ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 13, № 2 (2009) 2601(7 с.)

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 13, No. 2 (2009) 2601(7 p.)

ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД В ОПТИМІЗАЦІЙНІЙ ЗАДАЧІ МОДЕЛІ MINORITY GAME

Л. Блажиєвський[1], В. Янішевський[2]
[1] *Кафедра теоретичної фізики, Львівський національний університет імені Івана Франка вул. Драгоманова, 12, м. Львів, 79005*
[2] *Кафедра економічної кібернетики та інноватики, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, вул. Лесі Українки, 46, м. Дрогобич, 82100*

(Отримано 19 вересня 2008 р.; в остаточному вигляді — 30 серпня 2009 р.)

У статті подано результати застосування варіаційного методу в поєднанні з методом реплік у дослідженні оптимізаційної задачі в моделі minority game. У запропонованому підході отримано основні результати про фазовий перехід у моделі в наближенні симетричних реплік. Установлено також зв'язок із методом розрахунку, відомим із літературних джерел.

Ключові слова: варіаційний метод, метод реплік, оптимізація.

PACS number(s): 64.60.Cn, 75.10.Nr, 02.60.Pn

ВСТУП

Застосування методів теоретичної фізики виявилося продуктивним у різноманітних галузях знань. Останніми роками виник новий напрям досліджень, який базується на застосуванні ідей, концепцій та методів статистичної фізики в економічних задачах [1, 2]. Серед них — застосування методів невпорядкованих систем у прикладних оптимізаційних задачах [3–5]. Функція, яку оптимізують, містить велику кількість змінних (макроскопічну), на множині яких шукають екстремум, а також кількість параметрів (також макроскопічну), що задають певний "заморожений безлад". Через велику кількість змінних та параметрів (у тому числі дискретних) застосування комбінаторних методів оптимізації є надзвичайно трудомістким і тому неприйнятним. З'ясувалося, що в зазначених оптимізаційних задачах можна побудувати аналог вільної енерґії, що залежить від змінних та параметрів моделі і звести, отже, задачу до основної задачі статистичної фізики.

Розрахунок вільної енерґії фізичних систем здійснюють, як правило, із застосуванням наближених методів. Загальновідомим є варіаційний метод, що ґрунтується на нерівності для вільної енерґії [6]. Поєднання його та методу реплік розглядали в низці робіт [7, 8]. Праця [7] присвячена теорії спінових стекол, у роботі [8] проаналізовано статистичні дані складних інформаційних систем. Математичні основи розширеного варіаційного принципу для модельних спінових систем сформульовані в [9]. Як зазначено в [7], після виконання граничного реплічного переходу $n \to 0$ нерівність для вільної енерґії перестає бути строгою, однак достатньо обґрунтованою для застосувань.

У цій статті проілюстровано застосування варіаційного методу в методі реплік до оптимізаційної задачі в моделі minority game [10–16], для якої відомий асимптотично точний розв'язок. На прикладі цієї моделі показано, що застосування нерівності для вільної енерґії приводить до основних результатів для цієї моделі.

I. ВИХІДНІ ПОЛОЖЕННЯ МОДЕЛІ

Модель minority game була створена для аналізу фондових ринків, її вихідні положення викладені в цитованих вище роботах. Основні положення моделі такі. Ринок моделюється діями N аґентів, які можуть перебувати в кожен момент часу t у двох станах "купівля" та "продаж" [14], тобто кожен i-ий аґент ($i = 1 \dots N$) у момент часу t здійснює дію $a_i(t) = 1$ (купівля) або $a_i(t) = -1$ (продаж). Виграш аґента з урахуванням дії всіх аґентів визначаємо так:

$$u_i(t) = -a_i(t)\,A(t), \qquad \text{де } A(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i(t). \tag{1}$$

Рівняння (1) моделює структуру ринкової взаємодії — дохід кожного аґента визначається дією всіх решти учасників ринку через величину $A(t)$. Тип взаємодії (1) відображає правило меншості — виграє той, хто в кінцевому підсумку перебуває в меншості (звідси назва моделі — minority game). Виграш становить $a_i(t) = -\mathrm{sign}(\mathrm{A(t)})$, втрати більшості рівні $-|A(t)|$). Загальний дохід усіх аґентів — $\sum_{i=1}^{N} u_i = -A^2$ є від'ємним. Усі аґенти мають доступ до спільної інформації, що в момент часу t описується цілим числом $\mu(t)$ та набуває значень від 1 до P. Оскільки поведінка аґентів впливає на ринок, то цю дію позначають через $A^{\mu(t)}(t)$. Далі моделюємо, як аґенти обирають свої дії на основі інформації $\mu(t)$. Загалом існує 2^P стратегій, але вважається, що кожен аґент вибирає із загальної кількості лише S. Дія аґента i, якщо він дотримується стратегії s, враховуючи інформацію $\mu(t)$, є $a^{\mu}_{s,i}$ (надалі часову змінну опускатимемо, оскільки розглядаємо рівноважний стан). Тоді формулу (1) для виграшу слід записати у вигляді:

$$u_i = -a^{\mu}_{s,i}\,A^{\mu}, \qquad \text{де } A^{\mu} = \sum_{i=1}^{N} a^{\mu}_{s,i}. \tag{2}$$

Число P є досить великим, того ж самого порядку, що N (макроскопічним), а величина $\alpha = P/N$ вважається скінченною при $N \to \infty$. Як показано в [12], властивості моделі в границі великих значень N залежать лише від параметра α. Значення μ описується певним розподілом ρ^μ, незалежно для кожного часового кроку (приймаємо, що $\rho^\mu = 1/P$). Ще одне важливе припущення — для кожного часового кроку дії аґентів $a^\mu_{s,i}$ є випадковими та незалежними між собою і ймовірності прийняття дій аґентами в кожному стані рівні:

$$P(a^\mu_{s,i} = +1) = P(a^\mu_{s,i} = -1) = \frac{1}{2},$$
$$\forall\, i \in N,\ s \in \{1 \dots\ S\},\ \mu \in \{1 \dots\ P\}.$$

Далі, згідно з теорією ігор [17], для аналізу гри вводять змішані стратегії, де $\pi_{s,i}$ позначають імовірності, з якими i-й аґент застосовує цю стратегію. Наявна умова повноти $\sum_s \pi_{s,i} = 1$. Множина змінних $\pi_{s,i}$ визначає фазовий простір моделі. У цьому фазовому просторі визначають середні значення величин:

$$\langle A^\mu \rangle = \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{S} \pi_{s,i}\, a^\mu_{s,i}\,. \tag{3}$$

Як показано в [13, 14], однією з важливих рівноважних характеристик моделі є величина:

$$H = \sum_{\mu=1}^{P} \rho^\mu \Big(\sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{S} \pi_{s,i}\, a^\mu_{s,i} \Big)^2, \tag{4}$$

що визначає флуктуації величини (3). Величина (4) є основною інформативною величиною, що моделює стан ринку в моделі minority game та має властивості гамільтоніана системи [14]. Вважається, якщо $H > 0$, гра асиметрична (тобто для деякого μ маємо $A^\mu > 0$). Це свідчить, що існує краща стратегія, яка може дати додатний прибуток. Як функція параметра α система демонструє фазовий перехід з порушенням симетрії для певного α_c.

II. МІНІМІЗАЦІЯ В МЕТОДІ СТАТСУМИ

Оптимізаційна задача полягає у вивченні мінімуму величини H (4) (далі гамільтоніан) на множині змінних $\{\pi_{s,i}\}$ та усереднення за всіма реалізаціями $\{a^\mu_{s,i}\}$. Як і при дослідженні основного стану фізичних систем [6], мінімум можна розглядати як стан системи при нулі "температури". З цією метою визначають статистичну суму системи:

$$Z(\beta) = \mathrm{Sp}_\pi \exp(-\beta H(\pi)),$$

де β — обернена температура, Sp_π позначає суму за всіма можливими станами системи (інтеґрування за змінними $\pi_{s,i} \in [0, 1]$ із урахуванням умови $\sum_s \pi_{s,i} = 1$), позначення $H(\pi)$ вказує на функціональну залежність від імовірностей змішаних стратегій. Отже, мінімум гамільтоніана визначають так:

$$\min_\pi H(\pi) = -\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \ln Z(\beta). \tag{5}$$

У правій частині (5) міститься залежність від усіх можливих реалізацій дій гравців $a^\mu_{s,i}$. Щоб отримати змістовні величини потрібно усереднити за всіма можливими діями гравців $a^\mu_{s,i}$. Усереднення величини $\ln Z(\beta)$ за всіма $a^\mu_{s,i}$, яке позначимо $\langle \dots \rangle_a$, у методі реплік запишемо так:

$$\langle \ln Z(\beta) \rangle_a = \lim_{n\to 0} \frac{1}{n} \ln \langle Z(\beta)^n \rangle_a\,. \tag{6}$$

Як відомо, суть методу реплік полягає в тому, що обчислення у (6) виконують для цілих n, після чого відбувається граничний перехід $n \to 0$. Для цілих значень n обчислення $\langle Z(\beta)^n \rangle_a$ приводять до n копій (реплік) тієї ж системи з тими ж самими реалізаціями $a^\mu_{s,i}$. Для кожної репліки вводять свою множину динамічних змінних $\pi^a_{s,i}$.

III. ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД

Як показано в роботах [10, 11, 13, 14] статсуму системи n реплік після усереднення за $a^\mu_{s,i}$ можна наближено записати у вигляді:

$$Z = \langle Z(\beta)^n \rangle_a = \int Dz D\pi \exp\Big(-\frac{1}{2} \sum_{a,\mu} {z^\mu_a}^2 \Big) \tag{7}$$
$$\times \exp\Big(-\frac{\beta}{P} \sum_{i,\mu,s} \Big(\sum_a z^\mu_a \pi^a_{s,i} \Big)^2 \Big),$$

де введені позначення $Dz = \prod_{a,\mu} \frac{dz^\mu_a}{\sqrt{2\pi}}$, $D\pi = \prod_{a,i,s} d\pi^a_{s,i}$. Тут індекс $a \in 1 \dots n$ нумерує репліки, зміст решти індексів визначений раніше. При отриманні (7) використано інтегральне перетворення (змінні z^a_μ) для лінеаризації в показнику експоненти квадратичних доданків гамільтоніана (див. (4)), а також наближену рівність $\cos\left(\sqrt{\frac{\beta}{P}} x\right) \approx \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\beta}{P} x^2\right)$, яка вважається достатньо обґрунтованою для великих P. Із формули (7) видно, що інтеґрали не факторизуються одночасно за реплічними змінними (індекс a) та змінними "частинок" (індекс i). Тому факторизуємо інтеграли в (7) за індексом частинок i. Для простоти будемо враховувати лише два стани $S = 2$ ([13, 14]). У цьому випадку в (7) досить просто перейти до незалежних змінних частинок, урахувавши співвідношення $\sum_s \pi^a_{s,i} = 1$ за допомогою функції Дірака $\delta(\sum_s \pi^a_{s,i} - 1)$ ($i \in \{1 \dots\ N\}$, $a \in \{1 \dots\ n\}$). Інтегрування за змінними $\pi^a_{2,i}$ виконуємо точно з одночасною підстановкою $\pi^a_{2,i} = 1 - \pi^a_{1,i}$. Зробивши також підстановки $\pi^a_{1,i} = \frac{1}{2}(1 - \pi^a_i)$ та $P = \alpha N$, після нескладних перетворень отримаємо для статсуми n-реплік представлення:

$$Z = \int Dz \, \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{a,\mu} z_a^{\mu 2}\Big) \exp\Big(-\frac{\beta}{2\alpha}\sum_{\mu}\Big(\sum_a z_a^{\mu}\Big)^2\Big)$$
$$\times \Big[\int_{-1}^{1} \prod_a \frac{d\pi_a}{2} \exp\Big(-\frac{\beta}{2\alpha N}\sum_{\mu}\Big(\sum_a z_a^{\mu}\pi_a\Big)^2\Big)\Big]^N. \quad (8)$$

Продовжуючи "фізичну" інтерпретацію, можна вважати, що (8) задає представлення статсуми, у якому взаємодія між змінними π_a відбувається через середнє поле (змінні z_a^{μ}). Виконуючи інтеґрування за змінними π_a, можна отримати представлення статсуми лише через змінні середнього поля. Однак через те, що інтеґрали за змінними π_a не факторизуються, зазначене інтеґрування неможливо виконати в замкнутому вигляді. Статсуму (8) запишемо так:

$$Z = \int Dz \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{a,\mu} z_a^{\mu 2}\Big)$$
$$\times \exp\Big(-\frac{\beta}{2\alpha}\sum_{\mu}\Big(\sum_a z_a^{\mu}\Big)^2\Big) \exp(-\beta V_{\text{int}}), \quad (9)$$

де $V_{\text{int}} = -\frac{N}{\beta}\ln\big[\int_{-1}^{1}\prod_a \frac{d\pi_a}{2}\exp\big(-\frac{\beta}{2\alpha N}\sum_{\mu}\big(\sum_a z_a^{\mu}\pi_a\big)^2\big)\big]$ має зміст взаємодії між змінними поля. Структура запису (9) дає змогу визначити пробний гамільтоніан для застосування варіаційного методу, зокрема, якщо виконати заміну:

$$\Big(\sum_a z_a^{\mu}\pi_a\Big)^2 = \sum_{a,b} z_a^{\mu} z_b^{\mu}\pi_a\pi_b \to \sum_{a,b} z_a^{\mu} z_b^{\mu}\hat{Q}_{ab}. \quad (10)$$

Згідно з (10) взаємодія між полями в пробному гамільтоніані задається деякою матрицею $\hat{Q}_{ab}$, елементи якої є варіаційними параметрами.

Для пробного гамільтоніана статсума суттєво спрощується:

$$Z_0 = \int D\omega \exp(-\beta V_{0\,\text{int}}), \quad (11)$$

де $V_{0\,\text{int}} = \frac{1}{2\alpha}\sum_{a,b} z_a^{\mu} z_b^{\mu}\hat{Q}_{ab}$ — взаємодія є квадратичною за змінними поля. В (11) введено також позначення

$$D\omega = Dz \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{a,\mu} z_a^{\mu 2}\Big) \exp\Big(-\frac{\beta}{2\alpha}\sum_{\mu}\Big(\sum_a z_a^{\mu}\Big)^2\Big),$$

що має зміст елемента міри інтеґрування в просторі змінних z_a^{μ}.

Нерівність для вільної енерґії запишемо так [6]:

$$F \le F_0 + \big\langle V_{\text{int}} - V_{0\,\text{int}}\big\rangle_0, \quad (12)$$

де усереднення здійснюємо за формулою:

$$\big\langle \ldots \big\rangle_0 = \frac{1}{Z_0}\int D\omega \exp\big(-\beta V_{0\,\text{int}}\big)(\ldots).$$

Розрахунки в (12) суттєво спрощуються, оскільки величини факторизуємо за індексом μ. Зокрема

$$Z_0 = \prod_{\mu} Z_0^1 = \big(Z_0^1\big)^{N\alpha},$$

де

$$Z_0^1 = \int \prod_a \frac{dz_a}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{a,b} z_a \hat{M}_{ab} z_b\Big). \quad (13)$$

Матриця $\hat{M}$ в (13) визначається рівністю: $\hat{M} = \hat{I} + \frac{\beta}{\alpha}\hat{E} + \frac{\beta}{\alpha}\hat{Q}$. Тут $\hat{I}$ — одинична матриця n-го порядку; $\hat{E}$-матриця n-го порядку всі елементи якої дорівнюють 1; $\hat{Q}$ — визначена в (10). Для середніх у (12) отримаємо:

$$V_{0int} = \frac{N}{2}\sum_{a,b}\hat{Q}_{ab}\left\langle z_a z_b\right\rangle_1 = N\alpha\sum_{a,b}\hat{Q}_{ab}\frac{\partial F_0^1}{\partial Q_{ab}},$$

де використано позначення:

$$F_0^1 = -\frac{1}{\beta}\ln Z_0^1,$$
$$\left\langle \ldots \right\rangle_1 = \frac{1}{Z_0^1}\int \prod_a \frac{dz_a}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{a,b} z_a\hat{M}_{ab} z_b\Big)(\ldots).$$

Дещо складніше визначити середнє $\langle V_{int}\rangle_0$, оскільки V_{int} не є поліноміальною за змінними z_a. Використовуючи ідею методу реплік, неважко показати, що в границі $N \to \infty$ наявна рівність:

$$\Big\langle \ln\Big[\int_{-1}^{1}\prod_a \frac{d\pi_a}{2}\exp\Big(-\frac{\beta}{2\alpha N}\sum_{\mu}\Big(\sum_a z_a^{\mu}\pi_a\Big)^2\Big)\Big]\Big\rangle_0$$
$$= \ln\Big[\int_{-1}^{1}\prod_a \frac{d\pi_a}{2}\exp\Big(-\frac{\beta}{2}\Big\langle\Big(\sum_a z_a\pi_a\Big)^2\Big\rangle_1\Big)\Big].$$

Підсумовуючи наведені вище викладки, отримаємо для вільної енерґії вираз:

$$F = \frac{N\alpha}{2\beta}\ln\det\hat{M}$$
$$-\frac{N}{\beta}\ln\Big(\int_{-1}^{1}\prod_a \frac{d\pi_a}{2}\exp\Big(-\frac{\beta}{2}\sum_{a,b}\pi_a\hat{M}_{ab}^{-1}\pi_b\Big)\Big) \quad (14)$$
$$-\frac{N}{2}\sum_{a,b}\hat{Q}_{ab}\hat{M}_{ab}^{-1}.$$

Тут ураховано також, що

$$\frac{\partial F_0^1}{\partial Q_{ab}} = \frac{1}{2\alpha}\hat{M}_{ab}^{-1},$$

де $\hat{M}^{-1}$ — матриця, обернена до $\hat{M}$. Формула (14) визначає вільну енерґію системи n реплік у варіаційному методі. Вільна енерґія містить варіаційні параметри — елементи матриці $\hat{Q}_{ab}$, які визначаються з умови екстремуму: $\frac{\partial F}{\partial Q_{ab}} = 0$. Після обчислення похідних отримаємо систему рівнянь для визначення Q_{ab}:

$$Q_{ab} = \langle \pi_a \pi_b \rangle_\pi \,, \tag{15}$$

де введено позначення:

$$\langle \ldots \rangle_\pi = \int\limits_{-1}^{1} \prod_a \frac{d\pi_a}{2} \exp\Big(-\frac{\beta}{2} \sum_{a,b} \pi_a \hat{M}^{-1}_{ab} \pi_b \Big) (\ldots) \Big/ \int\limits_{-1}^{1} \prod_a \frac{d\pi_a}{2} \exp\Big(-\frac{\beta}{2} \sum_{a,b} \pi_a \hat{M}^{-1}_{ab} \pi_b \Big).$$

Отже, вираз для вільної енерґії (14) та система рівнянь (15) задає розв'язок поставленої задачі у варіаційному методі. Установимо зв'язок отриманих співвідношешь із результатами літературних джерел, зокрема [10, 13, 14].

IV. ЗВ'ЯЗОК ВАРІАЦІЙНОГО МЕТОДУ З ПРЯМИМ РОЗРАХУНКОМ

Повертаючись до формули (7), укажемо, що прямий метод розрахунку, який використовували в [10, 13, 14], полягає у введенні матриці перекриття між репліками:

$$\hat{Q}_{ab} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i,s} \pi^a_{s,i} \pi^b_{s,i}. \tag{16}$$

Далі за допомогою δ-функції Дірака та її інтеґрального перетворення Фур'є другий множник у (7) записують у вигляді:

$$\exp\Big(-\frac{\beta}{P} \sum_{i,\mu,s} \Big(\textstyle\sum_a z^\mu_a \pi^a_{s,i} \Big)^2 \Big) = \int DQDR \exp\Big(-\frac{\beta}{\alpha\sqrt{N}} \sum_\mu \sum_{a,b} \hat{Q}_{ab} z^\mu_a z^\mu_b \Big) \exp\Big(-i \sum_{a,b} Q_{ab} R_{ab} \Big), \tag{17}$$

де позначено:

$$DQ\,DR = \prod_{a,b} \frac{dQ_{ab} dR_{ab}}{2\pi}.$$

Інтеґральне представлення (17) дозволяє факторизувати інтеґрали за індесом i та інтеґрувати за змінними z^μ_a. У результаті для статсуми (7) отримуємо представлення:

$$Z = \int DQ\,DR\, \exp\left(-\beta N F(Q,R) \right), \tag{18}$$

де

$$F(Q,R) = \frac{\alpha}{2\beta} \ln\det\left(\hat{I} + \frac{2\beta}{\alpha} \hat{Q} \right) + i\frac{1}{\beta} \sum_{ab} Q_{ab} R_{ab} - \frac{1}{\beta} \ln \mathrm{Sp}_\pi \exp\Big(\mathrm{i} \sum_{\mathrm{a,b}} \mathrm{R_{ab}} \sum_{\mathrm{s}} \pi^{\mathrm{a}}_{\mathrm{s}} \pi^{\mathrm{b}}_{\mathrm{s}} \Big) \tag{19}$$

має зміст функціонала вільної енерґії. Перший доданок у (19) виникає при інтеґруванні за змінними z^μ_a. Інтеграли в (18) в границі $N \to \infty$ обчислюємо методом перевалу, та основний внесок виникає від точки екстремуму. Використовуючи необхідні умови екстремуму:

$$\frac{\partial F(Q,R)}{\partial Q_{ab}} = 0, \quad \frac{\partial F(Q,R)}{\partial R_{ab}} = 0, \qquad \text{для} \quad \forall\, a, b,$$

отримуємо систему рівнянь:

$$Q_{ab} = \Big\langle \sum_s \pi^a_s \pi^b_s \Big\rangle, \quad iR_{ab} = -\beta \Big(\hat{I} + \frac{2\beta}{\alpha} \hat{Q} \Big)^{-1}_{ab}, \tag{20}$$

де в (20) уведено позначення

$$\langle \ldots \rangle = \int D\pi' \exp\Big(i \sum_{a,b} R_{ab} \sum_s \pi^a_s \pi^b_s \Big) (\ldots) \Big/ \int D\pi' \exp\Big(i \sum_{a,b} R_{ab} \sum_s \pi^a_s \pi^b_s \Big) \tag{21}$$

та $D\pi' = \prod_{a,s} d\pi^a_s$. Знак "штрих" біля змінної інтеґрування в (21) вказує на умову: $\sum_s \pi^a_s \pi^a_s = 1$, для $\forall\, a$. Формули для функціонала (19) та системи рівнянь (20) використовувалися при дослідженні моделі в названих роботах. Неважко встановити їх зв'язок із співвідношеннями (14) та (15), отриманими у варіаційному підході. Для двох станів $S = 2$ інтеґрування за змінними π^a_2 можна виконати за допомогою δ — функції та підстановки: $\sum_s \pi^a_s \pi^b_s = \pi^a_1 \pi^b_1 + (1 - \pi^a_1)(1 - \pi^b_1)$ для $\forall\, a, b$. Після цього, виконавши заміну змінних $\pi^a_1 = \frac{1}{2}\pi^a + \frac{1}{2}$ та елементів матриці $Q_{ab} \to \frac{1}{2} Q_{ab} + \frac{1}{2}$, неважко побачити, що ці два підходи дають однакові результати, якщо встановити зв'язок між матрицями:

$$iR_{ab} = -\beta M^{-1}_{ab}, \tag{22}$$

де матриця M визначена формулою (13). Таким чином, запропонований варіаційний метод визначає асимптотично точний розв'язок задачі. Зі встановленого зв'язку випливає також, що змінні R_{ab} можна в загальному випадку виключити з розгляду, виконуючи підстановку для матриці R_{ab} (друге рівняння в (20)), хоч у згаданих літературних джерелах, наприклад [14], при аналізі розглядають одночасно змінні R_{ab} та Q_{ab}.

V. НАБЛИЖЕННЯ СИМЕТРИЧНИХ РЕПЛІК

Конкретні розрахунки виконаємо в наближенні симетричних реплік, де задамо матрицю $\hat{Q}$ у вигляді: $\hat{Q}_{ab} = (Q - q)\delta_{ab} + q$. Виконуючи необхідні обчислення, отримаємо:

$$\ln\det\hat{M}_0=\ln\det\left(\left(1+\frac{\beta}{\alpha}(Q-q)\right)\hat{I}+\frac{\beta}{\alpha}(1+q)\hat{E}\right)\approx n\ln\left(1+\frac{\beta}{\alpha}(Q-q)\right)+n\frac{\beta}{\alpha}(1+q)\Big/\left(1+\frac{\beta}{\alpha}(Q-q)\right),\qquad(23)$$

де $\hat{M}_0$ — позначена матриця для симетричних реплік, у (23) враховано також лише лінійні внески за n. Матриця $\hat{M}_0^{-1}$ в границі $n\to 0$ дорівнює:

$$\hat{M}_0^{-1}\approx\frac{1}{\lambda}\hat{I}-\frac{\beta}{\alpha}\frac{1+q}{\lambda^2}\hat{E},$$

де позначено $\lambda=1+\frac{\beta}{\alpha}(Q-q)$. Останній доданок у (14) дорівнює:

$$\sum_{a,b}\hat{Q}_{ab}\hat{M}_{ab}^{-1}\approx\frac{n}{\lambda}(Q-q)+\frac{n}{\lambda^2}\left(q-\frac{\beta}{\alpha}(Q-q)\right),\qquad(24)$$

а також:

$$\sum_{a,b}\pi_a\hat{M}_{ab}^{-1}\pi_b=\frac{1}{\lambda}\sum_a\pi_a^2-\frac{\beta}{\alpha}\frac{1+q}{\lambda^2}\left(\sum_a\pi_a\right)^2.\qquad(25)$$

Підставляючи в (14) наведені вирази (23)–(25), а також лінеаризуючи за допомогою інтеґрального перетворення експоненту від другого доданка в (25), у границі $n\to 0$ для вільної енерґії (14) одержимо вираз:

$$F=\frac{2(1+q)-Q}{2\lambda}-\frac{1+q}{2\lambda^2}+F_1,\qquad(26)$$

де

$$F_1=-\frac{1}{\beta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\rho^2\right)\ln(Z_1),$$

$$Z_1=\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\pi}{2}\exp\big(\beta\varphi(\pi)\big),\qquad(27)$$

$$\varphi(\pi)=-\frac{1}{2\lambda}\left(\pi^2-2\sqrt{\frac{1+q}{\alpha}}\pi\rho\right).\qquad(28)$$

Рівняння для визначення параметрів Q та q мають вигляд:

$$Q=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\rho^2\right)\left\langle\pi^2\right\rangle_\pi,$$
$$q=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\rho^2\right)\left\langle\pi\right\rangle_\pi,\qquad(29)$$

де позначено:

$$\langle\ldots\rangle_\pi=\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\pi}{2}\exp\big(\beta\varphi(\pi)\big)(\ldots)\Big/\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\pi}{2}\exp\big(\beta\varphi(\pi)\big).$$

Систему рівнянь (29) можна записати так:

$$\frac{\beta}{\alpha}(Q-q)=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{\alpha(1+q)}}\left\langle\rho\left\langle\pi\right\rangle_\pi\right\rangle_\rho}-1;$$
$$q=\left\langle\left\langle\pi^2\right\rangle_\pi\right\rangle_\rho.\qquad(30)$$

Тут уведено також позначення:

$$\langle\ldots\rangle_\rho=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\rho^2\right)(\ldots).$$

Щоб отримати мінімум (4), необхідно у формулах (26), (30) виконати граничний перехід $\beta\to\infty$. Розв'язки рівнянь (30) розглядаємо за умови, що величина $\frac{\beta}{\alpha}(Q-q)$ скінченна при $\beta\to\infty$. За аналогією зі спіновими системами (це видно з формул (29)), величину $\frac{\beta}{\alpha}(Q-q)$ інтерпретують як сприйнятливість. У границі $\beta\to\infty$ інтеґрали за π, що містить величина Z_1 (27), обчислюють методом Лапласа:

$$Z_1\simeq\exp\Big(\beta\varphi_{\max}(\pi(\rho))\Big),\qquad(31)$$

де $\varphi_{\max}(\pi(\rho))$ — позначає максимум функції $\varphi(\pi)$, що досягається в точці:

$$\pi(\rho)=\begin{cases}-1, & \rho<-\rho_0;\\ \rho/\rho_0, & |\rho|<\rho_0;\\ 1, & \rho>\rho_0.\end{cases}\;,\ \rho_0=\sqrt{\frac{\alpha}{1+q_0}}.\qquad(32)$$

Для середніх у (30) в границі $\beta\to\infty$ одержимо:

$$\langle\pi\rangle_\pi\simeq\pi(\rho),\ \langle\pi^2\rangle_\pi\simeq\pi(\rho)^2.\qquad(33)$$

Ураховуючи наведені співвідношення, після обчислення інтеґралів за змінною ρ отримаємо:

$$\frac{\beta}{\alpha}(Q-q)=\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2(1+q_0)}}\right)\Big/\left(\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2(1+q_0)}}\right)-\alpha\right),\qquad(34)$$

де

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x dt\exp(-t^2/2)$$

— функція похибок, q_0 — позначено значення параметра q при $\beta\to\infty$.

Для шуканого мінімуму (4) після нескладних перетворень отримаємо:

$$H/N=\frac{1+q_0}{2\alpha^2}\left(\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2(1+q_0)}}\right)-\alpha\right)^2.\qquad(35)$$

Із урахуванням позначень вираз (35) узгоджується з результатом роботи [13]. У рівності (34) міститься відомий висновок [10–13] про фазовий перехід залежно від параметра α (розбіжність сприйнятливості). Зокрема при $\alpha_c \simeq 0.3374$ знаменник у (34) перетворюється в нуль і відповідно $H=0$. Таким чином, $H=0$ при $\alpha \le \alpha_c$ та $H>0$ при $\alpha>\alpha_c$.

VI. СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ

Відомо, що в теорії спінових стекол [18, 19] метод симетричних реплік дає незадовільні результати в області низьких температур. У [19] у зв'язку з цим установлено, що одне з власних значень матриці похідних другого порядку (гессіана) в низькотемпературній області перетворюється в нуль. Вихід із ситуації полягає в побудові розв'язків із порушенням реплічної симетрії [19–21]. Зрозуміло, що така ж проблема виникає в задачах оптимізації із застосуванням методу реплік, оскільки в оптимізаційних задачах інтерес становить випадок $\beta \to \infty$ ("нульова" температура).

Запишімо варіацію вільної енерґії (14) в околі репліко-симетричного розв'язку у вигляді:

$$\delta^2 F = \delta^2 F_1 + \delta^2 F_2, \tag{36}$$

де позначено:

$$\delta^2 F_1 = \frac{N}{4}\frac{\beta}{\alpha}\mathrm{Sp}\left(\hat{M}_0^{-1}\delta\hat{Q}\right)^2 - \frac{N}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \mathrm{Sp}\left(\hat{M}_0^{-1}Q_0\left(\hat{M}_0^{-1}\delta\hat{Q}\right)^2\right)^2, \tag{37}$$

$$\delta^2 F_2 = \frac{N}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\left\langle(\boldsymbol{\pi}|\left(\hat{M}_0^{-1}\delta\hat{Q}\right)^2\hat{M}_0^{-1}|\boldsymbol{\pi})\right\rangle_\pi + \frac{N}{8}\frac{\beta^3}{\alpha^2}\left(\left\langle(\boldsymbol{\pi}|\hat{M}_0^{-1}\delta\hat{Q}\hat{M}_0^{-1}|\boldsymbol{\pi})\right\rangle_\pi^2 - \left\langle(\boldsymbol{\pi}|\hat{M}_0^{-1}\delta\hat{Q}\hat{M}_0^{-1}|\boldsymbol{\pi})^2\right\rangle_\pi\right). \tag{38}$$

Операція $\mathrm{Sp}(\ldots)$ визначає суму діагональних елементів відповідних матриць; $\delta\hat{Q}$ — варіація матриці $\hat{Q}$ в околі репліко-симетричного розв'язку; усереднення в (38) виконано за формулами (15) із заміною в них $\hat{M}\to\hat{M}_0$; використано також позначення: $(\boldsymbol{\pi}|\hat{A}|\boldsymbol{\pi}) = \sum_{a,b}\pi_a\hat{A}_{ab}\pi_b$.

Повне дослідження стійкості репліко-симетричних розв'язків полягає у визначенні додатності квадратичної форми δ^2F змінних δQ_{ab}, що еквівалентно також додатності власних значень матриці Гессе:

$$\hat{H}_{ab,cd} = \delta^2 F\big/\delta\hat{Q}_{ab}\delta\hat{Q}_{cd}$$

та є досить непростою задачею [21]. Для ілюстрації стійкості репліко-симетричного розв'язку розгляньмо більш часткову задачу — наведемо приклад варіації матриці $\delta\hat{Q}$, для якої δ^2F стає від'ємною. Для цього оберімо $\delta\hat{Q}$ в найпростішій з форм, що враховує порушення реплічної симетрії:

$$\delta\hat{Q} = \begin{pmatrix} \hat{E}-\hat{I} & 0 \\ 0 & \hat{E}-\hat{I}\end{pmatrix}\delta q.$$

Тут $\hat{E}$ та $\hat{I}$ — раніше визначені матриці $n/2$ порядку, нуль позначає нульову матрицю того ж самого порядку. Виконуючи обчислення за формулами (37), (38) (деталі обчислень опускаємо), для варіації (36) із урахуванням основних внесків отримаємо вираз:

$$\delta^2 F = \frac{N}{2}\frac{n}{\lambda^3}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\left(-1-q_0+\left(\frac{1+q_0}{\alpha}\right)\left\langle\rho^2\right\rangle_{|\rho|<\rho_0} + \sqrt{\frac{1+q_0}{\alpha}}\left\langle\rho(\rho^2-3)\pi(\rho)\right\rangle_\rho + \frac{1}{2}\left\langle(\rho^2-1)\pi^2(\rho)\right\rangle_\rho\right)(\delta q)^2. \tag{39}$$

Усереднення за ρ в (39) визначені раніше (ф. 30), а також:

$$\langle\ldots\rangle_{|\rho|<\rho_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\rho_0}^{\rho_0} d\rho\,\exp(-\rho^2/2)(\ldots).$$

Виконуючи відповідні обчислення в (39) з використанням розв'язків для q_0, неважко показати (чисельно), що варіація від'ємна в області зміни параметра $\alpha>\alpha_c$. Це підтверджує сказане — симетричні репліки не визначають справжнього мінімуму величини (4), а слід розглядати схему розрахунку з порушенням реплічної симетрії.

ВИСНОВКИ

Отже, основний результат цієї роботи полягає в ефективному застосуванні варіаційного методу в методі реплік до оптимізаційної задачі в моделі minority game. Як зазначалось у вступі, кількість робіт де поєднуються ці два методи, порівняно невелика. Водночас, варіаційний метод досить гнучкий та потужний метод статистичної фізики.

Ми визначили пробний гамільтоніан, на основі якого знайдено асимптотично точний розв'язок у моделі minority game. Визначено співвідношення, які встановлюють зв'язок між результатами цієї роботи та розрахунком, відомим із літературних джерел (22). Залежність мінімуму величини (4) від параметра α розрахована в наближенні симетричних реплік (35), що збігається з відомим результатом [13, 15].

На простому прикладі варіації матриці перекриття показано, що симетричні репліки не визначають справжнього мінімуму, тому необхідно розглядати порушення реплічної симетрії, що може бути предметом окремої роботи.

---

[1] I. Kondor, J. Krtesz, *Econophysics: An Emerging Science* (Kluwer, Dordrecht, 1999).
[2] R. N. Mantegna, H. E. Stanley, *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance* (Cambrige University Press, 1999).
[3] O. C. Martin, R. Monasson, R. Zecchina, cond-mat. stat-mech, (2001).
[4] G. Parisi, cond-mat/0301157 (2003).
[5] O. Dubois, R. Monasson, B. Selman, R. Zecchina (eds.), Theoret. Comp. Sci. **265** (2001).
[6] Р. Фейнман, *Статистическая механика* (Мир, Москва, 1975).
[7] D. S. Dean, D. Lancaster, cond-mat/9606033 (1996).
[8] D. Malzahn, M. Opper, J. Stat. Mech. **11**, P11001 (2005).
[9] E. Kritchevski, S. Starr, math-ph/0505001 (2005).
[10] D. Challet, Y. C. Zhang, Physica A **246**, 407 (1997).
[11] D. Challet, Y. C. Zhang, Physica A **256**, 514 (1998).
[12] R. Savit, R. Manuca, R. Riolo, Phys. Rev. Lett. **82**, 2203 (1999).
[13] D. Challet, M. Marsili, R. Zecchina, Phys. Rev. Lett. **84**, 1824 (2000); cond-mat/9904392 (1999).
[14] D. Challet, M. Marsili, R. Zecchina, Physica A **280**, 522 (2000); cond-mat/9901243 (1999).
[15] A. De Martino, M. Marsili, J. Phys. A **34**, 2525 (2001); cond-mat/0007397 (2000).
[16] D. Challet, A. Chessa, M. Marsili, Y.-C. Zhang, Quantitative Finance **1**, 168 (2001); cond-mat/0011042 (2001).
[17] Э. Мулен, *Теория игр с примерами из математической экономики* (Мир, Москва, 1972).
[18] В. С. Доценко, Усп. физ. наук **163**, 6, (1993).
[19] J. R. L. de Almeida, D. J. Thouless, J. Phys. A **11**, 983 (1978).
[20] D. J. Thouless, J. R. L. de Almeida, J. M. Kosterlitz, J. Phys. C **13**, 3271 (1980).
[21] T. Temesvári, C. De Dominicis, I. Kondor., J. Phys. A **27**, 7569 (1994); cond-mat/9409050 (1994).

A VARIATION METHOD IN THE OPTIMIZATION PROBLEM OF THE MINORITY GAME MODEL

L. Blazhyevskyi[1], V. Yanishevsky[2]

[1] *Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv, 12 Drahomanov St., Lviv, UA–79005, Ukraine*

[2] *Department for Economical Cybernetics and Innovations, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University 46 Lesja Ukrajinka St., Drohobych, UA–82100, Ukraine*

This article contains the results of applying a variation method in the investigation of the optimization problem in the minority game model. That suggested approach is shown to give relevant results about phase transition in the model. Other methods pertinent to the problem have also been assessed.