

МУЛЬТИПОЛЬНИЙ ПІДХІД ДО ОПИСУ ГАЛЬМІВНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ ПРИ α -РОЗПАДІ

С. Майданюк

*Інститут ядерних досліджень, НАН України,
47, просп. Науки, Київ, 03680, Україна*

(Отримано 25 вересня 2008 р.; в остаточному вигляді — 18 серпня 2009 р.)

Представлена мультипольна модель гальмівного випромінювання фотонів при α -розпаді. Особливу увагу приділено кутовому формалізму визначення матричних елементів випромінювання. Уведено нове визначення абсолютної ймовірності випромінювання, де напрямок руху α -частинки над бар'єром (та її тунелювання під бар'єром) визначається просторовим розподілом її хвильової функції. Досягнуто доброго узгодження між значеннями абсолютної ймовірності випромінювання, обчисленими в такому підході, і новітніми експериментальними даними для ядер ^{210}Po , ^{214}Po , ^{226}Ra і ^{244}Cm . Виконано прогнози спектрів випромінювання для ізотопів Th.

Ключові слова: гальмівне випромінювання, α -розпад, кутовий спектр, тунелювання, ядра ^{210}Po , ^{214}Po , ^{226}Ra , ^{244}Cm , Th.

PACS number(s): 23.60.+e, 41.60.-m, 23.20.Js, 03.65.Xp, 27.80.+w.

I. ВСТУП

За останні 20 років багато експериментальних і теоретичних зусиль прикладено до вивчення природи гальмівного випромінювання, яке супроводжує α -розпад важких ядер. Ключова ідея цих досліджень полягає в пошуку методу отримання нової інформації про динаміку α -розпаду й динаміку тунелювання з експериментальних спектрів випромінювання. Тривалості тунелювання в ядерних процесах мають надзвичайно малі значення, що наближаються до ядерного часу. Цей факт приводить до практичної неможливості перевірити експериментально нестационарні підходи до опису тунелювання в ядерних задачах і побудовані на їхній основі динамічні ядерні моделі. Проте дослідники знаходять нові шляхи, як здобути нову інформацію про динаміку ядерних процесів. Насамперед, саме цим пояснюється посилений інтерес до вивчення процесів гальмівного випромінювання фотонів, яке супроводжує α -розпад: через аналіз обмірюваних спектрів гальмівного випромінювання визначити тривалість тунелювання α -частинки через бар'єр розпаду й оцінити динаміку α -розпаду (можливо, на першій його стадії).

Уже розроблено досить багато підходів по опису гальмівного випромінювання при α -розпаді. Тут найінтенсивніше розвивалися моделі із *квазікласичним описом α -розпаду* [1–3]. Квазікласичний підхід порівняно з повністю квантовим підходом дає змогу працювати з рядом характеристик і параметрів, фізичний зміст яких наочний, що допомагає швидше розібратися в досліджуваних питаннях цієї задачі. У цьому напрямку особливо хотілося б відзначити недавній успіх в описі новітніх експериментальних даних для ядра ^{210}Po [4, 5]. Існують гарні перспективи у вивченні динаміки α -розпаду з аналізом спектрів випромінювання [6–8], у вивченні динаміки тунелю-

вання при α -розпаді безпосередньо [9–12]. Може бути цікавим ефект [13], названий *ефектом Монхаузена*, який полягає у зростанні проникності бар'єра внаслідок випромінювання зарядженої частинки під час її тунелювання.

Проте *прямий квантовий підхід* (тобто без застосування квазікласичного наближення, коли хвильові функції визначаються з чисельного розв'язку рівняння Шредингера з вибраним потенціалом) є найточнішим, найбагатшим при вивченні нових властивостей і ефектів [14]. У цьому напрямку переважно розвивалася модель, яку вперше запропонували Папенброк і Бертч у [15], коли хвильову функцію фотонів розглядали в дипольному наближенні. Як виявилось, дипольне наближення суттєво підвищує збіжність розрахунків матричного елемента випромінювання без помітного зниження точності, що робить задачу доступною у квантовому підході для багатьох дослідників. Ми розвинули кутову квантову модель, де при описі хвильової функції фотонів було враховано подальші корекції та вперше використано реалістичний потенціал взаємодії між α -частинкою і ядром, згідно з [16]. У межах такої моделі реалізовано два підходи, засновані на різному розкладанні хвильової функції фотонів: мультипольному [17] і за сферичними хвилями [18, 19].

У другому підході вже досягнуто узгодження в описі новітніх експериментальних даних для ^{210}Po , ^{214}Po ^{226}Ra [20–23]. Мультипольний підхід, який є коректнішим при просторовому (кутовому) описі випромінювання, розроблено значно менше. Тому наявне зацікавленість у доведенні цього підходу до належного рівня. Виявляється, що така модель дає змогу обчислювати абсолютні значення ймовірності випромінювання без нормування на експериментальні дані. Це відкриває можливість вивчати випромінювання в розпадах будь-якого ядра, прогнозуючи нові спектри.

Але не ясно, наскільки сильно залежить випромінювання від енергії, з якою вилітає α -частинка, та чи існують інші характеристики, вплив яких на випромінювання також суттєвий.

Наша стаття відповідає на ці питання. У розділі II представлено мультипольну модель, де акцент зроблено на новий кутовий формалізм матричних елементів та введено нове визначення абсолютної ймовірності випромінювання, у якому напрямком руху (або тунелювання) α -частинки визначається просторовим розподілом її хвильової функції, α -ядерний потенціал — лише на основі Q_α -значення α -розпаду й чисел протонів і нейтронів ядра. У розділі III модель протестовано для ^{210}Po , ^{214}Po , ^{226}Ra та вперше виконано прогнози спектрів для ізотопів Th. У завершених сформульовано висновки.

II. МОДЕЛЬ

A. Матричний елемент випромінювання

Сформулюємо основні положення моделі. Ймовірність гальмівного випромінювання при α -розпаді ядра визначаємо на основі матричного елемента переходу складеної системи (α -частинка й дочірнє ядро) з її стану до випромінювання фотона (*початковий i-стан*) у її стан після випромінювання фотона (*кінцевий f-стан*). У цій праці використано визначення матричного елемента згідно з (2.11) у [17] (у першому наближенні нестационарної теорії збурень зі стаціонарними межами $t_0 = -\infty$ і $t_1 = +\infty$ при нормуванні $|C| \rightarrow 1$):

$$a_{fi} = F_{fi} \cdot 2\pi \delta(w_f - w_i + w), \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} F_{fi} &= Z_{\text{eff}} \frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \cdot p(k_i, k_f), \\ p(k_i, k_f) &= \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \mathbf{p}(k_i, k_f), \\ \mathbf{p}(k_i, k_f) &= \left\langle k_f \left| e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right| k_i \right\rangle \\ &= \int \psi_f^*(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (2)$$

$\psi_i(\mathbf{r}) = |k_i\rangle$ і $\psi_f(\mathbf{r}) = |k_f\rangle$ — стаціонарні хвильові функції системи, що розпадається, у початковому i -стані й кінцевому f -стані, які не містять числа фотонів, Z_{eff} і m — ефективний заряд і зведена маса цієї системи. $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ — одиничні вектори поляризації фотона, \mathbf{k} — хвильовий вектор фотона й $w = k = |\mathbf{k}|$. У кулонівському калібруванні вектори $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ перпендикулярні до \mathbf{k} . Ми маємо дві незалежні поляризації $\mathbf{e}^{(1)}$ і $\mathbf{e}^{(2)}$ для фотона з імпульсом \mathbf{k} ($\alpha = 1, 2$).

Знайдімо квадрат матричного елемента a_{fi} , необхідний для визначення *ймовірності переходу*. У квантовій механіці ймовірність переходу визначається в розрахунку на одиницю об'єму за одиницю часу. У квантовій теорії поля матричний елемент, що її визначає, містить 4-вимірну δ -функцію (наприклад, див. [24, § 21, стор. 169]). У нашому випадку матричний елемент (1) має одновимірну δ -функцію й прямий розрахунок її квадрата не дає ймовірності в одиниці об'єму. При обчисленні квадрата від матричного елемента ми маємо добуток двох δ -функцій, які є сингулярними. Такий добуток ми знаходимо, використовуючи *формулу зниження степеня δ -функції*. Ураховуючи, що одновимірний δ -функція з'являється в результаті інтегрування по всьому часовому інтервалу T (де $T \rightarrow \infty$), ми маємо

$$\begin{aligned} [\delta(w)]^2 &= \delta(w) \delta(0) = \delta(w) (2\pi)^{-1} \int dt \\ &= \delta(w) (2\pi)^{-1} T \end{aligned} \quad (3)$$

і звідси отримуємо вираз

$$|a_{fi}|^2 = 2\pi T |F_{fi}|^2 \cdot \delta(w_f - w_i + w), \quad (4)$$

що збігається з (4.21) у [24] (з точністю до сталої $(2\pi)^2$, див. § 21, стор. 169). Сингулярний множник T зникає після переходу від (4) до ймовірності переходу в одиницю часу. Формула (4) збігається також з (42,5) у [25] (див. стор. 189) з точністю до сталої \hbar . Однак стала \hbar (що з'являється після введення оператора випромінювання) входить у матричний елемент F_{fi} явно, що робить збіг формули (4) з формалізмом у § 42 з [25] повним.

B. Лінійна й кругова поляризації фотона

Розпишімо вектори *лінійної поляризації* $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ через вектори *кругової поляризації* ξ_μ з протилежними напрямками обертання (див. [26, (2.39), стор. 42]):

$$\begin{aligned} \xi_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}^{(1)} - i\mathbf{e}^{(2)}), \\ \xi_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}^{(1)} + i\mathbf{e}^{(2)}), \\ \xi_0 &= \mathbf{e}^{(3)} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Тоді $p(k_i, k_f)$ можна записати так:

$$p(k_i, k_f) = \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \xi_\mu^* \int \psi_f^*(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} h_{-1} &= \frac{1-i}{\sqrt{2}}, & h_1 &= -\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \\ h_{-1} + h_1 &= -i\sqrt{2}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} = h_{-1} \xi_{-1}^* + h_1 \xi_{+1}^*.$$

С. Розклад векторного потенціалу \mathbf{A} за мультиполями

Для подальших розрахунків матричного елемента $p(k_i, k_f)$ можна використовувати різні розклади функції $e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, що пов'язана з векторним потенціалом \mathbf{A} електромагнітного поля дочірнього ядра. У цій праці виберемо мультипольний підхід. Згідно з [26] (див. (2.106) на стор. 58), маємо:

$$\xi_\mu e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \mu \sqrt{2\pi} \sum_{l,\nu} (2l+1)^{1/2} i^l D_{\nu\mu}^l(\varphi, \theta, 0) \times [\mathbf{A}_{l\nu}(\mathbf{r}, M) + i\mu \mathbf{A}_{l\nu}(\mathbf{r}, E)], \quad (8)$$

де (див. [26, (2.73) на стор. 49, (2.80) на стор. 51])

$$\mathbf{A}_{l\nu}(\mathbf{r}, M) = j_l(kr) \mathbf{T}_{l,\nu}(\mathbf{n}_{ph}), \quad (9)$$

$$\mathbf{A}_{l\nu}(\mathbf{r}, E) = \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} j_{l-1}(kr) \mathbf{T}_{l-1,\nu}(\mathbf{n}_{ph}) - \sqrt{\frac{l}{2l+1}} j_{l+1}(kr) \mathbf{T}_{l+1,\nu}(\mathbf{n}_{ph}).$$

Тут $\mathbf{A}_{l\nu}(\mathbf{r}, M)$ і $\mathbf{A}_{l\nu}(\mathbf{r}, E)$ — магнітні та електричні мультиполі, $j_l(kr)$ — сферичні функції Бесселя порядку l (l — натуральне число), $\mathbf{T}_{l,\nu}(\mathbf{n})$ — векторні сферичні гармоніки, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ — кути, що визначають напрям вектора \mathbf{k} щодо осі z обраної системи координат. Матриця $D_{\nu\mu}^{l,*}(\varphi, \theta, 0)$ визначає напрям вектора \mathbf{k} стосовно осі z у системі координат, пов'язаної з \mathbf{r} : кути φ і θ указують на напрям вектора \mathbf{k} , але не вектора \mathbf{r} . Функція $\mathbf{T}_{l,\nu}(\mathbf{n})$ має такий вигляд ($\xi_0 = 0$) (див. [26, стор. 45]):

$$\mathbf{T}_{j_l, m}(\mathbf{n}) = \sum_{\mu=\pm 1} (l, 1, j | m - \mu, \mu, m) Y_{l, m-\mu}(\mathbf{n}) \xi_\mu, \quad (10)$$

де $(l, 1, j | m - \mu, \mu, m)$ — коефіцієнти Клебша–Гордона (визначимо їх згідно з таблицею ПА.1 у [26, стор. 317]). У зв'язку з наявними в літературі різними варіантами визначення сферичних функцій $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ також наведемо їхній явний вигляд, який ми будемо використовувати далі (згідно з [25, стор. 119, (28,7)–(28,8)]):

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \times i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) \cdot e^{im\varphi}, \quad (11)$$

де $P_l^m(\cos \theta)$ — приєднані поліноми Лежандра (див. [25, стор. 752–754, (с,1)–(с,4)]; також див. [26, (2.6), стор. 34]).

Д. Наближення сферично-симетричного α -розпаду

Будемо досліджувати α -розпад ядра у сферично-симетричному наближенні. Зорієнтуймо систему ко-

ординат так, щоб напрям осі z збігається з напрямком вектора \mathbf{k} і

$$D_{\nu\mu}^l(\varphi, \theta, 0) = \delta_{\nu\mu}. \quad (12)$$

У сферично-симетричному наближенні хвильові функції системи, що розпадається, у початковому й кінцевому станах розділяються на радіальний й кутовий компоненти, які визначаємо за допомогою квантових чисел l і m . Будемо досліджувати випромінювання фотона, при якому система переходить у суперпозицію за всіма можливими кінцевими станами з різними значеннями магнітного числа m_f при однаковому орбітальному числі l_f . Урачуємо також, що в початковому стані $l_i = m_i = 0$ та радіальний компонент хвильової функції $\varphi_f(r)$ у кінцевому стані при будь-якому обраному l_f не залежить від m_f . Записавши хвильову функцію у вигляді

$$\begin{aligned} \psi_i(\mathbf{r}) &= \varphi_i(r) Y_{00}(\mathbf{n}_r^i), \\ \psi_f(\mathbf{r}) &= \varphi_f(r) \sum_m Y_{l_f m}(\mathbf{n}_r^f), \end{aligned} \quad (13)$$

знайдемо:

$$p(k_i, k_f) = \sqrt{2\pi} \sum_l (-i)^l \sqrt{2l+1} [p_l^M - ip_l^E], \quad (14)$$

де

$$p_l^M = \sum_{\mu=-1,1} \mu h_\mu p_{l\mu}^M, \quad p_l^E = \sum_{\mu=-1,1} \mu^2 h_\mu p_{l\mu}^E, \quad (15)$$

$$p_{l\mu}^M = \int_0^{+\infty} dr \int d\Omega r^2 \psi_f^*(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) \right) \mathbf{A}_{l\mu}^*(\mathbf{r}, M), \quad (16)$$

$$p_{l\mu}^E = \int_0^{+\infty} dr \int d\Omega r^2 \psi_f^*(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) \right) \mathbf{A}_{l\mu}^*(\mathbf{r}, E).$$

Для подальшого розрахунку цих матричних елементів скористаймося *градієнтною формулою* (див. [26, (2.56), стор. 46]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(r) Y_{lm}(\mathbf{n}_r) &= \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \left(\frac{df}{dr} + \frac{l+1}{r} f \right) \mathbf{T}_{l-1, m}(\mathbf{n}_r) \\ &- \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \left(\frac{df}{dr} - \frac{l}{r} f \right) \mathbf{T}_{l+1, m}(\mathbf{n}_r). \end{aligned} \quad (17)$$

Тоді з урахуванням (13) запишемо

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) = -\frac{d\varphi_i(r)}{dr} \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i) \quad (18)$$

і знайдемо компоненти $p_{l_{ph}}^M$ і $p_{l_{ph}}^E$:

$$p_{l_{ph}}^M = -I_M(l_f, l_{ph}, l_{ph}) \cdot J(l, l),$$

$$p_{l_{ph}}^E = -\sqrt{\frac{l_{ph}+1}{2l_{ph}+1}} I_E(l_f, l_{ph}, l_{ph}-1) \cdot J(l_f, l_{ph}-1) + \sqrt{\frac{l_{ph}}{2l_{ph}+1}} I_E(l_f, l_{ph}, l_{ph}+1) \cdot J(l_f, l_{ph}+1), \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} J(l_f, n) &= \int_0^{+\infty} \varphi_f^*(l, r) \frac{d\varphi_i(r)}{dr} j_n(kr) r^2 dr, \\ I_M(l_f, l_{ph}, n) &= \sum_{\mu=\pm 1} \mu h_\mu \int Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r^f) \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i) \mathbf{T}_{l_{ph} n, \mu}^*(\mathbf{n}_{ph}) d\Omega, \\ I_E(l_f, l_{ph}, n) &= \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \int Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r^f) \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i) \mathbf{T}_{l_{ph} n, \mu}^*(\mathbf{n}_{ph}) d\Omega. \end{aligned} \quad (20)$$

Обчисливши коефіцієнти Клебша-Гордона

$$(110|1, -1, 0) = (110|-1, 1, 0) = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad (21)$$

з (10) і (18) знаходимо:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i) &= \sum_{\mu=\pm 1} (110|-\mu, \mu, 0) Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}_r^i) \xi_\mu \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=\pm 1} Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}_r^i) \xi_\mu, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) &= -\sqrt{\frac{1}{3}} \frac{d\varphi_i(r)}{dr} \sum_{\mu=-1,1} Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}_r^i) \xi_\mu. \end{aligned} \quad (22)$$

Щоб визначити матричний елемент переходу в суперпозицію за всіма можливими станами з різними m_f при однаковому l_f , слід у кутових інтегралах у (20) ще виконати підсумовування за всіма можливими значеннями m_f . Підставивши сюди явний вигляд (22) функції $\mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i)$, отримаємо:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_M(l_f, l_{ph}, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=\pm 1} \sum_m \mu h_\mu \\ &\times \int Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r^f) \sum_{\mu'=\pm 1} Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r^i) \xi_{\mu'} \mathbf{T}_{l_{ph} n, \mu}^*(\mathbf{n}_{ph}) d\Omega, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_E(l_f, l_{ph}, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=\pm 1} \sum_m h_\mu \\ &\times \int Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r^f) \sum_{\mu'=\pm 1} Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r^i) \xi_{\mu'} \mathbf{T}_{l_{ph} n, \mu}^*(\mathbf{n}_{ph}) d\Omega. \end{aligned}$$

Е. Фізичний зміст векторів \mathbf{n}_r^i , \mathbf{n}_r^f , \mathbf{n}_{ph} і розрахунок кутових інтегралів

Проаналізуємо фізичний зміст векторів \mathbf{n}_r^i , \mathbf{n}_r^f і \mathbf{n}_{ph} . Спочатку розгляньмо вектор \mathbf{n}_r^i . Згідно з визна-

ченням хвильової функції $\psi_i(\mathbf{r})$, він визначає орієнтацію радіус-вектора \mathbf{r} від центра системи координат до точки простору, де ця хвильова функція описує частинку до випромінювання фотона. Такий опис появи частинки в точці, зазначеній радіус-вектором \mathbf{r} , має ймовірнісний сенс і виконується по всьому простору. Кути θ_i і φ_i вектора \mathbf{n}_r^i є також кутами для радіус-вектора \mathbf{r} у системі координат.

Вектор \mathbf{n}_r^f визначає орієнтацію радіус-вектора \mathbf{r} у системі координат від центра до точки простору, де хвильова функція $\psi_f(\mathbf{r})$ описує частинку після випромінювання фотона. Такий опис появи частинки також виконується по всьому простору й знову має ймовірнісний сенс. Зміна напрямку руху (або тунелювання) частинки внаслідок випромінювання фотона пов'язана зі зміною квантових чисел l і m у кутовій хвильовій функції: $Y_{00}(\mathbf{n}_r^i) \rightarrow Y_{lm}(\mathbf{n}_r^f)$ (які змінюють імовірність перебування цієї частинки по різних напрямках, вносячи асиметрію). Кути θ_f і φ_f вектора \mathbf{n}_r^f є знову кутами радіус-вектора \mathbf{r} у системі координат. Тобто обидва вектори \mathbf{n}_r^i і \mathbf{n}_r^f мають однаковий сенс і тому співпадають. Вектор \mathbf{n}_{ph} визначає орієнтацію радіус-вектора \mathbf{r} в системі координат від центра до точки простору, де хвильова функція фотона описує його "появу". Тому можна записати:

$$\mathbf{n}_{ph} = \mathbf{n}_r^i = \mathbf{n}_r^f = \mathbf{n}_r. \quad (24)$$

Оскільки ми вибрали систему координат так, що напрямок осі z збігається з напрямком вектора випромінювання фотона \mathbf{k} , то підінтегральна функція з вектором \mathbf{r} у матричному елементі є амплітудою (а її квадрат — імовірністю) появи в точці простору \mathbf{r} частинки після випромінювання фотона, коли він випромінений уздовж осі z . Тоді кут θ (від вектора \mathbf{n}_r) саме й виявляється розташованим між напрямком руху частинки (з урахуванням тунелювання) і напрямком випромінювання фотона.

Розгляньмо кутові інтеграли (23) без урахування підсумовування за m_f у кінцевому стані. Згідно з (24), запишемо їх так:

$$\begin{aligned}
 I_M(l_f, l_{ph}, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=\pm 1} \mu h_\mu \int Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r) \sum_{\mu'=\pm 1} Y_{1, -\mu'}(\mathbf{n}_r) \xi_{\mu'} \mathbf{T}_{l_{ph} n, \mu}^*(\mathbf{n}_r) d\Omega, \\
 I_E(l_f, l_{ph}, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \int Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r) \sum_{\mu'=\pm 1} Y_{1, -\mu'}(\mathbf{n}_r) \xi_{\mu'} \mathbf{T}_{l_{ph} n, \mu}^*(\mathbf{n}_r) d\Omega.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Підставивши сюди явний вид векторної сферичної гармоніки

$$\mathbf{T}_{l_{ph} n, \mu}(\mathbf{n}_r) = \sum_{\mu''=\pm 1} (n, 1, l_{ph} | \mu - \mu'', \mu'') Y_{n, \mu - \mu''}(\mathbf{n}_r) \xi_{\mu''} \tag{26}$$

і враховуючи ортогональність векторів $\xi_{\pm 1}$, одержимо:

$$\begin{aligned}
 I_M(l_f, l_{ph}, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=\pm 1} \mu h_\mu \sum_{\mu'=\pm 1} (n, 1, l_{ph} | \mu - \mu', \mu') \int Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r) Y_{1, -\mu'}(\mathbf{n}_r) Y_{n, \mu - \mu'}^*(\mathbf{n}_r) d\Omega, \\
 I_E(l_f, l_{ph}, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \sum_{\mu'=\pm 1} (n, 1, l_{ph} | \mu - \mu', \mu') \int Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r) Y_{1, -\mu'}(\mathbf{n}_r) Y_{n, \mu - \mu'}^*(\mathbf{n}_r) d\Omega.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Проінтегруймо за $d\Omega$. Підставивши у (27) явний вигляд сферичної функції $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, розпишімо кутовий інтеграл так:

$$\begin{aligned}
 &\int Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r) Y_{1, -\mu'}(\mathbf{n}_r) Y_{n, \mu - \mu'}^*(\mathbf{n}_r) d\Omega = (-1)^{(m+|m| - \mu' + 1 + \mu - \mu' + |\mu - \mu'|)/2} (-1)^{l+n} i^{l+n+1} \\
 &\times \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|\mu-\mu'|)!}{(n+|\mu-\mu'|)!}} \\
 &\times \int_0^{2\pi} e^{i(-m-\mu'-\mu+\mu')\varphi} d\varphi \cdot \int_0^\pi P_l^{|m|}(\cos\theta) P_1^1(\cos\theta) P_n^{|\mu-\mu'|}(\cos\theta) \cdot \sin\theta d\theta d\varphi.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Інтеграл за φ відмінний від нуля лише при виконанні умови:

$$m = -\mu.$$

Ураховуючи, що $\mu = \pm 1$, отримаємо обмеження на можливі значення чисел m і l_f :

$$m = -\mu = \pm 1, \quad l_f \geq 1 \tag{29}$$

і

$$n \geq |\mu - \mu'| = |m + \mu'|. \tag{30}$$

Узявши до уваги це, знаходимо:

$$\begin{aligned}
 \int Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r) Y_{1, -\mu'}(\mathbf{n}_r) Y_{n, \mu - \mu'}^*(\mathbf{n}_r) d\Omega &= (-1)^{l+n-\mu'+1+\frac{|m+\mu'|}{2}} i^{l+n+1} \sqrt{\frac{3(2l+1)(2n+1)}{32\pi} \frac{(l-1)!}{(l+1)!} \frac{(n-|m+\mu'|)!}{(n+|m+\mu'|)!}} \\
 &\times \int P_l^1(\cos\theta) P_1^1(\cos\theta) P_n^{m+\mu'}(\cos\theta) \cdot \sin\theta d\theta d\varphi.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Тепер уведемо наступні коефіцієнти

$$C_{l_f l_{ph} n}^{m\mu'} = (-1)^{l_f+n+1-\mu'+\frac{|m+\mu'|}{2}} (n, 1, l_{ph} | -m - \mu', \mu', -m) \sqrt{\frac{(2l_f+1)(2n+1)}{32\pi} \frac{(l_f-1)!}{(l_f+1)!} \frac{(n-|m+\mu'|)!}{(n+|m+\mu'|)!}} \tag{32}$$

і функцію

$$f_{l_f n}^{m\mu'}(\theta) = P_{l_f}^1(\cos\theta) P_1^1(\cos\theta) P_n^{m+\mu'}(\cos\theta). \tag{33}$$

Виконуючи інтегрування за кутом φ , ми знайдемо повні кутові інтеграли $I_M(l_f, l_{ph}, n)$ і $I_E(l_f, l_{ph}, n)$:

$$\begin{aligned}
 I_M(l_f; l_{ph}, n) &= -m h_{-m} i^{l_f+n+1} \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_f l_{ph} n}^{m\mu'} \int_0^\pi f_{l_f n}^{m\mu'}(\theta) \sin \theta d\theta, \\
 I_E(l_f; l_{ph}, n) &= h_{-m} i^{l_f+n+1} \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_f l_{ph} n}^{m\mu'} \int_0^\pi f_{l_f n}^{m\mu'}(\theta) \sin \theta d\theta.
 \end{aligned} \tag{34}$$

Тепер (без урахування меж інтегрування) визначимо диференціальні вирази від цих кутових інтегралів по куту θ

$$\begin{aligned}
 \frac{d I_M(l_f; l_{ph}, n)}{\sin \theta d\theta} &= -m h_{-m} i^{l_f+n+1} \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_f l_{ph} n}^{m\mu'} f_{l_f n}^{m\mu'}(\theta), \\
 \frac{d I_E(l_f; l_{ph}, n)}{\sin \theta d\theta} &= h_{-m} i^{l_f+n+1} \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_f l_{ph} n}^{m\mu'} f_{l_f n}^{m\mu'}(\theta)
 \end{aligned} \tag{35}$$

і визначимо диференціальні матричні елементи p_l^M і p_l^E

$$\begin{aligned}
 \frac{d p_l^M}{\sin \theta d\theta} &= -\frac{d I_M(l_f, l_{ph}, l_{ph})}{\sin \theta d\theta} \cdot J(l_f, l_{ph}) = m h_{-m} i^{l_f+l_{ph}+1} J(l_f, l_{ph}) \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_f l_{ph} l_{ph}}^{m\mu'} f_{l_f l_{ph}}^{m\mu'}(\theta), \\
 \frac{d p_l^E}{\sin \theta d\theta} &= -h_{-m} i^{l_f+l_{ph}} \sqrt{\frac{l_{ph}+1}{2l_{ph}+1}} J(l_f, l_{ph}-1) \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_f, l_{ph}, l_{ph}-1}^{m\mu'} f_{l_f, l_{ph}-1}^{m\mu'}(\theta) \\
 &+ h_{-m} i^{l_f+l_{ph}+2} \sqrt{\frac{l_{ph}}{2l_{ph}+1}} J(l_f, l_{ph}+1) \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_f, l_{ph}, l_{ph}+1}^{m\mu'} f_{l_f, l_{ph}+1}^{m\mu'}(\theta).
 \end{aligned} \tag{36}$$

Звідси можна бачити, що інтегрування визначених так функцій по куту θ з межами від 0 до π дає повні матричні елементи p_l^M і p_l^E .

Для переходу в суперпозицію за всіма можливими кінцевими станами з різними m_f при однаковому l_f замість (36) одержимо:

$$\begin{aligned}
 \frac{d \tilde{p}_l^M}{\sin \theta d\theta} &= i^{l_f+l_{ph}+1} J(l_f, l_{ph}) \sum_{m=\pm 1} m h_{-m} \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_f l_{ph} l_{ph}}^{m\mu'} f_{l_f l_{ph}}^{m\mu'}(\theta), \\
 \frac{d \tilde{p}_l^E}{\sin \theta d\theta} &= -i^{l_f+l_{ph}} \sqrt{\frac{l_{ph}+1}{2l_{ph}+1}} J(l_f, l_{ph}-1) \sum_{m=\pm 1} h_{-m} \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_f, l_{ph}, l_{ph}-1}^{m\mu'} f_{l_f, l_{ph}-1}^{m\mu'}(\theta) \\
 &- i^{l_f+l_{ph}} \sqrt{\frac{l_{ph}}{2l_{ph}+1}} J(l_f, l_{ph}+1) \sum_{m=\pm 1} h_{-m} \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_f, l_{ph}, l_{ph}+1}^{m\mu'} f_{l_f, l_{ph}+1}^{m\mu'}(\theta).
 \end{aligned} \tag{37}$$

Ф. Розрахунок кутових і повних матричних елементів при перших числах l_f, l_{ph}

Знайдімо матричний елемент при перших числах l_f і l_{ph} . Нехай

$$l_f = 1, \quad l_{ph} = 1. \tag{38}$$

Згідно з (37) запишімо:

$$\begin{aligned}
 \frac{d \tilde{p}_1^M}{\sin \theta d\theta} &= -i J(1, 1) \cdot \sum_{m=\pm 1} m h_{-m} \sum_{\mu'=\pm 1} C_{111}^{m\mu'} f_{11}^{m\mu'}(\theta), \\
 \frac{d \tilde{p}_1^E}{\sin \theta d\theta} &= \sqrt{\frac{2}{3}} J(1, 0) \sum_{m=\pm 1} h_{-m} \sum_{\mu'=\pm 1} C_{110}^{m\mu'} f_{10}^{m\mu'}(\theta) \tag{39}
 \end{aligned}$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{3}} J(1, 2) \sum_{m=\pm 1} h_{-m} \sum_{\mu'=\pm 1} C_{112}^{m\mu'} f_{12}^{m\mu'}(\theta).$$

Визначивши коефіцієнти $C_{11n}^{m\mu'}$ і функції $f_{1n}^{m\mu'}(\theta)$ (див. Додатки 1 та 2), отримуємо:

$$\begin{aligned}
 \frac{d \tilde{p}_1^M}{\sin \theta d\theta} &= -\frac{3}{8} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot J(1, 1) \cdot \sin^2 \theta \cos \theta, \\
 \frac{d \tilde{p}_1^E}{\sin \theta d\theta} &= i \frac{1}{8} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot J(1, 0) \cdot \sin^2 \theta \\
 &+ i \frac{1}{8} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot J(1, 2) \cdot \sin^2 \theta (1 - 3 \sin^2 \theta).
 \end{aligned} \tag{40}$$

Інтегруючи (40) за кутом θ , знаходимо інтегральні матричні елементи:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1^M &= 0, \\ \tilde{p}_1^E &= i \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left\{ J(1, 0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} \cdot J(1, 2) \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

Г. Кутова ймовірність випромінювання фотона з імпульсом \mathbf{k} і поляризацією $\mathbf{e}^{(\alpha)}$

Розглянемо тепер задачу визначення ймовірності гальмівного випромінювання фотонів, коли до випромінювання (тобто система перебуває в початковому i -стані) заданий потік α -частинок із квантовим числом $l_i = m_i = 0$ і потрібно знайти середнє число α -частинок після випромінювання першого фотона (тобто система перебуває в кінцевому f -стані), що рухаються під кутом до напрямку випромінювання цього фотона та мають квантові числа l_f, m_f .

Ймовірність переходу системи (в одиницю часу) з початкового i -стану в кінцеві f -стани, що входять у заданий інтервал $d\nu_f$, з випромінюванням фотона з можливими імпульсами в заданому інтервалі $d\nu_{ph}$ визначимо так (див. [25, (42,5) п. 42, стор. 189]; [27, п. 44, стор. 191]):

$$\begin{aligned} dW &= \frac{|a_{fi}|^2}{T} \cdot d\nu = 2\pi |F_{fi}|^2 \delta(w_f - w_i + w) \cdot d\nu, \quad (42) \\ d\nu &= d\nu_f \cdot d\nu_{ph}, \end{aligned}$$

де $d\nu$ — сукупність величин, що характеризують фотон і частинку в кінцевому f -стані. Якщо розглядаємо випромінювання фотона з імпульсом \mathbf{k} , то

$$d\nu_{ph} = \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = \frac{w^2 dw d\Omega_{ph}}{(2\pi c)^3}, \quad (43)$$

де $d\Omega_{ph} = d \cos \theta_{ph} = \sin \theta_{ph} d\theta_{ph} d\varphi_{ph}$, $k_{ph} = w/c$. Тоді інтегруючи (42) за dw , отримаємо:

$$\begin{aligned} dW &= \frac{w_{fi}^2 |F_{fi}|^2}{(2\pi)^2 c^3} d\Omega_{ph} d\nu_f, \quad (44) \\ w_{fi} &= w_i - w_f = \frac{E_i - E_f}{\hbar}. \end{aligned}$$

Тепер слід зробити важливе зауваження стосовно інтервалу $d\nu_f$. При побудові ймовірності у вигляді (42) ми використовуємо матричний елемент F_{fi} , що визначений як інтеграл по простору з підсумовуванням за деякими квантовими числами в кінцевому f -стані. Цю процедуру можна розглянути як усереднення за цими характеристиками, і тому F_{fi} не залежить від них. Тому далі будемо вважати, що інтервал $d\nu_f$, що входить у визначення ймовірності (42), повинен ураховувати лише ті додаткові характеристики й квантові числа системи в кінцевому f -стані, за якими не виконувалося інтегрування та підсумовування при визначенні F_{fi} .

Підставляючи вигляд (3) для F_{fi} у (44), одержуємо:

$$\begin{aligned} dW &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 \hbar e^2}{2\pi c^3} \frac{w_{fi}}{m^2} \\ &\times \left| \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha)*} \mathbf{p}(k_i, k_f) \right|^2 d\Omega_{ph} d\nu_f. \end{aligned} \quad (45)$$

Цей вираз являє собою ймовірність випромінювання фотона з імпульсом \mathbf{k} (і з усередненням по поляризації $\mathbf{e}^{(\alpha)}$), де вже виконане інтегрування за кутами руху частинки після випромінювання фотона. Така ймовірність усереднена за всіма можливими напрямками руху частинки після випромінювання й тому не залежить від них.

Для опису випромінювання фотона з імпульсом \mathbf{k} з урахуванням напрямку \mathbf{n}_f^f руху (або тунелювання) частинки після випромінювання я визначу ймовірність випромінювання так:

Визначимо диференціальну ймовірність по куту θ (і диференціальну ймовірність по тілесному об'єму Ω) як таку функцію, інтеграл від якої за кутом θ з межами від 0 до π (об'ємний інтеграл за кутами θ і φ з відповідними межами) точно відповідає повній ймовірності випромінювання (45).

Розглянемо наступні дві функції:

$$\begin{aligned} \frac{dW(\varphi_f, \theta_f)}{d\Omega_{ph} d\Omega_f} &= \frac{dW(\varphi_f, \theta_f)}{d\Omega_{ph} \sin \theta_f d\theta_f d\varphi_f} = \frac{Z_{\text{eff}}^2 \hbar e^2}{2\pi c^3} \frac{w_{fi}}{m^2} \frac{d}{d\Omega_f} \left| p(k_i, k_f) \right|^2, \\ \frac{dW(\theta_f)}{d\Omega_{ph} d \cos \theta_f} &= \frac{dW(\theta_f)}{d\Omega_{ph} \sin \theta_f d\theta_f} = \frac{Z_{\text{eff}}^2 \hbar e^2}{2\pi c^3} \frac{w_{fi}}{m^2} \frac{d}{\sin \theta_f d\theta_f} \left| p(k_i, k_f) \right|^2. \end{aligned} \quad (46)$$

Використовуючи введені вище визначення (39) для диференціальних матричних елементів, що залежать від кута θ і тілесного кута Ω , отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{dW(\varphi_f, \theta_f)}{d\Omega_{ph} d\Omega_f} &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 \hbar e^2}{2\pi c^3} \frac{w_{fi}}{m^2} \left\{ p(k_i, k_f) \frac{dp^*(k_i, k_f, \Omega_f)}{d\Omega_f} + \text{h.e.} \right\}, \\ \frac{dW(\theta_f)}{d\Omega_{ph} d \cos \theta_f} &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 \hbar e^2}{2\pi c^3} \frac{w_{fi}}{m^2} \left\{ p(k_i, k_f) \frac{dp^*(k_i, k_f, \theta_f)}{d \cos \theta_f} + \text{h.e.} \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

Можна бачити, що так побудовані функції точно задовольняють таке визначення й тому можуть бути використані як визначення для кутових ймовірностей.

Повна (інтегральна за кутами) ймовірність випромінювання дорівнює:

$$W = \frac{Z_{\text{eff}}^2 \hbar e^2}{2\pi c^3} \frac{w_{fi}}{m^2} \left| p(k_i, k_f) \right|^2. \quad (48)$$

Із (47) і (48) бачимо, що так визначені кутові ймовірності є дійсними.

Якщо ймовірність W має розмірність маси (у раціональній системі одиниць вона дорівнює c^{-1}) і збігається з енергетичною шириною Γ , то можна визначити зворотну до неї величину τ :

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}, \quad \Gamma = W. \quad (49)$$

Згідно з [24] (див. стор. 175), при розгляді переходу системи з початкового стану в кінцевий величина τ являє собою тривалість життя частинки в початковому стані, тобто τ — тривалість життя α -частинки до випромінювання першого фотона.

Ймовірність випромінювання є обернено пропорційною до нормованого об'єму V , який можна вибрати довільно. Щоб одержати величину, яка характеризує процес випромінювання й не залежить від об'єму V , потрібно поділити ймовірність випромінювання dW на густину потоку j α -частинок, що вилітають при α -розпаді, яка також обернено пропорційна об'єму V . Запишемо ймовірність у такому вигляді:

$$dW(\varphi_f, \theta_f) = n_i v(\mathbf{p}_i) \cdot dP, \quad (50)$$

де n_i — середнє число частинок в одиниці об'єму (густина) до випромінювання (у вибраному тут нормованні хвильової функції системи в початковому i -стані маємо $n_i = 1$), $v(\mathbf{p}_i)$ — модуль швидкості частинки, що вилітає в системі координат, у якій центр розсіяння не рухається (яка збігається з лабораторною системою координат). Множник P пропорційний до елемента тілесного кута частинки після її розсіювання внаслідок випромінювання фотона, і ми будемо називати його *абсолютною ймовірністю* (тоді як величину dw — *відносною ймовірністю*).

Для частинок з кінцевою масою маємо:

$$\mathbf{p}_i = \frac{E_i \mathbf{v}_i}{c^2}. \quad (51)$$

Звідси одержимо:

$$\mathbf{v}_i = \frac{c^2 \mathbf{p}_i}{E_i}, \quad v_i = |\mathbf{v}_i| = \frac{c^2 p_i}{E_i}. \quad (52)$$

Ураховуючи, що у хвильові функції частинки до й після випромінювання фотона входить не імпульс частинки $\mathbf{p}_{i,f}$, а її хвильове число $k_{i,f}$, перепишемо вирази для швидкості так:

$$v_i = \frac{\hbar c^2 k_i}{E_i}. \quad (53)$$

Звідси знаходимо рівняння взаємозв'язку між відносною й абсолютною ймовірностями:

$$dP(\varphi_f, \theta_f) = \frac{dW(\varphi_f, \theta_f)}{n_i v(\mathbf{k})} = dW(\varphi_f, \theta_f) \cdot \frac{E_i}{\hbar c^2 k_i} \quad (54)$$

і обчислюємо саму абсолютну ймовірність ($n_i = 1$):

$$\begin{aligned} \frac{dP(\varphi_f, \theta_f)}{d\Omega_{ph} d\Omega_f} &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{2\pi c^5} \frac{w_{ph} E_i}{m^2 k_i} \left\{ p(k_i, k_f) \frac{dp^*(k_i, k_f, \Omega_f)}{d\Omega_f} + \text{h.e.} \right\}, \\ \frac{dP(\varphi_f, \theta_f)}{d\Omega_{ph} d\cos\theta_f} &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{2\pi c^5} \frac{w_{ph} E_i}{m^2 k_i} \left\{ p(k_i, k_f) \frac{dp^*(k_i, k_f, \Omega_f)}{d\cos\theta_f} + \text{h.e.} \right\}. \end{aligned}$$

Н. Мультипольний підхід

Знайдемо ймовірність випромінювання залежно від кута θ для перших чисел $l_f = 1$ і $l_{ph} = 1$. Із (40) і (41) запишемо:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1(k_i, k_f) &= \sqrt{2\pi} \cdot \left\{ (-i)^l \sqrt{2l+1} \left[\tilde{p}_1^M - i \tilde{p}_1^E \right] \right\} \Big|_{l=1} = -\sqrt{6\pi} \left(i \tilde{p}_1^M + \tilde{p}_1^E \right), \\ \frac{d\tilde{p}_1(k_i, k_f)}{\sin\theta d\theta} &= -\sqrt{6\pi} \left\{ i \frac{d\tilde{p}_1^M}{\sin\theta d\theta} + \frac{d\tilde{p}_1^E}{\sin\theta d\theta} \right\}. \end{aligned} \quad (55)$$

Підставляючи сюди розв'язки (40) і (41) для диференційних й інтегральних електричного й магнітного компонентів від матричного елемента, отримаємо:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_1(k_i, k_f) &= -i \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \left\{ J(1, 0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} \cdot J(1, 2) \right\}, \\ \frac{d\tilde{p}_1(k_i, k_f)}{\sin \theta d\theta} &= i \frac{\sqrt{6}}{8} \cdot \left\{ 3 J(1, 1) \cdot \cos \theta - \sqrt{2} J(1, 0) - J(1, 2) \cdot (1 - 3 \sin^2 \theta) \right\} \cdot \sin^2 \theta.\end{aligned}\quad (56)$$

Тепер знайдемо відносну кутову ймовірність:

$$\begin{aligned}\frac{dW_1^{E1+M1}(\theta_f)}{d\Omega_{ph} d\cos\theta_f} &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 \hbar e^2}{8\pi c^3} \frac{w_{fi}}{m^2} \left\{ \left[J(1, 0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} \cdot J(1, 2) \right] \right. \\ &\quad \times \left[J^*(1, 0) + \frac{1}{\sqrt{2}} J^*(1, 2) \cdot (1 - 3 \sin^2 \theta) - \frac{3}{\sqrt{2}} J^*(1, 1) \cdot \cos \theta \right] + \text{h.e.} \left. \right\} \cdot \sin^2 \theta\end{aligned}\quad (57)$$

й абсолютну кутову ймовірність:

$$\begin{aligned}\frac{dP_1^{E1+M1}(\theta_f)}{d\Omega_{ph} d\cos\theta_f} &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 e^2}{8\pi c^5} \frac{w_{fi}}{m^2} \frac{E_i}{k_i} \left\{ \left[J(1, 0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} \cdot J(1, 2) \right] \right. \\ &\quad \times \left[J^*(1, 0) + \frac{1}{\sqrt{2}} J^*(1, 2) \cdot (1 - 3 \sin^2 \theta) - \frac{3}{\sqrt{2}} J^*(1, 1) \cdot \cos \theta \right] + \text{h.e.} \left. \right\} \cdot \sin^2 \theta.\end{aligned}\quad (58)$$

Вираз (57) можна переписати так:

$$\frac{dW_1^{E1+M1}(\theta_f)}{d\Omega_{ph} d\cos\theta_f} = \frac{dW_1^{E1}(\theta_f)}{d\Omega_{ph} d\cos\theta_f} + \Delta \frac{dW_1^{M1}(\theta_f)}{d\Omega_{ph} d\cos\theta_f},\quad (59)$$

де перший доданок має вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{dW_1^{E1}(\theta_f)}{d\Omega_{ph} d\cos\theta_f} &= \frac{Z_{\text{eff}}^2 \hbar e^2}{8\pi c^3} \frac{w_{fi}}{m^2} \left\{ \left[J(1, 0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} \cdot J(1, 2) \right] \right. \\ &\quad \times \left[J^*(1, 0) + \frac{1}{\sqrt{2}} J^*(1, 2) \cdot (1 - 3 \sin^2 \theta) \right] + \text{h.e.} \left. \right\} \cdot \sin^2 \theta\end{aligned}\quad (60)$$

і визначає ймовірність випромінювання фотона тільки при врахуванні електричного мультиполя випромінювання E1. Другий доданок у (59) є таким:

$$\Delta \frac{dW_1^{E1+M1}(\theta_f)}{d\Omega_{ph} d\cos\theta_f} = -\frac{3 Z_{\text{eff}}^2 \hbar e^2}{8\sqrt{2} \pi c^3} \frac{w_{fi}}{m^2} \left\{ \left[J(1, 0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} \cdot J(1, 2) \right] J^*(1, 1) + \text{h.e.} \right\} \cdot \sin^2 \theta \cos \theta\quad (61)$$

і визначає корекцію ймовірності випромінювання при додатковому врахуванні магнітного мультиполя M1. Звідси видно, що знайдену корекцію можна розділити на радіальний та кутовий компоненти. Тому, залежно від кута, вона впливає на випромінювання однаково для різних частот випромінювання фотона.

I. α -ядерний потенціал

Для опису взаємодії між α -частинкою й дочірнім ядром скористаймося потенціалом [16] (див. (6)–(10) у цій роботі, також див. [20, 21]) загального вигляду

$$V(r, \theta, l, Q) = v_C(r, \theta) + v_N(r, \theta, Q) + v_l(r),\quad (62)$$

де кулонівський $v_C(r, \theta)$, ядерний $v_N(r, \theta, Q)$ і відцентровий $v_l(r)$ компоненти мають такий вигляд:

$$v_C(r, \theta) = \begin{cases} \frac{2Ze^2}{r} \left(1 + \frac{3R^2}{5r^2} \beta_2 Y_{20}(\theta) \right), & \text{для } r \geq r_m, \\ \frac{2Ze^2}{r_m} \left\{ \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2r_m^2} + \frac{3R^2}{5r_m^2} \left(2 - \frac{r^3}{r_m^3} \right) \beta_2 Y_{20}(\theta) \right\}, & \text{для } r < r_m, \end{cases}\quad (63)$$

$$v_N(r, \theta, Q) = \frac{V(A, Z, Q)}{1 + \exp \frac{r - r_m(\theta)}{d}},\quad (64)$$

$$v_l(r) = \frac{l(l+1)}{2mr^2}.\quad (65)$$

Параметри кулонівського та ядерного компонентів ми визначимо відповідно до [16] (див. (14), (16)–(19) у цій роботі):

$$V(A, Z, Q) = - (30.275 - 0.45838 Z/A^{1/3} + 58.270 I - 0.24244 Q), \quad (66)$$

$$R = R_p (1 + 3.0909/R_p^2) + 0.1243 t, \quad (67)$$

$$R_p = 1.24 A^{1/3} (1 + 1.646/A - 0.191 I), \quad (68)$$

$$t = I - 0.4 A/(A + 200), \quad (69)$$

$$d = 0.49290, \quad (70)$$

$$I = (A - 2Z)/A. \quad (71)$$

Також:

$$r_m(\theta) = 1.5268 + R(\theta), \quad (72)$$

$$R(\theta) = R (1 + \beta_2 Y_{20}(\theta)).$$

Тут A і Z — числа нуклонів і протонів дочірнього ядра відповідно, Q — Q_α -значення для α -розпаду, R — радіус дочірнього ядра, $V(A, Z, Q, \theta)$ — інтенсивність (strength) ядерного компонента, r_m — ефективний радіус ядерного компонента, d — параметр дифузності, $Y_{20}(\theta)$ — сферична гармонійна функція другого порядку, θ — кут між напрямком вильоту α -частинки й віссю аксіальної симетрії дочірнього ядра, β_2 — параметр квадрупольної деформації дочірнього ядра.

III. АНАЛІЗ

А. Теорія й експеримент: спектри випромінювання для ядер ^{210}Po , ^{214}Po , ^{226}Ra і ^{244}Cm

Щоб оцінити ефективність уведеного визначення абсолютної ймовірності випромінювання фотонів і точність, яку видає модель, знайдімо спектри випромінювання для ядер ^{210}Po , ^{214}Po і ^{226}Ra , для яких уже існують експериментальні дані на сьогодні.

Найкращий результат в описі експериментальних даних із запропонованої моделі отримано для ядра ^{214}Po . На рис. 1 зображено спектр абсолютної ймовірності випромінювання, обчислений за моделлю для цього ядра, та новітні експериментальні дані [20] (тут немає ніякого нормування обчисленого спектра стосовно експериментальних даних). Ймовірність визначаємо за формулою (58) у наближенні $l = 0$ при розрахунку матричного елемента $p(w, \vartheta)$ (тому що, згідно з оцінками, врахування наступного значення l не суттєво деформує отриманий спектр). Кут ϑ між напрямками руху α -частинки (з урахуванням її тунелювання) і випромінювання фотона дорівнює 90° .

α -ядерний потенціал визначаємо відповідно до (62)–(65), його параметри — за формулами (66)–(72). Q_α -значення дорівнює 7.865 MeV, згідно з [28] (див. стор. 63). Радіальні компоненти хвильових функцій системи, що розпадається, у станах до випромінювання фотона та після нього визначаємо для такого α -ядерного потенціалу у сферично-симетричному наближенні (при $\beta_2 = 0$). Для цього ядра ми також маємо $T_{\text{exp}1/2, \alpha} = 1.6 \cdot 10^{-8}$ сек (див. [28, стор. 63]).

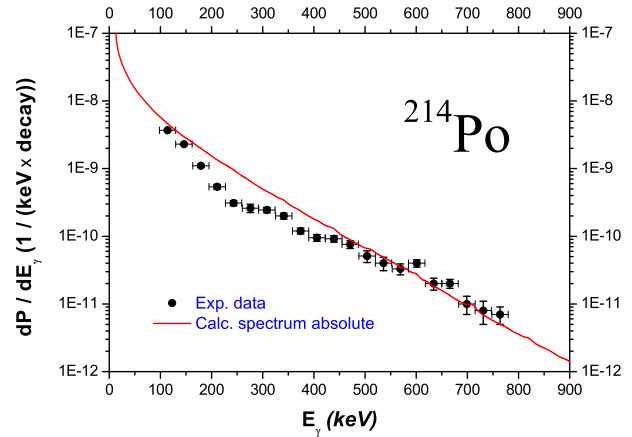


Рис. 1. Абсолютна ймовірність гальмівного випромінювання й експериментальні дані [20] при α -розпаді ядра ^{214}Po .

На цьому малюнку можна бачити, що отриманий спектр для ^{214}Po досить добре узгоджується з експериментальними даними для цього ядра в межах діапазону від 100 keV до 750 keV.

На рис. 2 зображено обчислені спектри абсолютної ймовірності гальмівного випромінювання при α -розпаді ядер ^{210}Po і ^{226}Ra та експериментальні дані з [4] і [21] для цих ядер. У розрахунках абсолютна ймовірність випромінювання, α -ядерний потенціал, його параметри, алгоритми розрахунку хвильових функцій і їхні граничні умови визначаємо й обчислюємо також, як для ядра ^{214}Po . Тут я використовую [28]: Q_α -значення дорівнює 5.439 MeV для ^{210}Po і 4.904 MeV для ^{226}Ra , кут ϑ між напрямками руху α -частинки й випромінювання фотона дорівнює 90° . На малюнках можна бачити, що для обох ядер при нижчих енергіях випроміненого фотона знайдені спектри розташовані трохи нижче від експериментальних даних, але для енергій, починаючи від 350 keV і вище, досягнуто досить гарного збігу між запропонованою теорією та експериментом. Можна відзначити, що для обох ядер збіжність у розрахунку спектрів виявляється гірше в порівнянні зі збіжністю при розрахунку спектра для ядра ^{214}Po , що можна пояснити більшою довжиною області тунелювання для цих двох ядер. Звідси можна зробити висновок: чим більша область тунелювання для досліджуваного ядра, тим гірша збіжність у розрахунку спектра гальмівного випромінювання та тим складніше оцінити й проаналізувати випромінювання з області тунелювання. Із ма-

лонків також можна бачити слабку відмінність між знайденим спектром абсолютної ймовірності випромінювання, отриманим на основі мультипольної моделі, і спектром відносної ймовірності випромінювання, от-

риманим у підході [19,21], що пов'язано з різними комбінаціями інтегралів, які становлять повний матричний елемент, через різні розклади хвильової функції випроміненого фотона.

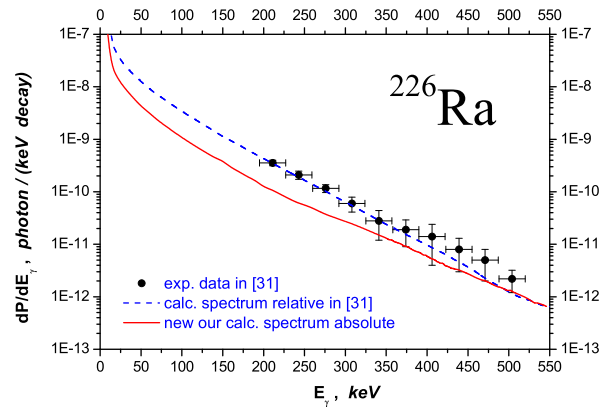
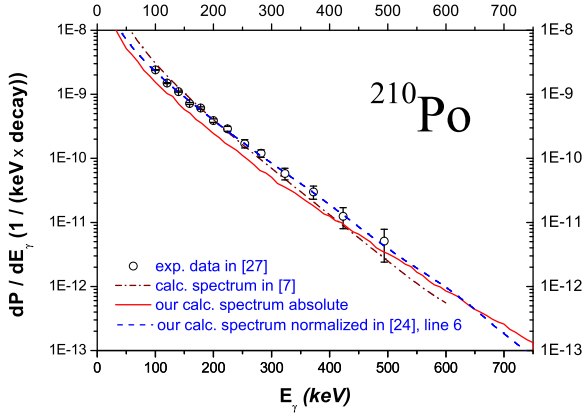


Рис. 2. Абсолютна ймовірність гальмівного випромінювання при α -розпаді сферичного ядра ^{210}Po і деформованого ядра ^{226}Ra у порівнянні з експериментальними даними з [4] і [21] для цих ядер.

Тепер згадаймо, що менш вдало описано гальмівне випромінювання для ядра ^{244}Cm , що, можливо, призвело до подальшого його виключення з аналізу різними теоретиками. Але знайдімо спектр абсолютної ймовірності випромінювання для цього ядра в описаному вище підході. Результати показано на рис. 3. У розрахунках використано такі значення параметрів: Q_α дорівнює 5.940 MeV (узято з [28]) і $\vartheta = 90^\circ$.

мінювання та загального нахилу спектра). Це підсилює ефективність запропонованого визначення кутової абсолютної ймовірності випромінювання фотонів, побудованого на основі просторового розподілу хвильової функції α -частинки, і підтверджує ефективність моделі в мультипольному підході. Звідси можна зробити висновок, що запропонована модель є досить гарною основою для аналізу процесів гальмівного випромінювання при α -розпаді інших ядер.

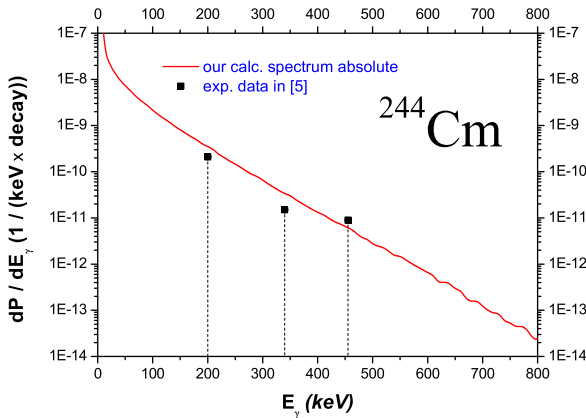


Рис. 3. Абсолютна ймовірність гальмівного випромінювання при α -розпаді ядра ^{244}Cm у порівнянні з експериментальними даними з [29].

Із цього рисунка можна бачити, що знайдений спектр розташований досить близько до верхньої межі помилок експериментальних даних [29]. Це вказує на те, що досить не погане узгодження між теорією й експериментом можливе й для цього ядра, та ці експериментальні дані можна використовувати в подальших дослідженнях для тестування моделей (головно, це тестування абсолютних значень ймовірності випро-

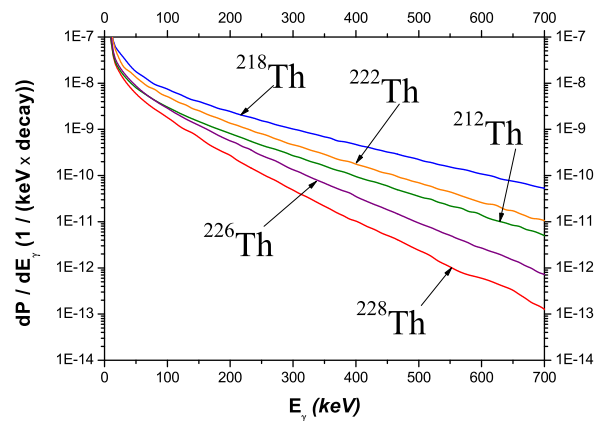


Рис. 4. Значення абсолютної ймовірності гальмівного випромінювання при α -розпаді ядра ^{228}Th та його ізоотопів.

В. Прогнози спектрів випромінювання для ізоотопів Th

У праці [29] повідомлено про поточні експериментальні виміри гальмівного випромінювання при α -розпаді ядра ^{228}Th . Щоб підсилити цю роботу нови-

ми даними, оцінимо абсолютну ймовірність випромінювання для ізотопів ^{228}Th на основі запропонованої вище моделі. Результати таких розрахунків наведено на рис. 4 та в таблиці. У розрахунках я використовую: кут $\vartheta = 90^\circ$, Q_α -значення дорівнює 5.555 MeV (узяті з [28]). Із цього малюнка явно видно, що зі зменшенням Q_α -значення ізотопів знижується й ймовірність га-

льмівного випромінювання. Це підтверджує висновок про існування прямої залежності ймовірності випромінювання від довжини тунелювання через бар'єр, що зроблено в [21] на основі аналізу експериментальних даних і теоретичних розрахунків для ядер ^{226}Ra і ^{214}Po (уперше залежність від енергій α -частинки була проаналізована в [30]).

Дані α -розпаду			Імов. гальм. випромін., 1 / keV / розпад				
A_p	Q_α , MeV	$T_{1/2,\alpha}^{\text{exp}}$, sec	100 keV	200 keV	300 keV	400 keV	500 keV
212	7.987	3.0 E-2	3.0 E-9	8.1 E-10	2.7 E-10	9.5 E-11	3.5 E-11
218	9.881	1.1 E-7	7.5 E-9	2.5 E-9	1.0 E-9	4.7 E-10	2.2 E-10
222	8.164	2.8 E-3	5.2 E-9	1.3 E-9	4.6 E-10	1.7 E-10	7.0 E-11
226	6.487	2.5 E+3	2.9 E-9	5.6 E-10	1.3 E-10	3.5 E-11	9.4 E-12
228	5.555	8.3 E+7	1.8 E-9	2.8 E-10	4.9 E-11	1.0 E-11	1.9 E-12

Таблиця. Значення абсолютної ймовірності гальмівного випромінювання при α -розпаді ядра ^{228}Th та його ізотопів.

IV. ВИСНОВКИ

У статті представлено вдосконалену мультипольну модель гальмівного випромінювання фотонів, що супроводжує α -розпад (див. попередній варіант [17]). Докладно викладено кутовий формалізм визначення матричного елемента випромінювання. Запропоновано нове визначення кутової абсолютної ймовірності випромінювання фотонів (тобто без нормування щодо експериментальних даних) при α -розпаді, де напрямок руху α -частинки назовні (та її тунелювання під бар'єром) побудовано на основі кутового розподілу її просторової хвильової функції. Ефективність уведеного такого визначення, формалізму моделі й точність розрахунку спектрів гальмівного випромінювання проаналізовано при їхньому порівнянні з експериментальними даними для ядер ^{210}Po , ^{214}Po , ^{226}Ra і ^{244}Cm . Відзначимо таке.

- Найкращий результат досягнуто у збігу між отриманою абсолютною ймовірністю гальмівного випромінювання для ядра ^{214}Po та новітніми експериментальними даними [20] для цього ж ядра в області енергій фотонів від 100 keV до 750 keV (див. рис. 1, $Q_\alpha = 7.865$ MeV, кут ϑ між напрямками руху α -частинки й фотоном, що випромінюється, дорівнює 90°).
- Абсолютні ймовірності гальмівного випромінювання при α -розпаді ядер ^{210}Po і ^{226}Ra , отримані в цій моделі, для низьких енергій фотонів розташовані трохи нижче від експериментальних даних [4] і [21], але для енергій, починаючи від 350 keV і вище, досягнуто збігу між теоретичною кривою та експериментальними даними (див. рис. 2, $Q_\alpha = 5.439$ MeV для ^{210}Po і $Q_\alpha = 4.904$ MeV для ^{226}Ra , $\vartheta = 90^\circ$).

- Абсолютна ймовірність гальмівного випромінювання для ядра ^{244}Cm , отримана за моделлю, розташована близько до верхньої межі помилок експериментальних даних [29] (див. рис. 3, $Q_\alpha = 5.940$ MeV і $\vartheta = 90^\circ$).

На основі цього зроблено висновок про досить точне визначення абсолютної ймовірності гальмівного випромінювання фотонів при α -розпаді для довільно обраного ядра на основі запропонованої моделі. Це дає змогу прогнозувати спектри для нових ядер, аналізувати залежності. На цій основі виконано прогнози ймовірності гальмівного випромінювання при α -розпаді ядра ^{228}Th та його ізотопів (в абсолютному масштабі, уперше в повністю квантовому підході).

ПОДЯКИ

Автор вдячний О. К. Зайченкові за його суттєву допомогу при комп'ютерній реалізації чисельних методів розрахунків хвильових функцій, В. С. Ольховському за корисні обговорення стосовно багаторазових внутрішніх відбиттів хвиль на першій стадії α -розпаду й визначення фазових часів, Дж. Джардина за обговорення залежності спектрів гальмівного випромінювання від Q_α -значення α -розпаду, врахування й впливу деформації ядра на гальмівне випромінювання, В. М. Коломийцеві за корисне обговорення й критичні зауваження до загального формалізму запропонованої моделі, С. Н. Федоткіну за слушні коментарі при визначенні відносної й абсолютної ймовірностей випромінювання фотонів у задачі α -розпаді, О. Г. Магнерові за корисні коментарі та пораду стосовно визначення хвильової функції в системі α -розпаду.

ДОДАТОК 1. КОЕФІЦІЄНТИ $C_{L_F L_{PH} N}^{M\mu'}$

Коефіцієнт $C_{l_f l_{ph} n}^{m\mu'}$ визначено так:

$$C_{l_f l_{ph} n}^{m\mu'} = (-1)^{l_f+n+1-\mu'+\frac{l_m+\mu'}{2}} (n, 1, l_{ph} | -m - \mu', \mu', -m) \\ \times \sqrt{\frac{(2l_f+1)(2n+1)}{32\pi} \frac{(l_f-1)!}{(l_f+1)!} \frac{(n-|m+\mu'|)!}{(n+|m+\mu'|)!}}$$

При $l_f = 1, l_{ph} = 1$ і $n = 0$ маємо:

$$m = -\mu' = \pm 1 \quad (73)$$

і коефіцієнт $C_{l_f l_{ph} n}^{m\mu'}$ набирає вигляду:

$$C_{110}^{m\mu'} = -\sqrt{\frac{3}{64\pi}} \cdot (011 | 0, \mu', -m). \quad (74)$$

При $l_f = 1, l_{ph} = 1$ і $n = 1$ виконується (73) і отримуємо:

$$C_{111}^{m\mu'} = \sqrt{\frac{9}{64\pi}} \cdot (111 | 0, \mu', -m). \quad (75)$$

При $l_f = 1, l_{ph} = 1$ і $n = 2$ властивість (73) не виконується. У такому випадку:

$$C_{112}^{m\mu'} = (-1)^{-\mu'+\frac{l_m+\mu'}{2}} \sqrt{\frac{15}{64\pi} \frac{(2-|m+\mu'|)!}{(2+|m+\mu'|)!}} \cdot (211 | -m - \mu', \mu', -m). \quad (76)$$

Розпишемо ці коефіцієнти при різних $m = \pm 1$ і $\mu' = \pm 1$:

$$C_{112}^{-1-1} = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{5}{2\pi}} \cdot (211 | 2, -1, 1), \quad C_{112}^{-11} = -\frac{1}{8} \sqrt{\frac{15}{\pi}} \cdot (211 | 011), \\ C_{112}^{1-1} = -\frac{1}{8} \sqrt{\frac{15}{\pi}} \cdot (211 | 0, -1, -1), \quad C_{112}^{11} = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{5}{2\pi}} \cdot (211 | -2, 1, -1). \quad (77)$$

Підставляючи сюди значення для коефіцієнтів Клебша-Гордона (згідно з таблицею ПА.1 у [26, стор. 317]), знаходимо:

$$C_{110}^{-1-1} = 0, \quad C_{110}^{-11} = -\frac{1}{8} \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}}, \quad C_{110}^{1-1} = -\frac{1}{8} \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}}, \quad C_{110}^{11} = 0; \\ C_{111}^{-1-1} = 0, \quad C_{111}^{-11} = -\frac{3}{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi}}, \quad C_{111}^{1-1} = \frac{3}{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi}}, \quad C_{111}^{11} = 0; \\ C_{112}^{-1-1} = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{3}{2\pi}}, \quad C_{112}^{-11} = -\frac{1}{8} \sqrt{\frac{3}{2\pi}}, \quad C_{112}^{1-1} = -\frac{1}{8} \sqrt{\frac{3}{2\pi}}, \quad C_{112}^{11} = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{3}{2\pi}}. \quad (78)$$

ДОДАТОК 2. ФУНКЦІЇ $F_{L_F N}^{M\mu'}(\theta)$

Розгляньмо функцію $f_{l_f n}^{m\mu'}(\theta)$:

$$f_{l_f n}^{m\mu'}(\theta) = P_{l_f}^1(\cos \theta) P_1^1(\cos \theta) P_n^{|m+\mu'|}(\cos \theta), \quad (79)$$

де $P_l^m(\cos \theta)$ — *приєднані поліноми Лежандра* (див. [25, стор. 752–754, (с,1)–(с,4)]; також див. [26, (2.6), стор. 34]). При $l_f = 1$ і $n = 0, 1, 2$ маємо:

$$\begin{aligned} f_{10}^{m\mu'}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta) P_1^1(\cos\theta) P_0^{|m+\mu'|}(\cos\theta), \\ f_{11}^{m\mu'}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta) P_1^1(\cos\theta) P_1^{|m+\mu'|}(\cos\theta), \\ f_{12}^{m\mu'}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta) P_1^1(\cos\theta) P_2^{|m+\mu'|}(\cos\theta). \end{aligned} \quad (80)$$

Розпишімо при різних $m = \pm 1$ і $\mu' = \pm 1$:

$$\begin{aligned} f_{10}^{-1,-1}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta) P_1^1(\cos\theta) P_0^2(\cos\theta) = 0, \\ f_{10}^{-11}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta) P_1^1(\cos\theta) P_0^0(\cos\theta) = \sin^2\theta, \\ f_{10}^{1,-1}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta) P_1^1(\cos\theta) P_0^0(\cos\theta) = \sin^2\theta, \\ f_{10}^{11}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta) P_1^1(\cos\theta) P_0^2(\cos\theta) = 0; \\ \\ f_{11}^{-1,-1}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta) P_1^1(\cos\theta) P_1^2(\cos\theta) = 0, \\ f_{11}^{-11}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta) P_1^1(\cos\theta) P_1^0(\cos\theta) = \sin^2\theta \cos\theta, \\ f_{11}^{1,-1}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta) P_1^1(\cos\theta) P_1^0(\cos\theta) = \sin^2\theta \cos\theta, \\ f_{11}^{11}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta) P_1^1(\cos\theta) P_1^2(\cos\theta) = 0; \\ \\ f_{12}^{-1,-1}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta) P_1^1(\cos\theta) P_2^2(\cos\theta) = 3\sin^4\theta, \\ f_{12}^{-11}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta) P_1^1(\cos\theta) P_2^0(\cos\theta) = \frac{1}{2}\sin^2\theta(3\cos^2\theta - 1), \\ f_{12}^{1,-1}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta) P_1^1(\cos\theta) P_2^0(\cos\theta) = \frac{1}{2}\sin^2\theta(3\cos^2\theta - 1), \\ f_{12}^{11}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta) P_1^1(\cos\theta) P_2^2(\cos\theta) = 3\sin^4\theta. \end{aligned} \quad (81)$$

-
- [1] M. I. Dyakonov, I. V. Gornyi, Phys. Rev. Lett. **76**, 3542 (1996).
- [2] M. I. Dyakonov, Phys. Rev. C **60**, 037602 (1999); preprint nucl-th/9903016 (1999).
- [3] N. Takigawa, Y. Nozawa, K. Hagino, A. Ono, D. M. Brink, Phys. Rev. C **59**, R593 (1999); preprint nucl-th/9809001 (1998).
- [4] H. Boie, H. Scheit, U. D. Jentschura, F. Köck, M. Lauer, A. I. Milstein, I. S. Terekhov, D. Schwalm, Phys. Rev. Lett. **99**, 022505 (2007); preprint arXiv:0706.2109 (2007).
- [5] U. D. Jentschura, A. I. Milstein, I. S. Terekhov, H. Boie, H. Scheit, D. Schwalm, Phys. Rev. C **77**, 014611 (2008).
- [6] C. A. Bertulani, D. T. de Paula, V. G. Zelevinsky, Phys. Rev. C **60**, 031602 (1999); preprint nucl-ex/9812009 (1998).
- [7] S. Misicu, M. Rizea, W. Greiner, J. Phys. G **27**, 993 (2001).
- [8] W. van Dijk, Y. Nogami, Few-body Systems Suppl. **14**, 229 (2003).
- [9] O. Serot, N. Carjan, D. Strottman, Nucl. Phys. A **569**, 562 (1994).
- [10] W. van Dijk, Y. Nogami, Phys. Rev. Lett. **83**, 2867 (1999).
- [11] W. van Dijk, Y. Nogami, Phys. Rev. C **65**, 024608 (2002).
- [12] B. Ivlev, V. Gudkov, Phys. Rev. C **69**, 037602 (2004); preprint nucl-th/0307012 (2003).
- [13] V. V. Flambaum, V. G. Zelevinsky, Phys. Rev. Lett. **83**, 3108 (1999); preprint nucl-th/9812076 (1998).
- [14] И. С. Баткин, И. В. Копыгин, Т. А. Чуракова, Яд. физ. **44**, 1454 (1986).
- [15] T. Papenbrock, G. F. Bertsch, Phys. Rev. Lett. **80**, 4141 (1998); preprint nucl-th/9801044 (1998).
- [16] V. Yu. Denisov, H. Ikezoe, Phys. Rev. C **72**, 064613 (2005); preprint nucl-th/0510082 (2005).
- [17] S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, Prog. Theor. Phys. **109**, 203 (2003); preprint nucl-th/0404090 (2004).
- [18] S. P. Maydanyuk, S. V. Belchikov, Prob. At. Sci. Tech. Ser. Nucl. Phys. Inv. **44**, 19 (2004); preprint nucl-th/0404013 (2004).
- [19] S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, Eur. Phys. J. A **28**, 283 (2006); preprint nucl-th/0408022 (2004).
- [20] G. Giardina *et al.*, Eur. Phys. J. A **36**, 31 (2008).
- [21] G. Giardina *et al.*, Mod. Phys. Lett. **A23** (31), 2651 (2008); preprint arXiv:0804.2640 (2008).
- [22] S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, G. Giardina, G. Fazio, G. Mandaglio, M. Manganaro, Nucl. Phys. A **823** (1–4), 38 (2009).
- [23] G. Mandaglio *et al.*, Radiation Effects and Defects in Solid **164** (5–6), 283–286 (2009).
- [24] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Квантовые поля* (Наука, Москва, 1980).
- [25] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика, курс Теоретической физики. Т. 3* (Наука, Москва, 1989).
- [26] И. Айзенберг, В. Грайнер, *Механизмы возбуждения ядра. Электромагнитное и слабое взаимодействия Т. 2.* (Атомиздат, Москва, 1973).
- [27] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика, курс теоретической физики. Т. 4* (Наука, Москва, 1989).
- [28] B. Buck, A. C. Merchant, S. M. Perez, At. Dat. Nucl. Dat. Tabl. **54**, 53 (1993).
- [29] J. Kasagi, H. Yamazaki, N. Kasajima, T. Ohtsuki, H. Yuki, J. Phys. G **23**, 1451 (1997).
- [30] W. So, Y. Kim, J. Korean Phys. Soc. **37**, 202 (2000).

**A MULTIPOLAR APPROACH FOR THE DESCRIPTION
OF BREMSSTRAHLUNG DURING α -DECAY**

S. Maydanyuk
*Institute for Nuclear Research NAS Ukraine,
41, Nauky Ave., Kyiv, UA-03680, Ukraine,
e-mail: maidan@kinr.kiev.ua*

An improved multipolar model of bremsstrahlung accompanying α -decay is presented. A special emphasis is given to the development of the angular formalism of matrix elements. A new definition of the angular probability of the photon emission is introduced where direction of motion of the α -particle above the barrier (its tunneling under the barrier) is defined on the basis of the angular distribution of its wave function. The spectra of the absolute bremsstrahlung probability calculated on the basis of the model are found to be in a good agreement with experimental data for the ^{210}Po , ^{214}Po , ^{226}Ra and ^{244}Cm nuclei. Predictions of the bremsstrahlung spectra for the Th isotopes are made.