ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 13, № 3 (2009) 3602(8 с.)

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 13, No. 3 (2009) 3602(8 p.)

ҐАУССОВЕ НАБЛИЖЕННЯ В МОДЕЛІ MINORITY GAME

В. Янішевський
Дрогобицький державний педагогічний університет Імені Івана Франка,
вул. Івана Франка, 24, м. Дрогобич, 82100, Україна
(Отримано 12 листопада 2008 р.; в остаточному вигляді — 22 вересня 2009 р.)

У статті подано результати дослідження оптимізаційної задачі в моделі minority game в ґауссовому наближенні. Це наближення полягає в тому, що при усередненні за дискретними змінними в методі реплік здійснено перехід до усереднення за неперервними змінними з нормальним (ґауссовим) розподілом. Розрахунки в наближенні симетричних реплік порівнюються з іншим відомим із літературних джерел підходом.

Ключові слова: метод реплік, оптимізація.

PACS number(s): 64.60.Cn, 75.10.Nr, 02.60.Pn

I. ВСТУП

Модель minority game створили для опису фондових ринків та вивчали в роботах [1–6]. На сьогодні minority game охоплює багатосторонні дослідження ринкових систем, тому наведемо коротко основні положення minority game згідно з [4].

У цій моделі ринок розглядають як ігрову взаємодію N аґентів. У кожен момент часу t i-ий аґент ($i = 1, \dots, N$) може виконувати дві дії: $a_i(t) = 1$ (купівля) або $a_i(t) = -1$ (продаж). При цьому виграш i-го аґента з урахуванням дій усіх аґентів визначаємо формулою:

$$u_i(t) = -a_i(t)\, A(t), \qquad \text{де } A(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i(t). \tag{1.1}$$

Тип взаємодії (1.1) відображає правило меншості — виграє той, хто в кінцевому підсумку перебуває в меншості. Виграш становить $a_i(t) = -\text{sign}(A(t))$, програш більшості — $(-|A(t)|)$. Усі аґенти мають доступ до спільної інформації, яку в момент часу t описують цілим числом $\mu(t) = 1, \dots, P$. Оскільки поведінка аґентів впливає на ринок, то цю дію позначають через $A^{\mu(t)}(t)$. Загалом існує 2^P стратегій, але вважається, що кожен аґент вибирає із загальної кількості лише S. Дія аґента i, якщо він дотримується стратегії s, враховуючи інформацію $\mu(t)$, є $a^{\mu}_{s,i}$ (для рівноважного випадку часову змінну опускаємо). Вважаємо, що число P досить велике, того ж самого порядку, що N (макроскопічне), а величина $\alpha = P/N$ скінченна при $N \to \infty$. Значення μ описуємо певним розподілом ρ^{μ} незалежно для кожного часового кроку (задається значення $\rho^{\mu} = 1/P$). Приймаємо також, що для кожного часового кроку дії аґентів $a^{\mu}_{s,i}$ є випадковими та незалежними з ймовірностями вибору дій у кожному стані:

$$P(a^{\mu}_{s,i} = +1) = P(a^{\mu}_{s,i} = -1) = \frac{1}{2},$$
$$\forall\, i \in N, \quad s = 1, \dots, S, \quad \mu = 1, \dots, P.$$

Гравці дотримуються змішаних стратегій з імовірностями $\pi_{s,i}$, що визначають імовірності, з якими i-ий аґент застосовує цю стратегію (виконується очевидна рівність $\sum_s \pi_{s,i} = 1$). Множина змінних $\pi_{s,i}$ задає фазовий простір моделі [4]. У фазовому просторі визначають середні значення величин:

$$\langle A^{\mu} \rangle = \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{S} \pi_{s,i}\, a^{\mu}_{s,i}\,. \tag{1.2}$$

Як показано в [4, 5], однією з важливих рівноважних характеристик моделі є величина:

$$H = \sum_{\mu=1}^{P} \rho^{\mu} \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{S} \pi_{s,i}\, a^{\mu}_{s,i} \right)^2, \tag{1.3}$$

що визначає флюктуації (1.2). Установлено також, що (1.3) має властивості гамільтоніана системи [4]. У зазначених роботах досліджували мінімум величини (1.3) на множині змінних $\pi_{s,i}$ при всеможливих реалізаціях $\{a^{\mu}_{s,i}\}$, за якими здійснювалося усереднення:

$$\mathcal{H} = \left\langle \min_{\pi} H(\pi) \right\rangle_a. \tag{1.4}$$

Вважається, якщо $\mathcal{H} > 0$, то гра асиметрична (оскільки для деякого μ існує $A^{\mu} > 0$), якщо ж $\mathcal{H} = 0$, то — симетрична.

Оптимізаційна задача (1.4) вивчається методами статистичної фізики та зводиться до визначення основного стану гамільтоніана (1.3), заданого на множині динамічних змінних $\{\pi_{s,i}\}$. Основний стан відповідає "вільній енерґії" системи, що описується гамільтоніаном (1.3) при "нульовій температурі" (або для оберненої температури $\beta \to \infty$). У зазначених роботах знайдено асимптотично точний розв'язок (1.4) при $N, P \to \infty$ та $P/N = \alpha \sim 1$ та визначено залежність $\mathcal{H}$ від параметра α.

Отримуючи розв'язок в [4,5], використовували розклад за параметром β/N, який вважається малим (а саме, використовували наближення $\cos(\sqrt{\beta/N}x) \simeq \exp(-\beta/(2N)x^2)$. Так зазвичай чинять у задачах статистичної фізики, оскільки системи, які вивчає статистична фізика, містять макроскопічну кількість частинок $N \approx 10^{20}$. Тому при дослідженні термодинамічних властивостей статистичних систем величина β/N в області досить низьких температур ($T = 1/\beta$) є малою. Однак в оптимізаційній задачі моделі minority game, незважаючи на достатню схожість, значення $N \approx 10^3 \div 10^4$, а реальний зміст мають лише значення $\beta \to \infty$. Зважаючи на сказане, трактування величини β/N як малого параметра не є достатньо обґрунтованим. Тому становить інтерес розгляд способів розрахунку, у яких не використовують розкладу за параметром β/N. В основі запропонованого в цій статті способу побудови асимптотично точного розв'язку лежить ідея граничних теорем теорії ймовірностей [8] — сума досить великої кількості однаково розподілених величин є випадковою величиною, розподіленою за нормальним (ґауссовим) законом.

II. МІНІМІЗАЦІЯ В МЕТОДІ СТАТСУМИ

Як зазначалося, задача полягає у вивченні мінімуму гамільтоніана H на множині змінних $\{\pi_{s,i}\}$ та усередненні за всіма реалізаціями $\{a^\mu_{s,i}\}$. Як і при дослідженні основного стану фізичних систем [7], мінімум можна розглядати як значення гамільтоніана системи при нулі "температури". З цією метою визначають статистичну суму системи:

$$Z(\beta) = \mathrm{Sp}_\pi \exp(-\beta H(\pi)),$$

де β — "обернена температура", Sp_π позначає суму за всіма можливими станами системи (інтеґрал за змінними $\pi_{s,i} \in [0,1]$ із урахуванням умови $\sum_s \pi_{s,i} = 1$), позначення $H(\pi)$ — вказує на функціональну залежність від ймовірностей змішаних стратегій $\{\pi_{s,i}\}$. Отже, мінімум гамільтоніана визначають так:

$$\min_\pi H(\pi) = -\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \ln Z(\beta). \tag{2.1}$$

У (2.1) міститься залежність від усіх можливих реалізацій дій гравців $a^\mu_{s,i}$. Щоб отримати змістовні величини, потрібно усереднити за всіма можливими діями гравців $a^\mu_{s,i}$. Після усереднення величини $\ln Z(\beta)$ за всіма $a^\mu_{s,i}$, яке ми позначимо $\langle \ldots \rangle_a$, отримаємо:

$$\mathcal{H} = \left\langle \min_\pi H(\pi) \right\rangle_a = -\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \langle \ln Z(\beta) \rangle_a . \tag{2.2}$$

III. УСЕРЕДНЕННЯ ЗА ҐАУССОВИМИ ЗМІННИМИ ДЛЯ $S = 2$

Гамільтоніан (1.3) розглянемо докладніше для $S = 2$. Змінні $\{\pi_{s,i}\}$ визначають імовірності, а тому задовольняють умову $\pi_{1,i} + \pi_{2,i} = 1$ для $\forall\, i$. Враховуючи цю умову, одну змінну можна виключити. Зокрема підставляючи $\pi_{2,i} = 1 - \pi_{1,i}$ та виконуючи також заміну змінних $\pi_{1,i} = \frac{1}{2}(1 - \pi_i)$. Після очевидних перетворень запишемо гамільтоніан у вигляді:

$$H = \hat{C}_0 + \sum_i \hat{d}_i \pi_i^2 + \sum_i \hat{h}_i \pi_i + 2\sum_{i<j} \hat{J}_{ij}\pi_i\pi_j + \sum_{i<j}\Big(\hat{k}_{ij}\pi_i + \hat{l}_{ij}\pi_j\Big), \tag{3.1}$$

де введені позначення:

$$\hat{C}_0 = \frac{1}{4P}\sum_\mu \Big(\sum_i a^\mu_{i+}\Big)^2, \qquad \hat{d}_i = \frac{1}{4P}\sum_\mu (a^\mu_{i-})^2, \qquad \hat{h}_i = \frac{1}{4P}\sum_\mu a^\mu_{i-}a^\mu_{i+},$$
$$\hat{J}_{ij} = \frac{1}{4P}\sum_\mu a^\mu_{i-}a^\mu_{j-}, \qquad \hat{k}_{ij} = \frac{1}{2P}\sum_\mu a^\mu_{i-}a^\mu_{j+}, \qquad \hat{l}_{ij} = \frac{1}{2P}\sum_\mu a^\mu_{i+}a^\mu_{j-}, \qquad a^\mu_{i\pm} = a^\mu_{1,i} \pm a^\mu_{2,i}\,. \tag{3.2}$$

Параметри гамільтоніана (3.1) — випадкові величини, які є сумою (за індексом μ) незалежних випадкових величин (3.2). Для великих значень $P \sim N$, згідно з граничними теоремами теорії ймовірностей [8], параметри (3.1) наближено розподіляються за нормальним (ґауссовим) законом. Тому при усередненні статсуми (2.2) за розподілами величин $a^\mu_{s,i}$ перейдімо до усереднення за ґауссовими розподілами параметрів гамільтоніана. Вказаний перехід докладніше описаний у додатку. В результаті отримуємо гамільтоніан (формула (A.3)) із ґауссовим розподілом параметрів (A.11):

$$H = \frac{1}{2}\sum_i \Big(\frac{d_i}{\sqrt{P}} + 1\Big)\pi_i^2 + \frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{i<j} J_{ij}\pi_i\pi_j + \frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{i<j}\Big(k_{ij}\pi_i + l_{ij}\pi_j\Big). \tag{3.3}$$

Формула для мінімуму шуканої величини (2.2) набере вигляду:

$$\mathcal{H} = \frac{N}{2} - \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \langle \ln \mathcal{Z}(\beta) \rangle_\Psi\,, \tag{3.4}$$

де

$$\mathcal{Z}(\beta) = \int \prod_i \frac{d\pi_i}{2} \exp(-\beta H),$$

усереднення в (3.4) здійснюємо з ґауссовим розподілом (A.11) та врахуємо також, що $\left\langle C_0 \right\rangle_a = N/2$. Формально задача пошуку мінімуму (1.2) звелася, згідно з формулами (3.3), (3.4), до дослідження основного стану невпорядкованої спінової системи (з неперервним спіном $\pi \in [-1, 1]$).

IV. УСЕРЕДНЕННЯ ЗА ҐАУССОВИМИ ЗМІННИМИ ДЛЯ ДОВІЛЬНОГО S

Подібно можна виконати перехід до ґауссових змінних для довільного S, наведемо лише основні співвідношення. Для $\forall S$ гамільтоніан (1.3) запишемо у вигляді:

$$H = H_0 + H_{\rm int}, \tag{4.1}$$

де позначено складники:

$$\begin{aligned} H_0 &= \sum_{i,s} \pi_{s,i}^2 + \sum_{i,s\neq s'} \hat{d}_i^{ss'} \pi_{s,i}\pi_{s',i}\,, \\ H_{\rm int} &= 2\sum_{\substack{i<j\\ s,s'}} \hat{J}_{ij}^{ss'} \pi_{s,i}\pi_{s',j}\,, \end{aligned} \tag{4.2}$$

а також:

$$\hat{d}_i^{ss'} = \frac{1}{P}\sum_{\mu} a_{s,i}^{\mu}\, a_{s',i}^{\mu} \quad \hat{J}_{ij}^{ss'} = \frac{1}{P}\sum_{\mu} a_{s,i}^{\mu} a_{s',j}^{\mu}\,. \tag{4.3}$$

Нагадаємо, що змінні $\pi_{s,i}$ в (4.2) не є незалежними, а пов'язані умовою $\sum_s \pi_{s,i} = 1$ для довільного i (див. розділ I). Оскільки виключити одну зі змінних $\pi_{s,i}$ (для деякого s), як у випадку двох станів (розділ II), простим способом не вдається, тому залишаємо всі змінні $\pi_{s,i}$.

Параметри гамільтоніана (4.3) є сумою однаково розподілених випадкових величин. Знайдімо середні значення та дисперсії доданків у сумах (4.3):

$$\begin{aligned} &\left\langle \hat{d}_i^{ss'(\mu)} \right\rangle = 0, \quad \left\langle (\hat{d}_i^{ss'(\mu)})^2 \right\rangle = \frac{1}{P^2} \\ &\left\langle \hat{J}_{ij}^{ss'(\mu)} \right\rangle = 0, \quad \left\langle (\hat{J}_{ij}^{ss'(\mu)})^2 \right\rangle = \frac{1}{P^2}\,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Увівши нормовані параметри, запишімо гамільтоніан (4.1) у вигляді:

$$H = H_0 + H_{\rm int}, \tag{4.5}$$

де відповідні складники:

$$\begin{aligned} H_0 &= \sum_{i,s} \pi_{s,i}^2 + \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{i,s\neq s'} \tilde{d}_i^{ss'} \pi_{s,i}\pi_{s',i}\,, \\ H_{\rm int} &= \frac{2}{\sqrt{P}} \sum_{\substack{i<j\\ s,s'}} \tilde{J}_{ij}^{ss'} \pi_{s,i}\pi_{s',j}\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

із нормовними величинами $\{\tilde{d}_i^{ss'}\}$, $\{\tilde{J}_{ij}^{ss'}\}$ зіставляємо випадкові змінні, розподілені за ґауссовим розподілом, виконуючи аналогічні обчислення, що наведені в додатку. Відтак для величини (2.2) отримаємо вираз:

$$\mathcal{H} = -\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha}\beta} \left\langle \ln \bar{Z}(\beta) \right\rangle_{\Psi}, \tag{4.7}$$

де

$$\begin{aligned} &\bar{Z}(\beta) = {\rm Sp}_{\pi} \exp(-\beta \bar{H}), \qquad \bar{H} = \bar{H}_0 + \bar{H}_{\rm int}, \\ &\bar{H}_0 = \sqrt{\alpha}\sum_{i,s} \pi_{s,i}^2 + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i,s\neq s'} d_i^{ss'} \pi_{s,i}\pi_{s',i} \\ &\bar{H}_{\rm int} = \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{i<j\\ s,s'}} J_{ij}^{ss'} \pi_{s,i}\pi_{s',j}\,, \\ &{\rm Sp}_{\pi}(\dots) = \int' D\pi(\dots), \quad D\pi = \prod_{s,i} d\pi_{s,i}. \end{aligned}$$

Усереднення в (4.7) здійснюємо за нормованим ґауссовим розподілом параметрів гамільтоніана $\{d_i^{ss'}\}$, $\{J_{ij}^{ss'}\}$, штрих біля інтеґрала вказує на виконання умови $\sum_s \pi_{s,i} = 1$ для довільного i.

V. МЕТОД РЕПЛІК ДЛЯ $S = 2$

Конкретні розрахунки наведемо для $S = 2$. При цьому усереднення логарифма статсуми в (3.4) виконуємо з використанням методу реплік:

$$\left\langle \ln \mathcal{Z}(\beta) \right\rangle_{\Psi} = \lim_{n\to 0} \frac{1}{n} \ln \left\langle \mathcal{Z}(\beta)^n \right\rangle_{\Psi}. \tag{5.1}$$

Отже, шуканий мінімум (2.2) запишемо так:

$$\mathcal{H} = \frac{N}{2} - \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \lim_{n\to 0} \frac{1}{n} \ln \left\langle \mathcal{Z}(\beta)^n \right\rangle_{\Psi}. \tag{5.2}$$

Статсуму системи n реплік визначаємо виразом:

$$\mathcal{Z}(\beta)^n = {\rm Sp}_{\pi} \exp(-\beta H^{(n)}), \tag{5.3}$$

де гамільтоніан системи n реплік має вигляд:

$$\begin{aligned} H^{(n)} &= \frac{1}{2}\sum_{i,a} \Big(\frac{d_i}{\sqrt{P}} + 1\Big) \pi_i^a + \sum_{i<j,a} \frac{J_{ij}}{\sqrt{P}} \pi_i^a \pi_j^a \\ &+ \frac{1}{\sqrt{P}} \Big(\sum_{i<j,a} k_{ij} \pi_i^a + \sum_{i<j,a} l_{ij} \pi_j^a \Big). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Індекс a в (5.4) нумерує репліки. У (5.3) використано позначення:

$$ {\rm Sp}_{\pi}(\dots) = \int_{-1}^{1} \prod_{i,a} \frac{d\pi_i^a}{2} (\dots). \tag{5.5}$$

Після усереднення статсуми n реплік в (5.2) за ґауссовим розподілом отримаємо:

$$\langle \mathcal{Z}(\beta)^n \rangle_{\Psi} = {\rm Sp}_{\pi} \exp\left(-\beta H_0^{(n)} - \beta H_{\rm int}^{(n)} \right), \tag{5.6}$$

де в (5.6) введені позначення:

$$H_0^{(n)} = \frac{1}{2}\sum_{i,a} \pi_i^{a\,2}, \tag{5.7}$$

$$H_{\rm int}^{(n)} = -\frac{\beta}{8P}\sum_i\Big(\sum_a \pi_i^{a\,2}\Big)^2 - \frac{\beta N}{2P}\sum_i\Big(\sum_a \pi_i^a\Big)^2 - \frac{\beta}{2P}\sum_{i<j}\Big(\sum_a \pi_i^a\pi_j^a\Big)^2.$$

Складник гамільтоніана $H_{\rm int}^{(n)}$ в (5.7) описує ефективну взаємодію між репліками. Першим доданком у (5.7) можна знехтувати, оскільки його внесок $\sim N^0$. Подальші обчислення стандартні та полягають у факторизації інтеґралів за змінними частинок. Увівши матрицю перекриття між реплічними системами $\hat{Q}_{ab} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_i \pi_i^a\pi_i^b$, складник гамільтоніана $H_{\rm int}^{(n)}$ в (5.7) можна записати у вигляді:

$$H_{\rm int}^{(n)} = -\frac{\beta N}{4P}\sum_{a,b}\hat{Q}_{ab}^2 - \frac{\beta N}{2P}\sqrt{N}\sum_{a,b}\hat{Q}_{ab}. \tag{5.8}$$

Далі, використовуючи підстановки $P = \alpha N$ та $\beta = \sqrt{\alpha}\beta$, запишемо мінімум шуканої величини так:

$$\mathcal{H} = \frac{N}{2} - \lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\alpha}\beta}\lim_{n\to 0}\frac{1}{n}\ln\bar{\mathcal{Z}}(\beta)^{(n)}, \tag{5.9}$$

де статсуму системи n реплік після вказаних перетворень обчислюємо виразом:

$$\bar{\mathcal{Z}}(\beta)^{(n)} = \mathrm{Sp}_\pi \exp\left(-\beta\bar{H}_0^{(n)} - \beta\bar{H}_{\rm int}^{(n)}\right), \tag{5.10}$$

у якому

$$\bar{H}_0^{(n)} = \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\sum_{i,a}\pi_i^{a\,2},$$

$$\bar{H}_{\rm int}^{(n)} = -\frac{\beta}{4}\sum_{a,b}\hat{Q}_{ab}^2 - \frac{\beta}{2}\sqrt{N}\sum_{a,b}\hat{Q}_{ab}. \tag{5.11}$$

Формула (5.11) визначає складники ефективного гамільтоніана після усереднення за ґауссовим розподілом. Як видно, залежність від параметра α міститься лише в доданку $\bar{H}_0^{(n)}$, який можна, за аналогією зі спіновими системами, трактувати як одновузлову анізотропію. Гамільтоніан справедливий при $\alpha \sim 1$, що належить області значень параметра α, яку розглядаємо в моделі minority game. Використовуючи інтеґральне перетворення, факторизуємо статсуму (5.10) за змінними частинок та запишемо інтеґральне представлення у просторі реплічних змінних:

$$\bar{\mathcal{Z}}(\beta)^{(n)} = L\int DQ\exp(N\Phi(Q)), \tag{5.12}$$

де позначено:

$$L = \Big(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\Big)^{n^2}, \quad DQ = \prod_{a,b}\frac{dQ_{ab}}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\Phi(Q) = -\frac{\beta^2}{4}\sum_{a,b}Q_{ab}^2 + \ln Z_1(Q),$$

$$Z_1(Q) = \int_{-1}^{1}\prod_a\frac{d\pi_a}{2}\exp(\Phi_1(Q)), \tag{5.13}$$

$$\Phi_1(Q) = -\beta\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\sum_a\pi_a^2 + \frac{\beta^2}{2}\sum_{a,b}Q_{ab}\pi_a\pi_b + \frac{\beta^2}{2}\Big(\sum_a\pi_a\Big)^2.$$

У границі $N\to\infty$ інтеґрали в (5.12) обчислюємо методом Лапласа та отримуємо:

$$\bar{\mathcal{Z}}(\beta)^{(n)} \simeq \exp(N\Phi_{\rm ext}(Q)). \tag{5.14}$$

Змінні Q в (5.14) визначаємо з рівнянь стаціонарності:

$$\frac{\partial\Phi(Q)}{\partial Q_{ab}} = 0 \to Q_{ab} = \big\langle\pi_a\pi_b\big\rangle_\pi. \tag{5.15}$$

У (5.15) позначено:

$$\big\langle\dots\big\rangle_\pi = \frac{1}{Z_1(Q)}\int_{-1}^{1}\prod_a\frac{d\pi_a}{2}\exp\big(\Phi_1(Q)\big)\big(\dots\big). \tag{5.16}$$

Множник L дає нульовий внесок у границі $n\to 0$, і ми його опускаємо.

VI. НАБЛИЖЕННЯ СИМЕТРИЧНИХ РЕПЛІК

Зазвичай розв'язок задачі в методі реплік починають з наближення симетричних реплік. Це відповідає виборові матриці перекриття у вигляді:

$$Q_{ab} = (Q-q)\delta_{ab} + q. \tag{6.1}$$

Підставляючи (6.1) у вираз для $\Phi_1(Q)$ (5.13) та враховуючи основні внески при $n\to 0$, отримаємо:

$$\Phi_1(Q)^S = -\beta\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\sum_a\pi_a^2 + \frac{\beta^2}{4}(Q-q)\sum_a\pi_a^2 + \frac{\beta^2(1+q)}{2}\Big(\sum_a\pi_a\Big)^2. \tag{6.2}$$

Це дає змогу факторизувати інтеґрали за реплічними змінними при обчисленні $Z_1(Q)$ (5.13), зокрема:

$$Z_1^S(Q) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{2\pi}}\exp\big(-z^2/2\big)I(z)^n, \tag{6.3}$$

де

$$I(z) = \int_{-1}^{1}\frac{d\pi}{2} \times \exp\Big(-\beta\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\pi^2 + \frac{\beta^2}{2}(Q-q)\pi^2 + \beta\sqrt{1+q}\,\pi z\Big). \tag{6.4}$$

У результаті для шуканої величини (5.2) в наближенні симетричних реплік одержимо:

$$\mathcal{H}/N = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{\beta(Q^2-q^2)}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}\beta}\big\langle \ln\big(I(z)\big)\big\rangle_z, \qquad (6.5)$$

де позначено:

$$\langle \dots \rangle_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-z^2/2\right)(\dots).$$

Система рівнянь для точки екстремуму набере вигляду:

$$Q = \big\langle \langle \pi^2 \rangle_\pi \big\rangle_z, \quad q = \big\langle \langle \pi \rangle_\pi^2 \big\rangle_z, \qquad (6.6)$$

де введено позначення:

$$\langle \dots \rangle_\pi = \frac{1}{I(z)} \int_{-1}^{1} \frac{d\pi}{2} \times \exp\Big(-\beta\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\pi^2 + \frac{\beta^2}{2}(Q-q)\pi^2 + \beta\sqrt{1+q}\pi z\Big)(\dots).$$

Систему рівнянь (6.6) можна також записати так:

$$\beta(Q-q) = \frac{1}{\sqrt{1+q}}\big\langle z\langle\pi\rangle_\pi\big\rangle_z, \quad q = \big\langle\langle\pi\rangle_\pi^2\big\rangle_z. \qquad (6.7)$$

VII. РОЗВ'ЯЗОК ПРИ $\beta \to \infty$

Із першого рівняння (6.7) видно, що існують розв'язки, за яких величина $\beta(Q-q)$ скінченна при $\beta \to \infty$. Тому покладімо, що в границі $\beta \to \infty$: $Q = q = q_0$ та $\beta(Q-q) = \chi_0$. Усі наступні обчислення пов'язані з асимптотикою інтеґрала (6.4) при $\beta \to \infty$, який матиме вигляд:

$$I(z) = \int_{-1}^{1}\frac{d\pi}{2} \times \exp\beta\Big(-\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\chi_0\pi^2 + \sqrt{1+q_0}\pi z\Big). \qquad (7.1)$$

Як видно із (7.1), асимптотика суттєво залежить від співвідношення між величинами α та χ_0.

Неважко показати, що невід'ємні значення $\mathcal{H}$ отримуємо лише у випадку $\sqrt{\alpha} > \chi_0$. Тому, виконуючи в (7.1) підстановку $\chi_0 = \sqrt{\alpha}(1-\tau)$ $(0 < \tau < 1)$ та масштабні перетворення $\beta \to \beta/\sqrt{\alpha}$ та $z \to \sqrt{\alpha}z$, отримаємо:

$$I(z) = \int_{-1}^{1}\frac{d\pi}{2}\exp\beta\Big(-\frac{\tau}{2}\pi^2 + \sqrt{1+q_0}\pi z\Big). \qquad (7.2)$$

Формула для шуканого мінімуму перейде в таку:

$$\mathcal{H}/N = \frac{1}{2} + \frac{1-\tau}{2}q_0 - \frac{1}{\beta}\langle \ln I(z)\rangle_z. \qquad (7.3)$$

Невідомі параметри τ та q_0 визначаємо з системи рівнянь:

$$1-\tau = \frac{1}{\sqrt{1+q_0}}\big\langle z\langle\pi\rangle_\pi\big\rangle_z, \quad q_0 = \big\langle\langle\pi\rangle_\pi^2\big\rangle_z. \qquad (7.4)$$

У формулах (7.3) та (7.4) використано позначення:

$$\langle \dots \rangle_z = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\alpha}dz}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\alpha z^2/2\right)(\dots).$$

Інтеґрал (7.2) в границі $\beta \to \infty$ обчислюємо методом Лапласа, та основний внесок виникає від точки максимуму функції:

$$\varphi(\pi) = -\frac{\tau}{2}\pi^2 + \sqrt{1+q_0}\pi z.$$

Положення точки максимуму $\pi_{\max} \in [-1, 1]$ залежить від значення z, зокрема:

$$\pi_{\max}(z) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } z < -z_0; \\ \pi_0, & \text{якщо } -z_0 < z < z_0; \\ 1, & \text{якщо } z > z_0, \end{cases} \qquad (7.5)$$

де в (7.5) введені позначення:

$$\pi_0 = \frac{\sqrt{1+q_0}\,z}{\tau}, \quad z_0 = \frac{\tau}{\sqrt{1+q_0}}.$$

У результаті для (7.3) отримаємо вираз:

$$\mathcal{H}/N = \frac{1}{2} + \frac{1-\tau}{2}q_0 - \big\langle\varphi(\pi_{\max}(z))\big\rangle_z \qquad (7.6)$$

та систему рівнянь параметрів q_0, τ :

$$1-\tau = \frac{1}{\sqrt{1+q_0}}\big\langle z\pi_{\max}(z)\big\rangle_z, \quad q_0 = \big\langle\pi_{\max}(z)^2\big\rangle_z. \quad (7.7)$$

Інтеґрали за z у формулах (7.6), (7.7) обчислюємо аналітично. Вони виражаються через функцію похибок $\mathrm{erf}(x) = 2/\sqrt{\pi}\int_0^x dt\exp(-t^2/2)$. Відповідні вирази дещо громіздкі, тому ми їх не наводимо. Для (7.6), після нескладних алґебраїчних перетворень, отримуємо вираз:

$$\mathcal{H}/N = (1+q_0)(\tau - 1/2) = (1+q_0)\Big(1/2 - \frac{\chi_0}{\sqrt{\alpha}}\Big). \quad (7.8)$$

Із формули (7.8) випливає, що $\mathcal{H}$ перетворюється в нуль, якщо $\chi_{0c} = 1/2\sqrt{\alpha_c}$. Розв'язуючи чисельно систему рівнянь (7.7) та підставляючи розв'язки в (7.6), одержуємо, що $\alpha_c \simeq 1.3$. На рис. 1 наведено залежності мінімуму (7.8) від параметра α, знайдені в цій статті та на основі праці [5]. Із порівняння видно також, що крива визначена в цій роботі, лежить нижче, тобто отримано менше значення мінімуму (2.1). Чисельно можна показати також, що сприйнятливість $\chi_{0c}(\alpha)$ як функція α в точці α_c досягає максимуму.

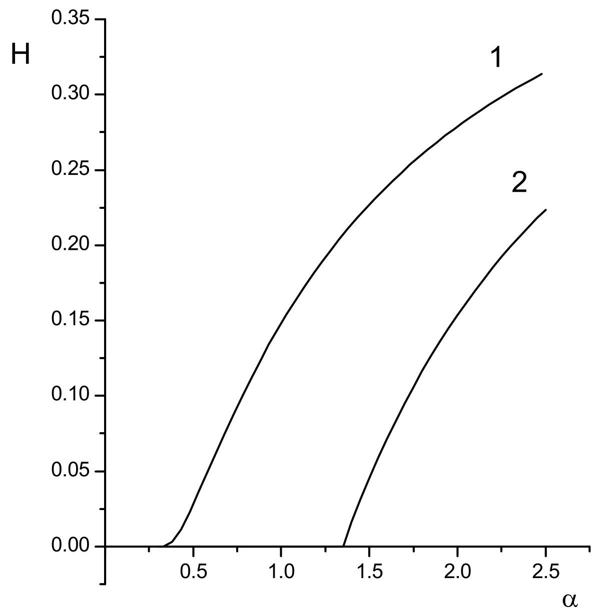

Рис. 1. Порівняння значень величини H отриманих різними методами; 1 — за формулами роботи [5], 2 — результат цієї праці.

VIII. СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ

Як відомо [9], наближення симетричних реплік дає незадовільні результати в області низьких температур. Причиною цього [9] є те, що деякі власні значення матриці других похідних (гессіана) для симетричних реплік у низькотемпературній області перетворюються в нуль. Вихід із ситуації полягає в побудові розв'язків із порушенням реплічної симетрії [10, 11].

Отже, для дослідження стійкості репліко-симетричних розв'язків виконаймо перевірку додатної визначеності квадратичної форми $-\delta^2\Phi(Q)$ (5.13) змінних $\delta\hat{Q}_{ab}$ в околі репліко-метричного розв'язку. Розгляньмо матрицю Гессе для цієї квадратичної форми:

$$\hat{H}_{ab,cd} = -\delta^2\Phi(Q)/\delta\hat{Q}_{ab}\delta\hat{Q}_{cd}\,.$$

Порядок матриці Гессе — n^2, і для зручності представимо її у вигляді субматриці, що складається з квадратних матриць n-го порядку. Для цього введемо вектор $\boldsymbol{\lambda}_i = (Q_{i1}\ldots Q_{in})$ для $i = 1\ldots n$. Тоді матрицю Гессе можна записати так:

$$\hat{H} = \|A_{ij}\|, \quad i = 1\ldots n,\, j = 1\ldots n, \tag{8.1}$$

де A_{ij} — матриці визначаються формулами:

$$A_{ij} = -\delta^2\Phi(Q)/\delta\boldsymbol{\lambda}_i\delta\boldsymbol{\lambda}_j\,.$$

Для елементів матриць A_{ij} на основі формул (5.13) отримаємо:

$$\begin{aligned}(A_{ij})_{\alpha\beta} &= \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} \\ &- \frac{\beta^2}{2}\left[\left\langle\pi_i\pi_\alpha\pi_j\pi_\beta\right\rangle_\pi - \left\langle\pi_i\pi_\alpha\right\rangle_\pi\left\langle\pi_j\pi_\beta\right\rangle_\pi\right].\end{aligned} \tag{8.2}$$

Усереднення в (8.2) здійснюємо згідно з (5.16), а також при обчисленні (8.2) опускаємо несуттєвий множник $\beta^2/2$. Враховуючи систему рівнянь для точки екстемуму (5.15), елементи матриць (8.2) можна записати також у вигляді:

$$(A_{ij})_{\alpha\beta} = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} - \frac{\beta^2}{2}\left[\left\langle\pi_i\pi_\alpha\pi_j\pi_\beta\right\rangle_\pi - Q_{i\alpha}Q_{j\beta}\right]. \tag{8.3}$$

Розгляньмо докладніше елементи матриці $a_{\alpha\beta} = (A_{11})_{\alpha\beta}$. Для симетричних реплік отримаємо:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 1 - \frac{\beta^2}{2}\left[\left\langle\left\langle\pi^4\right\rangle_\pi\right\rangle_z - Q^2\right], \\
a_{\alpha\alpha} &= 1 - \frac{\beta^2}{2}\left[\left\langle\left\langle\pi^2\right\rangle_\pi^2\right\rangle_z - q^2\right] \quad \text{для} \quad \alpha \neq 1, \\
a_{1\alpha} &= -\frac{\beta^2}{2}\left[\left\langle\left\langle\pi^3\right\rangle_\pi\left\langle\pi\right\rangle_\pi\right\rangle_z - Qq\right] \quad \text{для} \quad \alpha \neq 1, \\
a_{\alpha\beta} &= -\frac{\beta^2}{2}\left[\left\langle\left\langle\pi^2\right\rangle_\pi\left\langle\pi\right\rangle_\pi^2\right\rangle_z - q^2\right] \quad \text{для} \quad \alpha \neq \beta \neq 1.
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Зміст усереднень у (8.4) визначений формулами (6.5) та (6.6). Проілюструймо порушення додатної визначеності матриці Гессе при $\beta \to \infty$. Для цього скористаємося критерієм додатної визначеності матриць [12], згідно з яким усі головні мінори матриці Гессе (8.1) повинні бути додатними. Оскільки матриця A_{11} міститься у верхньому лівому куті субматриці $\hat{H}$, то відповідно матриця A_{11} також повинна бути додатно визначеною. Із формул (8.4) випливає, що при $\beta \to \infty$:

$$\left\langle\left\langle\pi^4\right\rangle_\pi\right\rangle_z - Q^2 \to \left\langle\pi_{\max}(z)^4\right\rangle_z - q_0^2. \tag{8.5}$$

Ураховуючи рівняння для q_0, вираз (8.5) можна записати у вигляді:

$$\left\langle\left(\pi_{\max}(z)^2 - \left\langle\pi_{\max}(z)^2\right\rangle_z\right)^2\right\rangle_z > 0. \tag{8.6}$$

Із додатності (8.6) випливає, що при $\beta \to \infty$ величина стає $a_{11} < 0$ та матриця Гессе перестає бути додатно визначеною. Як уже вказувалось вище, у цьому випадку необхідний розрахунок із порушенням реплічної симетрії.

ВИСНОВКИ

У цій статті запропоновано підхід до задачі мінімізації в моделі minority game, що дозволяє отримати асимтотично точний розв'язок. На основі ідей центральних теорем теорії ймовірностей здійснено перехід від усереднення за дискретними змінними до усереднення за неперервними ґауссовими змінними. При цьому оптимізаційна задача набуває форми пошуку основного стану системи невпорядкованої спінової системи (3.3), гамільтоніан якої містить параметри, розподілені за нормованим ґауссовим розподілом.

Конкретні розрахунки проведені для $S = 2$ в наближенні симетричних реплік та визначена залежність величини (1.4) від параметра α. Знайдене значення мінімуму виявляє розбіжності з відомими літературними даними. Зокрема $\mathcal{H}$ перетворюється в нуль при $\alpha \simeq 1.3$ та набуває менших, ніж в [5], значень в області $\alpha > 1.3$. Причиною розбіжностей, на нашу думку, є неправомірність розгляду величини β/N як малого параметра при $\beta \to \infty$, що використовувалося в цитованих роботах. Безперечно, це питання потребує подальших досліджень. Зокрема слід урахувати порушення реплічної симетрії, а також розглянути можливі поправки до ґауссових розподілів параметрів гамільтоніана. Ці задачі будуть предметом окремої роботи.

ДОДАТОК

Використовуючи стандартну методику [8], знайдімо середні значення та дисперсії випадкових величин — параметрів гамільтоніана (3.2). Із (3.2) також легко бачити, що $\hat{h}_i \equiv 0$ для $\forall\, i$. Для решти параметрів отримаємо:

$$d_0 = \left\langle d_i^\mu \right\rangle_a = \frac{1}{2P}, \quad \sigma_d^2 = \left\langle d_i^{\mu\,2} \right\rangle_a - d_0^2 = \frac{1}{4P^2},$$
$$J_0 = \left\langle J_{ij}^\mu \right\rangle_a = 0, \quad \sigma_J^2 = \left\langle J_{ij}^{\mu\,2} \right\rangle_a = \frac{1}{4P^2}, \tag{A.1}$$
$$\left\langle k_{ij}^\mu \right\rangle_a = \left\langle l_{ij}^\mu \right\rangle_a = 0, \quad \sigma_k^2 = \left\langle (k_{ij}^\mu)^2 \right\rangle_a = \left\langle (l_{ij}^\mu)^2 \right\rangle_a = \frac{1}{P^2},$$

де індекс μ в (A.1) позначає доданки відповідних величин у сумах (3.2). На основі (A.1) перейдімо до нормованих величини, для яких середні та дисперсії дорівнюють відповідно 0 та 1, позначатимемо їх відповідними буквами зі знаком $\sim$:

$$\hat{d}_i = \frac{1}{2}\Big(\frac{\tilde{d}_i}{\sqrt{P}} + 1\Big), \quad \hat{J}_{ij} = \frac{\tilde{J}_{ij}}{2\sqrt{P}},$$
$$\hat{k}_{ij} = \frac{\tilde{k}_{ij}}{\sqrt{P}}, \quad \hat{k}_{ij} = \frac{\tilde{l}_{ij}}{\sqrt{P}}\,. \tag{A.2}$$

Гамільтоніан (1.3) (стала $C_0 = N/2$), записаний у нормованих параметрах, набере вигляду:

$$H = \frac{1}{2}\sum_i \Big(\frac{\tilde{d}_i}{\sqrt{P}} + 1\Big)\pi_i^2 + \frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{i<j}\tilde{J}_{ij}\pi_i\pi_j$$
$$\times + \frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{i<j}\Big(\tilde{k}_{ij}\pi_i + \tilde{l}_{ij}\pi_j\Big). \tag{A.3}$$

Параметри гамільтоніана (A.3) є функціями змінних $a_{s,i}^\mu$. Перехід від усереднення за змінними $a_{s,i}^\mu$ до усереднення за введеними параметрами гамільтоніана здійснюємо за допомогою δ-функцій Дірака за формулою:

$$\left\langle \Phi(\tilde{d}, \tilde{J}, \tilde{k}, \tilde{l}) \right\rangle_a = \int DdDJDkDl\Psi(d,J,k,l)\Phi(d,J,k,l), \tag{A.4}$$

де $\Psi(d,J,k,l) = \left\langle \delta(d-\tilde{d})\delta(J-\tilde{J})\delta(k-\tilde{k})\delta(l-\tilde{l}) \right\rangle_a$ має зміст густини ймовірності розподілу змінних $\{d_i\}$, $\{J_{ij}\}$, $\{k_{ij}\}$, $\{l_{ij}\}$. Тут уведені також позначення:

$$Dd = \prod_i dd_i, \quad DJ = \prod_{i<j} dJ_{ij}, \quad Dk = \prod_{i<j} dk_{ij}, \quad Dl = \prod_{i<j} dl_{ij}, \tag{A.5}$$
$$\delta(d-\tilde{d})\delta(J-\tilde{J})\delta(k-\tilde{k})\delta(l-\tilde{l}) = \prod_i \delta(d_i - \tilde{d}_i)\prod_{i<j}\delta(J_{ij}-\tilde{J}_{ij})\delta(k_{ij}-\tilde{k}_{ij})\delta(l_{ij}-\tilde{l}_{ij}).$$

Для наближеного обчислення $\Psi(d,J,k,l)$ стандартно [8] визначаємо характеристичну функцію:

$$\varphi(y,z,v,t) = \int DdDJDkDl\Psi(d,J,k,l)\exp(i\mathbf{yd} + i\mathbf{zJ} + \mathbf{vk} + i\mathbf{lt}) = \left\langle \exp(i\mathbf{y\tilde{d}} + i\mathbf{z\tilde{J}} + i\mathbf{v\tilde{k}} + i\mathbf{t\tilde{l}}) \right\rangle_a, \tag{A.6}$$

де позначено:

$$\mathbf{yd} = \sum_i y_i d_i, \quad \mathbf{zJ} = \sum_{i<j} z_{ij}J_{ij},$$
$$\mathbf{vk} = \sum_{i<j} v_{ij}k_{ij}, \quad \mathbf{tl} = \sum_{i<j} t_{ij}l_{ij}. \tag{A.7}$$

В експоненті (A.6) зміст позначень задаємо формулами (A.7), лише, замість величин $\{d_i\}$, $\{J_{ij}\}$, $\{k_{ij}\}$, $\{l_{ij}\}$, потрібно підставити вирази (A.2). Характеристична функція (A.6) факторизується за індексом μ. У результаті отримаємо:

$$\varphi(y,z,v,t) = \left\langle \exp(i\mathbf{y\tilde{d}_1} + i\mathbf{z\tilde{J}_1} + i\mathbf{v\tilde{k}_1} + i\mathbf{t\tilde{l}_1}) \right\rangle_{a_1}^P. \tag{A.8}$$

Індекс 1 в (A.8) вказує, що береться один доданок із суми за μ у відповідних виразах, які визначають $\tilde{d}$, $\tilde{J}$, $\tilde{k}$, $\tilde{l}$. У границі великих P в прийнятій методиці [8] експоненту в (A.8) розкладаємо в ряд та враховуємо головні члени розкладу за $1/P$ (інакше враховуються члени до другого порядку включно за змінними y, z, v, t). При цьому для виниклих середніх відмінними від нуля є такі:

$$\left\langle \tilde{d}_i \tilde{d}_j \right\rangle_{a_1} = \frac{\delta_{ij}}{P}, \quad \left\langle \tilde{J}_{ij} \tilde{J}_{kl} \right\rangle_{a_1} = \frac{\delta_{ik}\delta_{jl}}{P},$$
$$\left\langle \tilde{k}_{ij} \tilde{k}_{kl} \right\rangle_{a_1} = \frac{\delta_{ik}\delta_{jl}}{P}, \quad \left\langle \tilde{l}_{ij} \tilde{l}_{kl} \right\rangle_{a_1} = \frac{\delta_{ik}\delta_{jl}}{P}. \qquad \text{(A.9)}$$

Це дає змогу записати характеристичну функцію (A.8) в границі $P \to \infty$ у вигляді:

$$\varphi(y,z,v,t) \approx \exp\Big(-\frac{1}{2}\big(\mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 + \mathbf{v}^2 + \mathbf{t}^2\big)\Big). \qquad \text{(A.10)}$$

Зміст позначень у (A.10) відповідає (A.7). Виконуючи Фур'є-перетворення характеристичної функції (A.10), отримаємо асимптотику функції розподілу параметрів гамільтоніана $\Psi(d,J,k,l)$.

$$\Psi(d,J,k,l) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{1}{2}d_i^2\Big) \prod_{i<j} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$
$$\times \exp\Big(-\frac{1}{2}J_{ij}^2 - \frac{1}{2}k_{ij}^2 - \frac{1}{2}l_{ij}^2\Big). \qquad \text{(A.11)}$$

[1] D. Challet, Y. C. Zhang, Physica A **246**, 407 (1997).
[2] D. Challet, Y. C. Zhang, Physica A **256**, 514 (1998).
[3] R. Savit, R. Manuca, R. Riolo, Phys. Rev. Lett. **82**, 2203 (1999).
[4] D. Challet, M. Marsili, R. Zecchina, Phys. Rev. Lett. **84**, 1824 (2000); preprint cond-mat/9904392 (1999).
[5] D. Challet, M. Marsili, R. Zecchina, Physica A **280**, 522 (2000); preprint cond-mat/9901243 (1999).
[6] A. de Martino, M. Marsili, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 2525 (2001); preprint cond-mat/0007397 (2000).
[7] Р. Фейнман, *Статистическая механика* (Мир, Москва, 1975).
[8] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1,2* (Наука, Москва, 1964).
[9] J. R. L. de Almeida, D. J. Thouless, J. Phys. A **11**, 983 (1978).
[10] D. J. Thouless, J. R. L. de Almeida, J. M. Kosterlitz, J. Phys. C **13**, 3271 (1980).
[11] T. Temesv'ari, C. De Dominicis, I. Kondor, J. Phys. A: Math. Gen. **27**, 7569 (1994); preprint cond-mat/9409050 (1994).
[12] П. Ланкастер, *Теория матриц* (Наука, Москва, 1978).

THE GAUSSIAN APPROXIMATION IN THE MINORITY GAME MODEL

V. Yanishevsky

Ivan Franko State Pedagogical University of Drohobych
24 Ivan Franko St., Drohobych, UA–82100, Ukraine

The paper focuses on the outcomes of a study of the optimization process in the minority game model in the Gaussian approximation. The given approximation consists in the fact that the averaging over the discrete variables in the replica method a transition is made into an averaging over continuous variables with a normal (Gaussian) distribution. The calculations in the symmetric replicas approximation is being compared with other approaches available in the literature.