{d\langle x_{\mathbf{k}} \rangle}{dt} = (\varepsilon - \alpha T)\langle x_{\mathbf{k}} \rangle - D|\mathbf{k}|^2 \langle x_{\mathbf{k}} \rangle. \quad (18)$$

Із нього видно, що дія внутрішнього мультиплікативного шуму стабілізує неупорядкований стан.

А. Індуковані шумом переходи ($D = 0$)

Для прояснення картини самоорганізації стохастичної системи розгляньмо спочатку індуковані шумом переходи, що пов'язуються зі зміною кількості екстремумів стаціонарного розподілу. Для цього покладемо $D = 0$, припустивши, що величина x залежить лише від часової змінної, тобто $x(\mathbf{r}, t) \rightarrow x(t)$. Стаціонарна картина задаватиметься формою потенціалу ефективної внутрішньої енергії (12). Положення екстремумів стаціонарного розподілу та, відповідно, макроскопічні фази задаватимуться рівнянням $dU_{\text{eff}}(x; 0)/dx = 0$. Його розв'язками є корені $x_0 = 0$ та

$$x_0^{(\pm)} = \pm \frac{1}{2\alpha} \left[\alpha\varepsilon - 1 \pm \sqrt{\alpha\varepsilon(2 + \alpha\varepsilon) + 1 + 4T\alpha^2} \right]. \quad (19)$$

Нетривіальні корені, що задають положення максимумів густини ймовірності, виникають за умови перетинання лінії, визначеної додатковою умовою $d^2U_{\text{eff}}(x; 0)/dx^2 = 0$, яка дає лінію біфуркації $\varepsilon = -\alpha T$. До виникнення нетривіальних коренів маємо максимум густини ймовірності в точці $x_0 = 0$, тоді як при переході через критичне значення температури $T_c = -\varepsilon/\alpha$, де $\varepsilon < 0$, цей максимум стає мінімумом. При $\varepsilon \geq 0$ та ненульових α два максимуми існують на всій осі температур. Залежність параметра порядку для індукованого шумом переходу подана на рис. 1, з якого видно, що з підвищенням температури та збільшенням параметра α маємо якісну перебудову форми густини ймовірності, параметр порядку

(положення максимуму) неперервно зростає при переході через критичне значення інтенсивності шуму та параметра нелінійної релаксації α . Отже, мультиплікативний шум індукує виникнення додаткових максимумів густини ймовірності при вихідному одноячному потенціалі вільної енергії. Цей ефект є проявом чисто індукованого мультиплікативним шумом переходу; при $\alpha = 0$, що відповідає адитивному шумові за сталим кінетичним коефіцієнтом та $\varepsilon < 0$ система завжди описується унімодальною густиною ймовірності, центрованою в нулі.

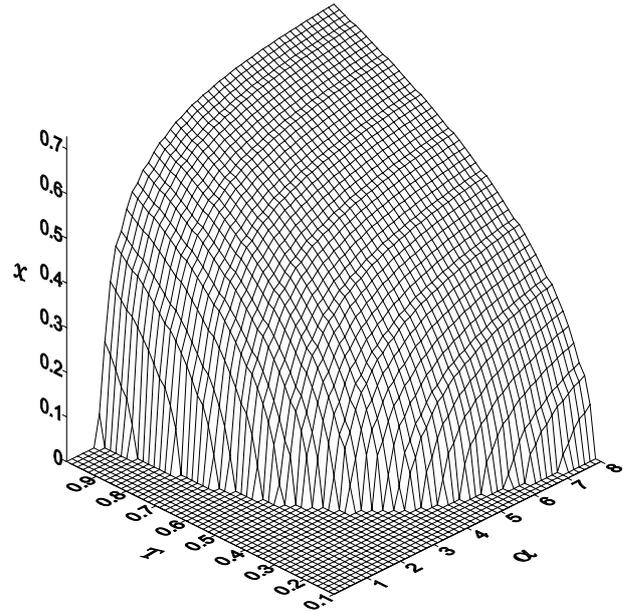


Рис. 1. Біфуркаційна діаграма залежності положення максимуму густини ймовірності від інтенсивності шуму T та параметра α при $\varepsilon = -1$.

В. Індуковані шумом фазові переходи ($D \neq 0$)

Розгляньмо далі ефект впливу міжчастинкової взаємодії, що характеризується інтенсивністю D . У граничному випадку $D \rightarrow \infty$, що відповідає макроскопічному наближенню $\langle f(x) \rangle \approx f(\langle x \rangle)$, можна одержати рівняння еволюції параметра порядку для індукованого шумом фазових переходів $\langle x \rangle \equiv \eta$ у вигляді рівняння Ландау-Халатнікова

$$\frac{d\eta}{dt} = -M(\eta) \frac{dV(\eta)}{d\eta} + \frac{T}{2} \frac{dM(\eta)}{d\eta} \equiv -\frac{d\tilde{F}(\eta)}{d\eta}, \quad (20)$$

де \tilde{F} відіграє роль ефективного потенціалу вільної енергії

$$2\alpha\tilde{F}(\eta) = \eta^2 - \ln(1 + \alpha\eta^2)\varepsilon - \frac{1}{\alpha} \ln(1 + \alpha\eta^2) - \frac{\alpha T}{1 + \alpha\eta^2}, \quad (21)$$

графік якої зображено на рис. 2. Розвинення в ряд в околі точки $\eta = 0$ дає наближений вираз $\tilde{F} \approx -T/2 +$

$A\eta^2/2 + B\eta^4/4 + D\eta^6/6$ з коефіцієнтами $A = \alpha T - \varepsilon$, $B = 1 + \alpha(\varepsilon/2 - \alpha T)/2$, $D = \alpha(\alpha[3\alpha T - \varepsilon] - 1)$. Із наведеного випливає, що в системі за певних умов можливе проходження фазових переходів як першого, так і другого роду. Справді, розглядаючи стаціонарний випадок $\dot{\eta} = 0$, завжди маємо корінь $\eta_0 = 0$ рівняння станів. Нетривіальні корені стаціонарного рівняння, що задають положення екстремумів функції $\tilde{F}(\eta)$ на напіввісі $\eta > 0$, є такими:

$$\eta_0^{(\pm)} = \frac{\sqrt{2\alpha}}{2\alpha} \left[\alpha\varepsilon - 1 \pm \sqrt{(1 + \alpha\varepsilon)^2 - 4\alpha^2 T} \right]^{1/2} \quad (22)$$

і подані на рис. 3. Очевидно, що корінь $\eta_0 = 0$ задає максимум ефективного потенціалу вільної енергії до критичного значення $T_0 = \varepsilon/\alpha$, при перетинанні якого мінімум стає максимумом; натомість два симетричні мінімуми, розташовані в точках $\pm\eta_0^{(+)}$, існують до критичного значення $T^0 = (1 + \alpha\varepsilon)^2/4\alpha^2$. Лінія співіснування всіх трьох фаз $T_c(\alpha)$ визначається умовою $\tilde{F}(0) = \tilde{F}(\eta_0^{(+)})$. Відповідну фазову діаграму подано на рис. 4. З її аналізу випливає, що при значеннях параметра α , які перевищують критичне $\alpha_c = \varepsilon/T_c$ (ордината точки O), система зазнає фазових переходів першого роду, перетинаючи пунктирну лінію. Коли $\alpha < \alpha_c$, то в системі відбуваються фазові переходи другого роду зі зростанням інтенсивності шуму. Слід зазначити, що наведена картина макроскопічного наближення задає наближену поведінку параметра порядку лише при $\varepsilon > 0$, тобто при двоямному вихідному потенціалі $V(x)$.

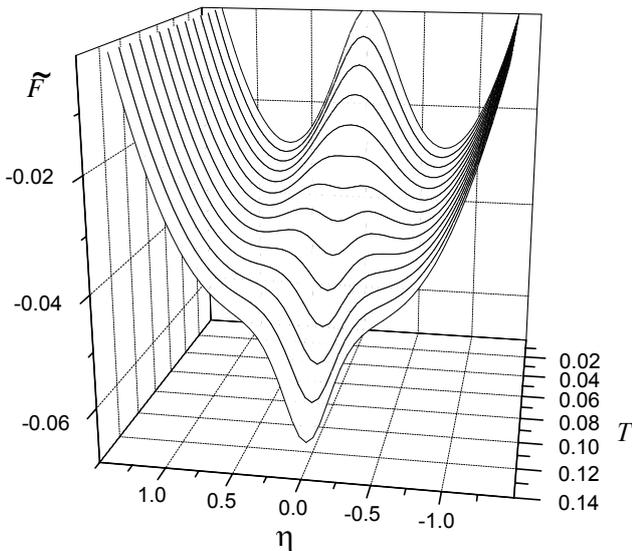


Рис. 2. Вигляд ефективного вільної енергії залежно від параметра порядку та інтенсивності шуму.

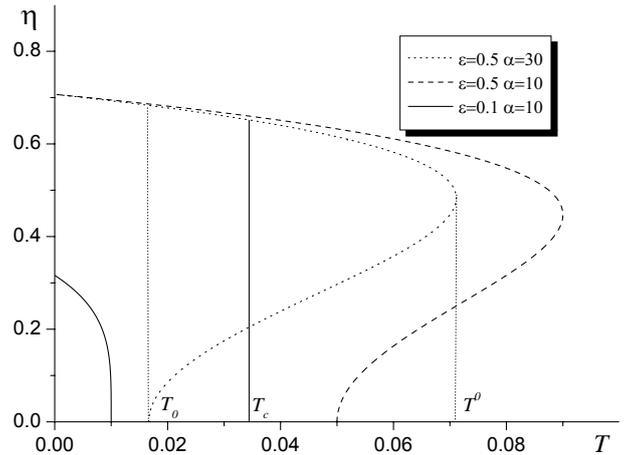


Рис. 3. Залежність параметра порядку в макроскопічному наближенні на границі $D \rightarrow \infty$ при різних значеннях керуючого параметра ε та параметра α .

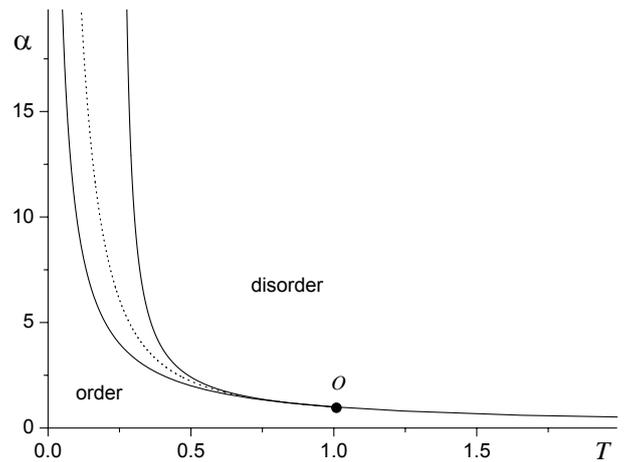


Рис. 4. Фазова діаграма в макроскопічному наближенні $D \rightarrow \infty$ при $\varepsilon = 1.0$: суцільні лінії відповідають спінодалям, пунктирна — лінія потрібних точок.

Розгляньмо далі картину впорядкування при кінцевих значеннях інтенсивності міжчастинкової взаємодії D . Аналітичне дослідження ґрунтується на використанні рівняння самоузгодження та аналізу поведінки параметра порядку залежно від керуючого параметра ε та інтенсивності шуму T . Безпосередній розв'язок рівняння (13) є симетричним щодо заміни знака η . Залежність параметра порядку (позитивні значення) зображена на рис. 5,а. З нього видно, що у випадку двоямного вихідного потенціалу $V(x)$ з $\varepsilon > 0$ зростання інтенсивності мультиплікативного шуму приводить до спадання величини параметра порядку до нуля та відповідно, переходу до неупорядкованого стану. При цьому впорядкована фаза характеризується порушеною симетрією бімодальної функції розподілу $P_{st}(x; \eta)$, а неупорядкована відповідає симетричній формі $P_{st}(x; \eta)$ із рівновеликими макси-

мумами. Однак із рисунка видно, що система стає впорядкованою навіть при одноявному вихідному потенціалі $V(x)$ з $\varepsilon < 0$ та, відповідно, одномодальній функції розподілу. Таке впорядкування означає, що максимум стаціонарного розподілу зміщується від нуля вбік, що визначається знаком параметра порядку. Отже, при $\varepsilon < 0$ маємо перехід типу зміщення, а при $\varepsilon > 0$ — фазовий перехід із відновленням симетрії функції розподілу. Принципова особливість поведінки параметра порядку залежно від інтенсивності шуму полягає в реалізації реверсивного фазового переходу при $\varepsilon < 0$. Це видно не лише з рис. 5,а, але й із залежності узагальненої сприйнятливості рис. 5,б, де з підвищенням T величина χ має два піки лише, ко-

ли $\varepsilon < 0$. Знаходячи точку фазового переходу за положенням максимумів сприйнятливості можна бачити, що у випадку $\varepsilon < 0$ та мультиплікативного шуму ($\alpha \neq 0$) маємо таку картину фазових переходів: при малих T система характеризується максимумом густини ймовірності в точці $x = 0$ з $\eta = 0$; при переході через перше критичне значення T_0 цей максимум зміщується вбік $x > 0$ (при $\eta > 0$); при переході через точку індукованого шумом переходу виникає додатковий максимум, якщо $x < 0$, величина якого зростає з підвищенням T , причому максимум на позитивній напіввісі спадає; у точці фазового переходу T^0 два максимуми P_{st} стають рівноправними і система є неупорядкованою ($\eta = 0$).

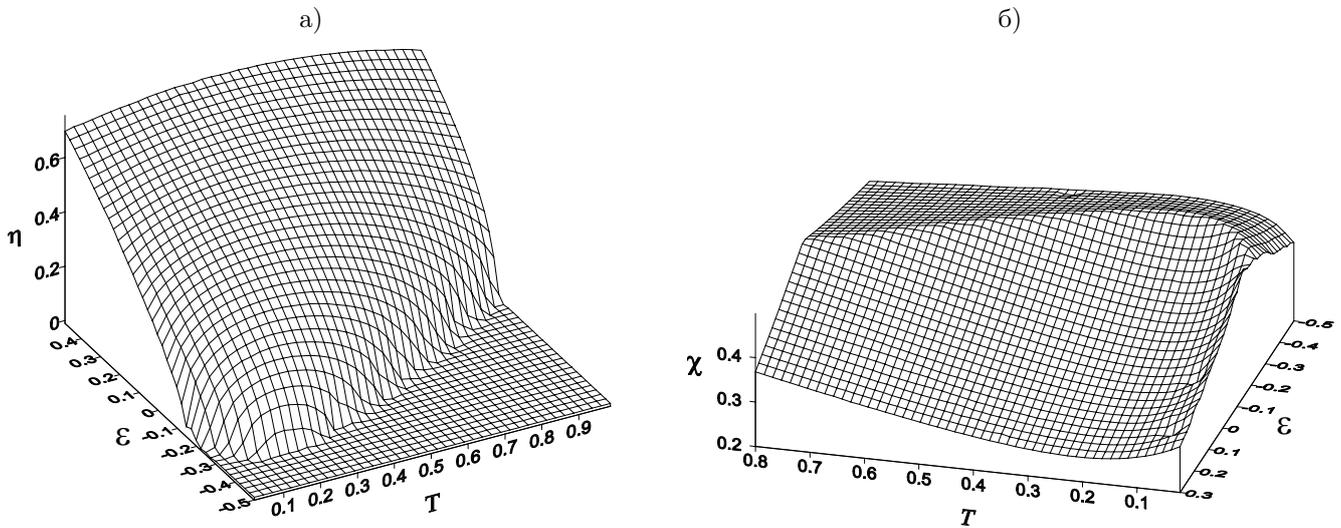


Рис. 5. Залежність параметра порядку η (а) та сприйнятливості χ (б) від керуючого параметра ε та інтенсивності шуму T при $\alpha = 30$.

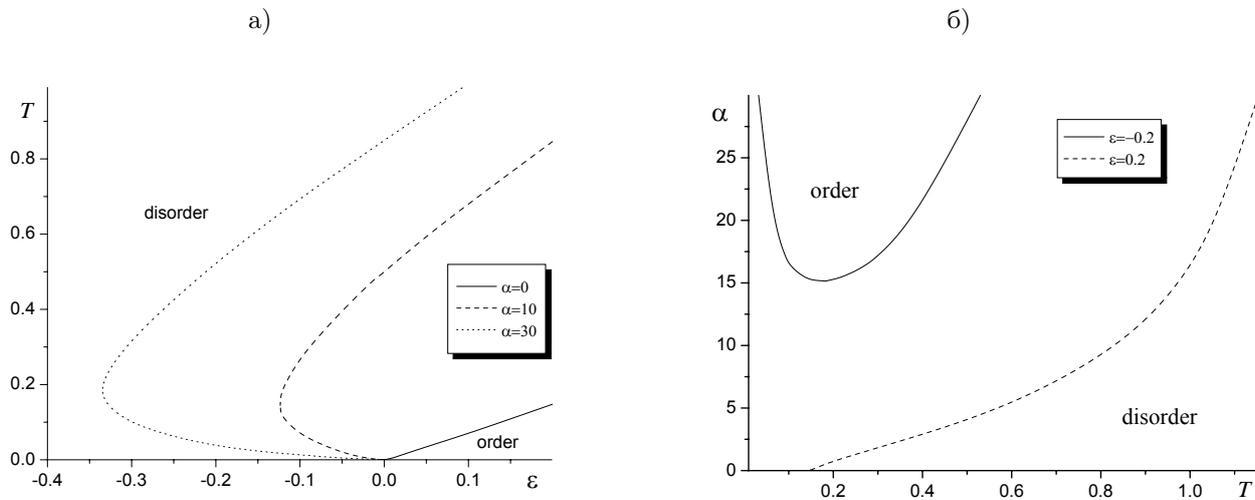


Рис. 6. Фазова діаграма при $D = 1.0$: а) для різних значень параметра α ; б) для значень ε вище та нижче від порога.

Фазову діаграму одержуємо за положенням максимумів узагальненої сприйнятливості χ . Відповідні залежності критичних значень параметрів системи та шуму подано на рис. 6. Із рис. 6,а видно, що у випадку адитивного шуму ($\alpha = 0$) приходимо до стандартної картини фазового переходу в рівноважних системах. Тут упорядкована фаза існує лише за умови двоямного потенціалу вільної енергії $\varepsilon > 0$ при низьких значеннях температури T , зростання якої відновлює симетрію системи. Однак у разі нелінійних релаксаційних процесів, що спричинені дією мультиплікативного внутрішнього шуму, упорядкований стан виникає навіть при одноявному потенціалі V . Причому зростання величини α приводить до витягування домену впорядкованої фази в бік від'ємних величин керуючого параметра ε та реалізації реверсивного проходження процесу впорядкування при підвищенні температури T . Залежність критичних значень параметрів шуму на рис. 6,б показує, що при запорогових значеннях ε перейти до впорядкованої фази вдається не лише зменшенням інтенсивності T , але й підвищенням параметра α . При допорогових величинах ε , як і раніше, зростання α переводить систему до несиметричного стану, тоді як зростання інтенсивності шуму спричиняє реверсивне проходження впорядкування: при великих значеннях α зона існування впорядкованої фази розширюється.

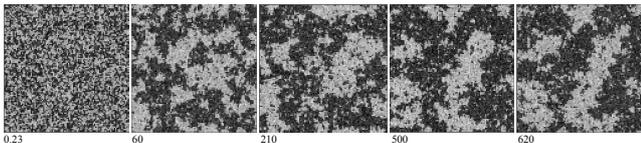


Рис. 7. Часові зрізи поведінки системи при $D = 5$, $\alpha = 5$, $\varepsilon = -1$; розмір ґратки $N \times N = 100 \times 100$.

Виконані аналітичні розрахунки добре узгоджуються з результатами незалежного чисельного експерименту, проведеного на квадратній двовимірній ґратці. Чисельне інтегрування зроблено за методом Мільштейна, що враховує особливості розрахунків методом Стратоновича. Типову картину еволюції розглянутої системи подано на рис. 7. Видно, що із часом однорідна система зі значеннями стохастичної змінної, розподіленими рівномірно від -1 до 1 , поступово перерозподіляється на домени з різними фазами: світлі ділянки відповідають значенням $x_i > 0$; темні — $x_i < 0$. При $t \rightarrow \infty$ система розділяється на дві макроскопічні фази.

Макроскопічну поведінку системи визначаємо параметром порядку та сприйнятливістю (автокорелятором), що обчислюємо відповідно за формулами [4]:

$$\eta = \overline{\langle m \rangle}, \quad m = \frac{1}{N^2} \left| \sum_{i=1}^{N^2} x_i \right|, \quad (23)$$

$$T\chi = \overline{\left\langle \frac{1}{N^2} \left| \sum_{i=1}^{N^2} x_i^2 \right| - \langle m \rangle^2 \right\rangle}, \quad (24)$$

де підсумовування проводимо за вузлами ґратки i , число яких N^2 . При цьому кутові дужки означають усереднення за реалізаціями стохастичної системи, а риска — середнє за часом. Залежності параметра порядку та сприйнятливості за результатами чисельного моделювання подано на рис. 8 при різних значеннях ε . Із рис. 8,а видно, що у випадку двоямного потенціалу $\varepsilon \geq 0$ маємо стандартну картину рівноважного фазового переходу, коли з підвищенням температури параметр порядку поступово спадає, а сприйнятливість значно зростає в околі точки фазового переходу. При $\varepsilon < 0$ рис. 8,б одержуємо реверсивну поведінку параметра порядку, коли він зростає від нульового значення при малих інтенсивностях шуму T , а після досягання максимуму спадає до нуля. Поведінка сприйнятливості ілюструє дві точки фазового переходу на малих та великих T .

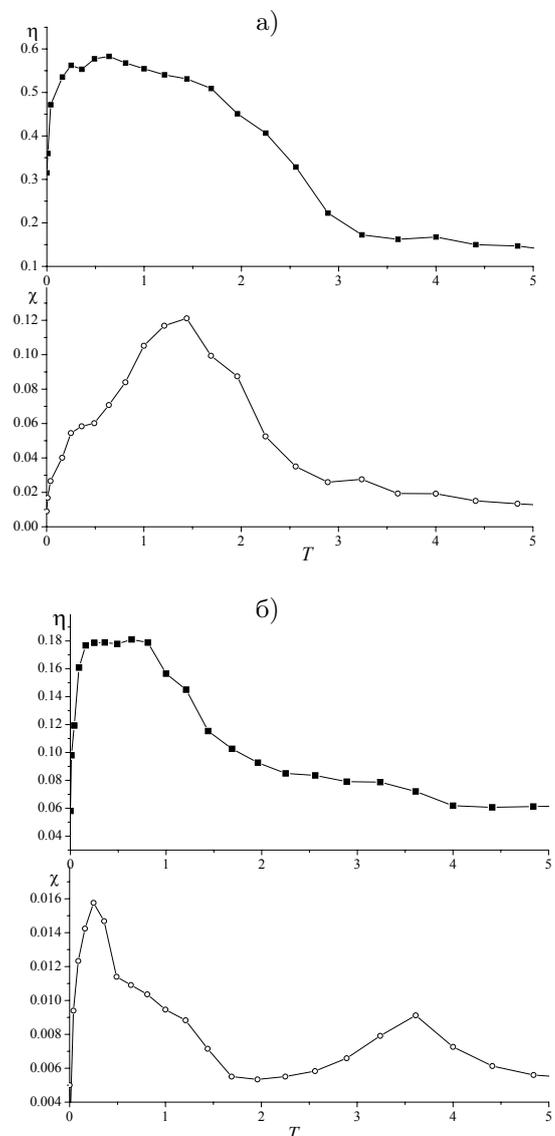


Рис. 8. Результати чисельного експерименту (параметр порядку та узагальнена сприйнятливість залежно від інтенсивності шуму) на системі розміром $N \times N = 64 \times 64$ при $D = 2$, $\alpha = 5$; а) звичайний фазовий перехід при $\varepsilon = 1$; б) реверсивний фазовий перехід при $\varepsilon = -1$.

IV. ВИСНОВКИ

Слід зазначити, що оскільки статистичний розподіл описується точно завдяки функціоналові ефективної енергії $\mathcal{U}_{\text{eff}}[x] = \int dr [V(x) + D/2(\nabla x)^2 + T/2 \ln M(x)]$, то стаціонарну картину впорядкування можна також подати розв'язанням варіаційної задачі. Справді, екстремуми $\mathcal{U}_{\text{eff}}[x]$ відповідають стаціонарним підтримуваням шумом структурам $x_s(\mathbf{r})$, які одержуємо розв'язанням рівняння $\delta \mathcal{U}_{\text{eff}}[x]/\delta x = 0$. Це, своєю чергою, приводить до такого рівняння:

$$D\Delta x = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{T}{2M} \frac{\partial M}{\partial x}. \quad (25)$$

Після підстановки виразів для локального потенціалу та рухливості маємо

$$D\Delta x = -x(\varepsilon - x^3) - \frac{T\alpha x}{1 + \alpha x^2}. \quad (26)$$

Дослідження рівняння (26) показує, що при $\alpha T + \varepsilon < 0$ поведінка системи на фазовій площині $(x, \nabla x)$ задається однією стаціонарною точкою O , яка є сідлом із координатами $(0, 0)$. Однак зі зростанням інтенсивності шуму T або параметра α при виконанні умови $\alpha T + \varepsilon > 0$ у системі може виникати періодичний розв'язок $x_s(\mathbf{r}) = x_s(\mathbf{0})e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ зі значенням хвильового вектора $|\mathbf{k}| = \sqrt{(\alpha T + \varepsilon)/D}$. Точка $O(0, 0)$ тепер стає центром, а внаслідок біфуркації, індукованої шумом, виникають два додаткові сідла з координатами $(x_0^+, 0)$, $(-x_0^+, 0)$, де x_0^+ визначено у (19). Із наведеного випливає, що, на відміну від детерміністичного випадку, де формування періодичних структур можливе лише при $\varepsilon > 0$, флюктуації індукують утворення періодичних коливань у просторі навіть при одноявному локальному потенціалі $V(x)$, знижуючи період осциляцій зі зростанням α та інтенсивності T . Однак перший осциляційний розв'язок визначається величиною хвильового вектора $|\mathbf{k}| = 0$, що говорить про тривіальність стаціонарної просторової залежності x_s .

Отже, наші дослідження показують, що внутрішній мультиплікативний шум спричиняє індуковані шумом переходи зі зміною кількості екстремумів густини ймовірності, зміщує положення критичної точки фазового переходу та приводить до реверсивного проходження процесу впорядкування. Останній ефект суттєво пов'язується з формою потенціальної вихідної функції $V(x)$. Порівняння одержаних даних та результатів робіт [16, 17] показує, що квадратичний складник у $V(x)$ сприяє проходженню впорядкування зі зростанням інтенсивності шуму, тоді як нелінійності вищого порядку пригнічують упорядкування, переводячи систему до симетричного стану.

Розглянута картина реверсивних фазових переходів, де внутрішній мультиплікативний шум зумовлює процеси впорядкування, керовані зміною ентропії, може бути реалізована в системах із полезалежним кінетичним коефіцієнтом (рухливістю). Саме зміни в ентропії в системах термодинамічного типу приводять до реалізації додаткового механізму процесів упорядкування. Типовим прикладом таких систем є полімерні розчини [22, 23], коли підвищення температури спричиняє упорядкування системи магнетного типу (сегнетова сіль), де при підвищенні температури відбувається якісна зміна в реверсивний спосіб магнетних властивостей [24] або системи дефектів, де відбувається зміна дефектних структур за аналогією з реверсивними переходами [25].

Перспективами роботи є дослідження кінетичних особливостей розглянутих процесів упорядкування та з'ясування ролі просторових кореляцій при ентропійно керованих фазових переходах. Окрім того, перспективним є також дослідження умов виникнення когерентних просторових та просторово-часових структур у хемічно-реагуючих системах, що зазнають індукованих шумом ефектів такого типу.

-
- [1] В. Хорстхемке, Р. Лефевр, *Индукцированные шумом переходы* (Мир, Москва, 1987).
- [2] A. S. Mikhailov, A. Yu. Loskutov, *Foundations in synergetics II* (Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1996).
- [3] Н. Risken, *The Fokker-Planck Equation* (Springer Verlag, Berlin, 1989).
- [4] J. Garcia-Ojalvo, J. M. Sancho, *Noise in spatially extended systems* (Springer Verlag, New York, 1999).
- [5] S. Kabashima, T. Kawakubo, Phys. Lett. **70**, 375 (1970).
- [6] P. De Kepper, W. Horsthemke, *Experimental evidence of noise-induced transition in an open chemical system, Synergetics far from equilibrium*, edited by A. Pacault, C. Vidal (Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979).
- [7] P. Jung, P. Hänggi, Phys. Rev. Lett. **65**, 3365 (1990).
- [8] О. В. Геращенко, С. Л. Гинзбург, М. А. Пустовойт, Письма журн. эксп. теор. физ. **67**, 945 (1998).
- [9] В. С. Анищенко, А. Б. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шиманский-Гайер, Усп. физ. наук **169**, 7 (1999).
- [10] C. Van der Broeck, Phys. Rev. Lett. **73**, 3395 (1994).
- [11] J. Garcia-Ojalvo, J. M. R. Parrondo, J. M. Sancho, C. Van der Broeck, Phys. Rev. E **54**, 6918 (1996).
- [12] C. Van der Broeck, J. M. R. Parrondo, R. Toral, R. Kawai, Phys. Rev. E **55**, 4084 (1997).
- [13] J. Buceta, M. Ibanes, J. M. Sancho, K. Lindenberg, arXiv:cond-mat/0211181 (2002).
- [14] M. A. Santos, A. Zülicke, L. Shimansky-Geier, Phys. Lett. A **290**, 270 (2001).
- [15] B. Linder, J. Garcia-Ojalvo, A. Neiman, L. Shimansky-Geier, Phys. Rep. **392**, 321 (2004).
- [16] M. Ibanes, J. Garcia-Ojalvo, R. Toral, J. M. Sancho, Phys. Rev. Lett. **87**, 020601 (2001).
- [17] O. Carrillo, M. Ibanes, J. Garcia-Ojalvo, J. Casademunt, J. M. Sancho, Phys. Rev. E **67**, 046110 (2003).
- [18] F. J. Cao, K. Wood, K. Lindenberg, arXiv:cond-

- mat/0702524 (2007).
- [19] K. Kitahara, M. Imada, *Suppl. Prog. Theor. Phys.* **64**, 65 (1978).
- [20] C. Doering, *Phys. Lett. A* **122**, 133 (1987).
- [21] R. R. Deza, H. S. Wio, M. A. Fuentes, arXiv:0704.1155v1 (2007).
- [22] S. Kadar, J. Wang, K. Showalter, *Nature* **391**, 770 (1998).
- [23] T. Eckert, E. Bartsch, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 125701 (2002).
- [24] Р. Р. Левицький, І. Р. Зачек, А. П. Моїна, Т. М. Верхоляк, *Жур. фіз. досл.* **7**, 106 (2003).
- [25] D. O. Kharchenko, *Усп. фіз. металлов* **6**, 1 (2005).

PHASE TRANSITIONS IN STOCHASTIC SYSTEMS WITH INTERNAL MULTIPLICATIVE NOISE

D. O. Kharchenko¹, A. V. Dvornichenko²

¹*Applied Physics Institute NAS of Ukraine,
58, Petropavlovskaya St., Sumy, UA-40030, Ukraine*

²*Sumy State University
2, Rymsky-Korsakov St., Sumy, UA-40007, Ukraine*

A mechanism of entropy driven phase transitions is considered. Analytically and numerically it is shown that in the case of relaxation flow in a potential with a field-dependent kinetic coefficient, reentrant phase transitions are realized in stochastic systems with internal fluctuations. It is found that internal multiplicative noise yields topological changes in stationary distribution and shifts positions of bifurcation points.