

РІВНЯННЯ БРАХІСТОХРОНИ В МЕТРИЦІ ШВАРЦШІЛЬДА

А. Р. Кузьмак

*Кафедра теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка
вул. Драгоманова 12, Львів, 79005, Україна*

(Отримано 4 березня 2011 р.; в остаточному вигляді — 17 червня 2011 р.)

Рівняння брахістохрони в неоднорідному ньютонівському гравітаційному полі вперше отримали Б. Сінгх і Р. Кумар (з англ. B. Singh and R. Kumar) у 1988 році. Ми розрахували брахістохрону в метриці Шварцшільда, використовуючи закони загальної теорії відносності. У цій статті ми отримали рівняння брахістохрони щодо спостерігачів, які є вздовж таякторії, і рівняння стосовно далекого спостерігача, а також рівняння для часу руху вздовж кривої. Також, ми одержали рівняння в релятивістському випадку для однорідного гравітаційного поля. Зроблено порівняння розрахованих результатів із результатами задачі брахістохрони в ньютонівському полі.

Ключові слова: брахістохрона, час, гравітаційне поле.

PACS number(s): 04.20.Fy, 04.70.Bw, 95.30.Sf

I. ВСТУП

Задачу про брахістохрону (з грецької: найкоротший час) уперше сформулював Й. Бернуллі в червні 1696 року. Її було викладено в “Acta Eruditorum” [1]. Постановка задачі звучала так:

“Задано дві точки A і B на вертикальній площині. Яка повинна бути форма траєкторії, щоб частинка під дією гравітації перемістилася з точки A в точку B за найкоротший час?”

У травні 1697 року в “Acta Eruditorum” було поміщено розв’язок братів Бернуллі, а також короткий опис Ляйбніца, який отримав подібний результат. Незалежно від інших розв’язок отримали Ньютон і Лопіталь. Робота Лопіталю не була опублікована аж до 1988 року, Джин Пейффер презентував її як додаток. Метод, який використав Й. Бернуллі, є унікальним і ґрунтується на принципі Ферма. Всі ці результати отримані для однорідного гравітаційного поля, а крива відома з курсу шкільної геометрії (циклоїда).

Задачу про брахістохрону в неоднорідному слабкому гравітаційному полі опублікували в 1988 році [2]. У цій роботі рівняння кривої й часу, який необхідний для переміщення по цій кривій з однієї точки в іншу під дією гравітації, викладені в диференціальній формі. Для різних положень початкової й кінцевої точок чисельним методом отримані криві. Інший цікавий випадок цієї задачі є в статті [3]. Тут рівняння брахістохрони розраховане для руху частинки тунелем, який гіпотетично може проходити через Землю чи будь-яке інше сферично-симетричне тіло (в ньютонівському випадку). Тут рівняння такого тунелю й часу руху по ньому одержано в аналітичному вигляді. На Землі переміщення таким тунелем зі Львова до Києва зайняло б близько 9.5 хвилин, а у граничному випадку спуск з однієї точки земної кулі в протилежну через центр прямим тунелем — близько 42-х хвилин. Така дорога між Львовом і Києвом мала б найнижчу точку на глибині близько 160-и кілометрів. Оскільки, на глибині 6–10 кілометрів земної кулі починається гаряча мантія, то такий тунель у найближ-

чому майбутньому ймовірніше залишиться науковою фантастикою.

Задачу брахістохрони з незафіксованою кінцевою точкою викладено в роботі [4]. Рівняння релятивістської брахістохрони в однорідному електричному полі розглянули Г. Голдстейн і К. Бенднер в 1985 році [5].

Наша задача відрізняється від попередніх тим, що ми її розв’язали, використовуючи закони загальної теорії відносності. Завдання полягає в тому, щоб отримати рівняння брахістохрони у сферично-симетричному гравітаційному полі. У розділі II, використовуючи інтервал Шварцшільда і закон збереження енергії для стаціонарного поля, отримуємо рівняння брахістохрони в диференціальній формі. У розділі III буде показано, як ми проінтегрували це рівняння. Використовуючи результати з розділу II, у розділі IV ми отримуємо рівняння часу для руху по кривій у метриці Шварцшільда. Подібно до ньютонівського випадку ми розв’яжемо задачу для однорідного гравітаційного поля (розділ V). Також подібно одержимо рівняння брахістохрони та рівняння для часу стосовно далекого спостерігача, які ми помістимо в розділ VI. У розділі VII ми подамо результати нашої роботи.

II. РІВНЯННЯ БРАХІСТОХРОНИ

Запишімо квадрат інтервалу сферично-симетричного гравітаційного поля (квадрат інтервалу Шварцшільда):

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 (dt)^2 - \frac{(dr)^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 [(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2], \quad (1)$$

де c — швидкість світла; $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ — гравітаційний радіус, тут G — гравітаційна стала, M — маса чорної діри. Далі задачу будемо розв’язувати для $\theta = \frac{\pi}{2}$ (в площині), і квадрат інтервалу можна записати так:

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 (dt)^2 - \frac{(dr)^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 (d\phi)^2. \quad (2)$$

При русі частинки в сталому гравітаційному полі зберігається її енергія, яка є часовою коваріантною компонентою чотири-вектора імпульсу:

$$\epsilon = \frac{mc^2 \sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3)$$

m — маса частинки; g_{00} — “00” компонента метричного тензора; $v = \frac{dl}{\sqrt{g_{00}}dt}$ — швидкість частинки, яку виміряв нерухомий спостерігач у даній точці траєкторії.

Нехай у початковий момент часу частинка перебуває в точці з координатами $(r_s, 0)$ і з швидкістю $v = 0$. Тоді її енергію можна записати так:

$$\epsilon = mc^2 \sqrt{g_{00}(r_s)}, \quad (4)$$

де $g_{00}(r_s)$ — “00” компонента метричного тензора на відстані r_s від гравітаційного центра. У будь-якій іншій точці (див. рис. 1) енергія частинки описується рівнянням (3). Відніmemo рівняння (3) від рівняння (4) і звідси знайдемо швидкість:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{g_{00}}{g_{00}(r_s)}}. \quad (5)$$

З іншого боку, $v = \frac{dl}{d\tau}$, а $(dl)^2 = \frac{(dr)^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2(d\phi)^2$ — просторова компонента квадрата інтервалу; $\tau = \sqrt{g_{00}}t$ — час, який фіксує нерухомий спостерігач. Звідси:

$$d\tau = \frac{\sqrt{r^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2}}{c \sqrt{1 - \frac{g_{00}}{g_{00}(r_s)}}} d\phi \equiv L(r) d\phi. \quad (6)$$

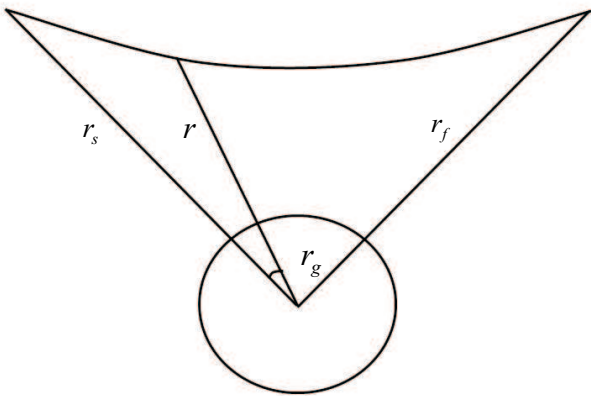


Рис. 1. У початковий момент часу частинка перебуває на відстані r_s від центра сферично-симетричного гравітаційного поля, у будь-який інший момент часу частинка ковзає по брахістохроні й має координати (r, ϕ) .

Тому що $L(r)$ явно не залежить від ϕ , то τ можна інтерпретувати як дію, а L — як лагранжян і скласти аналог гамільтоніана ($E = pr' - L$):

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{g_{00}}{g_{00}(r_s)}}} \frac{\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2}} - \sqrt{\frac{r^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2}{1 - \frac{g_{00}}{g_{00}(r_s)}}}. \quad (7)$$

Підставимо в явному вигляді компоненти метричного тензора g_{00} і $g_{00}(r_s)$, і після деяких спрощень отримаємо наступне рівняння, яке є диференціальним рівнянням брахістохрони:

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm r \sqrt{\left(\frac{r^2}{E^2 \left(1 - \frac{g_{00}}{g_{00}(r_s)}\right)} - 1\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}, \quad (8)$$

де E — стала величина.

Увівши такі безрозмірні величини $R \equiv \frac{r}{r_g}$ і $R_s \equiv \frac{r_s}{r_g}$, позначення $C \equiv \frac{r_g^2}{E^2} \equiv \text{const}$, ми отримаємо остаточно таке рівняння для брахістохрони:

$$\frac{dR}{d\phi} = \pm R \sqrt{\frac{C(R_s - 1)R^3 + R - R_s}{R_s - R}} \sqrt{\frac{R - 1}{R}}. \quad (9)$$

Це рівняння при великих R прямує до рівняння брахістохрони в ньютонівській механіці (див. [2]):

$$\frac{dR}{d\phi} = \pm R \sqrt{\frac{CR_s R^3 + R - R_s}{R_s - R}}. \quad (10)$$

На завершення цього розділу перепишемо C через R_c , що шукається з умови $\left(\frac{dR}{d\phi}\right)_{R_c} = 0$:

$$C = \frac{R_s - R_c}{(R_s - 1)R_c^3}, \quad 1 < R_c < R_s. \quad (11)$$

R_c не може дорівнювати одиниці, тому що з фізичних міркувань частинка не може вибратися з гравітаційного радіуса (r_g).

III. РОЗРАХУНОК БРАХІСТОХРОНИ

Форму кривої будемо шукати так: задамо початкову точку R_s і точку R_c . Оскільки рівняння (9) є симетричним щодо точки R_c , то будемо мати:

$$\phi(R) = \int_{R_c}^R \frac{1}{R} \sqrt{\frac{R_s - R}{C(R_s - 1)R^3 + R - R_s}} \times \sqrt{\frac{R}{R - 1}} dR. \quad (12)$$

У точці R_c підінтегральна функція має сингулярність. Тому перепишемо наш вираз так:

$$\begin{aligned} \phi(R) &= \int_{R_c}^{R_c+\delta} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{R_s - R}{C(R_s - 1)R^3 + R - R_s}} \\ &\times \sqrt{\frac{R}{R - 1}} dR = I_1, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \phi(R) &= \int_{R_c+\eta}^R \frac{1}{R} \sqrt{\frac{R_s - R}{C(R_s - 1)R^3 + R - R_s}} \\ &\times \sqrt{\frac{R}{R - 1}} dR = I_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Тут $R_c \leq R \leq R_s$, а $0 \leq \delta \leq \eta$. Перший інтеграл описує рівняння брахістохрони в околі сингулярності.

Для інтеграла I_1 зробимо заміну змінних ($R = R_c + \delta$) і, враховуючи, що $\delta \ll R$, після простих арифметичних перетворень отримуємо:

$$\begin{aligned} I_1 &\approx \frac{\sqrt{R_s - R_c}}{\sqrt{\left(3\frac{R_s}{R_c} - 2\right)(R_c^2 - R_c)}} \int_0^\delta \frac{1}{\sqrt{\delta}} d\delta \\ &= \frac{\sqrt{R_s - R_c}}{\sqrt{\left(3\frac{R_s}{R_c} - 2\right)(R_c^2 - R_c)}} 2\sqrt{\delta}, \end{aligned} \quad (15)$$

Інтеграл I_2 рахуємо чисельним методом.

Межу η будемо шукати так. Інтеграл від R_c до R_s :

$$\begin{aligned} \alpha/2 &= \int_{R_c}^{R_c+\eta} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{R_s - R}{C(R_s - 1)R^3 + R - R_s}} \sqrt{\frac{R}{R - 1}} dR \\ &+ \int_{R_c+\eta}^{R_s} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{R_s - R}{C(R_s - 1)R^3 + R - R_s}} \sqrt{\frac{R}{R - 1}} dR = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (16)$$

де α — кут, під яким брахістохрону видно з початку координат. Тепер η будемо змінювати і дивитися, як при цьому міняється результат. Область значень η , для якої результат (значення α) не залежить від η , можна використовувати для обчислення інтеграла.

Криві для початкової й кінцевої точок, які перебувають на відстані трьох гравітаційних радіусів ($R_s = R_f = 3$) для різних значень полярного кута між напрямком на початкову і кінцеву точку (α), зображені на рис. 2 (з лівого боку).

IV. РІВНЯННЯ ДЛЯ ЧАСУ

Отримаємо час руху частинки по брахістохроні. У рівняння (6) підставимо рівняння (9), враховуючи, що $R = \frac{r}{r_g}$, $R_s = \frac{r_s}{r_g}$, і поставимо $T = \tau \frac{c}{r_g}$:

$$dT = \sqrt{\frac{(R_s - R_c)(R_s - 1)}{R_c^3}} \frac{R^2}{\sqrt{R_s - R} \sqrt{(R_s - R_c) \frac{R^3}{R_c^3} + R - R_s}} \sqrt{\frac{R}{R - 1}} dR. \quad (17)$$

Час стосовно далекого спостерігача зв'язаний із часом, який фіксує спостерігач у будь-якій точці на кривій виразом:

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt. \quad (18)$$

Знерозміримо цей час $T_\Lambda = t \frac{c}{r_g}$ і отримаємо:

$$dT_\Lambda = \sqrt{\frac{(R_s - R_c)(R_s - 1)}{R_c^3}} \frac{R^2}{\sqrt{R_s - R} \sqrt{(R_s - R_c) \frac{R^3}{R_c^3} + R - R_s}} \frac{R}{R - 1} dR. \quad (19)$$

Підінтегральні функції в рівняннях (17) і (19) мають сингулярності в точках R_c і R_s . Розіб'ємо ці інтеграли так:

$$dT_{(\Lambda)} = \int_{R_c}^{R_c+\eta_1} \dots dR + \int_{R_c+\eta_1}^{R_s-\eta_2} \dots dR + \int_{R_s-\eta_2}^{R_s} \dots dR = I_1 + I_2 + I_3. \quad (20)$$

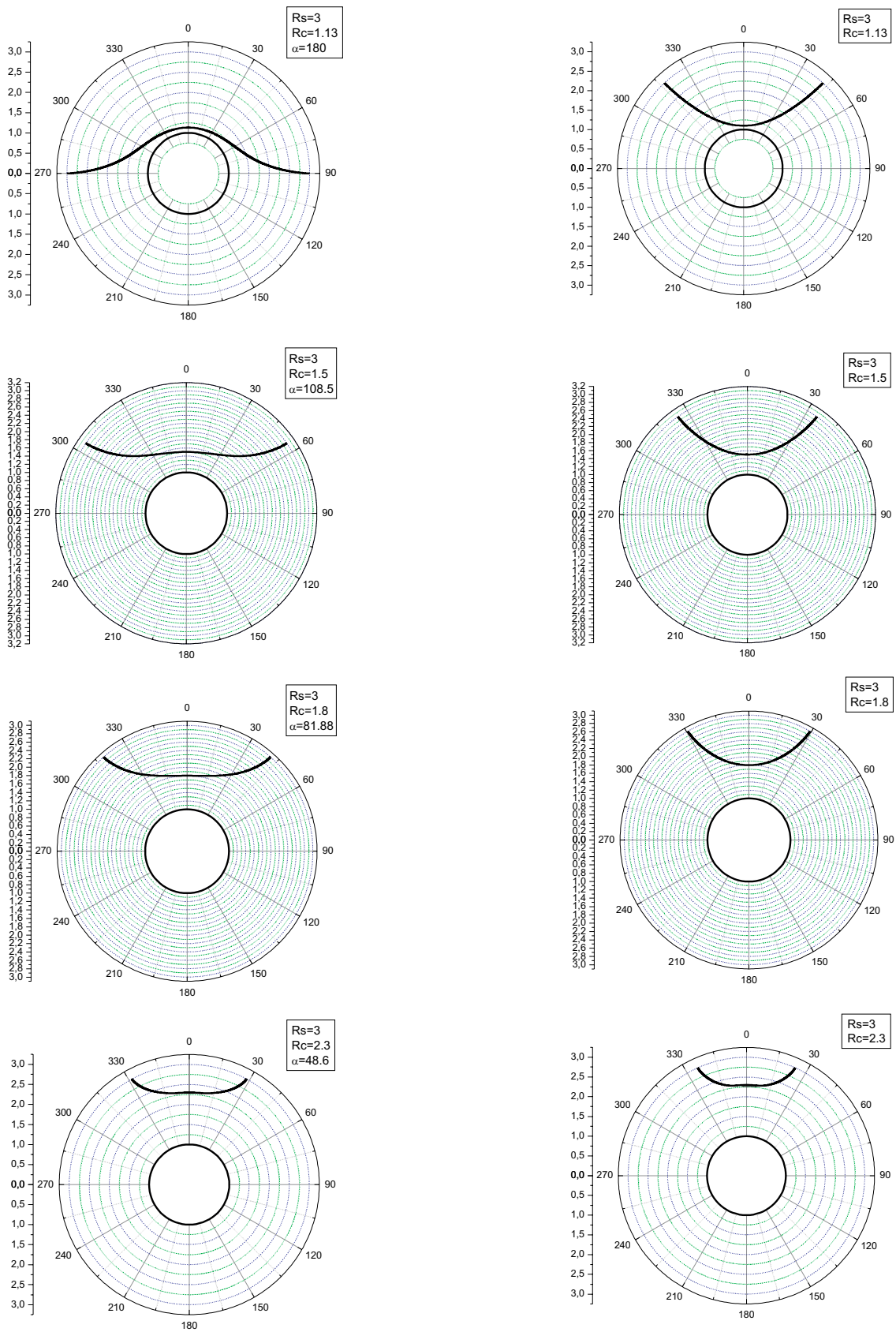


Рис. 2. З лівого боку зображено форми брахістохрони в гравітаційному полі Шварцшільда, а праворуч — для ньютонівського поля, при фіксованому значенні $R_s = R_f = 3$ і для різних значень R_c .

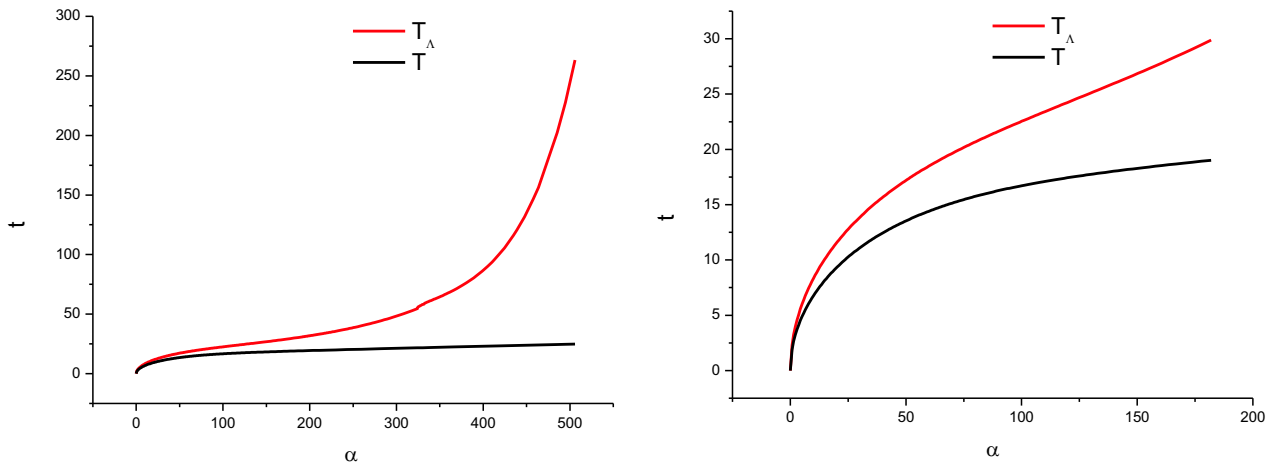


Рис. 3. (Кольоровий онлайн.) Час, який фіксують спостерігачі вздовж траєкторії (T , нижня крива), і час стосовно далекого спостерігача (T_Λ , верхня крива) руху по брахістохроні у сферично-симетричному гравітаційному полі Шварцшільда для $R_s = R_f = 3$ залежно від полярного кута між початковою й кінцевою точками.

Так само, як у попередньому розділі, шукаємо η для рівняння кривої і знаходимо η_1 і η_2 . На рис. 3 зображено час, який фіксують спостерігачі вздовж траєкторії (T), і час стосовно до далекого спостерігача (T_Λ) для $R_s = R_f = 3$ залежно від полярного кута між початковою й кінцевою точками.

V. ОДНОРІДНЕ ПОЛЕ

Історично склалося, що рівняння брахістохрони в ньютонівському гравітаційному полі вперше було отримано для однорідного гравітаційного потенціалу [1]. Розв'язок цієї задачі набагато простіший, ніж у неоднорідному полі (10) [2]. Крива, яку брати Бернуллі та інші отримали в 1697 році, є циклоїдою. У нашому випадку так само можна одержати рівняння брахістохрони в однорідному полі.

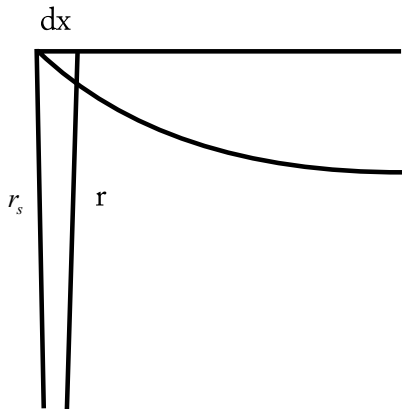


Рис. 4. В однорідному гравітаційному полі відхилення по x і y дуже малі, тому наближено можна вважати, що $r = r_s - y$, $d\phi = \frac{dx}{r}$.

Щоб спростити розв'язування задачі, перейдімо в декартові координати. Перепишімо інтервал Шварцшільда через координати (x, y) при малих відхиленнях по x і y (див. рис. 4). Зв'язок полярних координат із декартовими запишемо так: $r = r_s - y$, $dr = -dy$, $d\phi = \frac{dx}{r}$, тоді квадрат інтервалу перепишемо:

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r_s - y}\right) c^2 (dt)^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r_s - y}} (dy)^2 - (dx)^2. \quad (21)$$

Розкладімо компоненти метричного тензора за малими відхиленнями у й обмежмося лінійними членами. Запишемо окремо g_{00} компоненту метричного тензора і квадрат довжини в такому просторі:

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r_s} - \frac{r_g}{r_s^2} y \quad (22)$$

$$(dl)^2 = \frac{1 - \frac{r_g}{r_s} + \frac{r_g}{r_s^2} y}{\left(1 - \frac{r_g}{r_s}\right)^2} (dy)^2 + (dx)^2. \quad (23)$$

Тепер використаємо закон збереження енергії (3), і міркуючи так само, як у другому розділі, ми отримаємо рівняння брахістохрони в однорідному сферично-симетричному гравітаційному полі:

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{C - y} \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r_s} + \frac{r_g}{r_s^2} y}}{1 - \frac{r_g}{r_s}}}, \quad (24)$$

де C — це константа інтегрування, яку знаходимо з крайових умов.

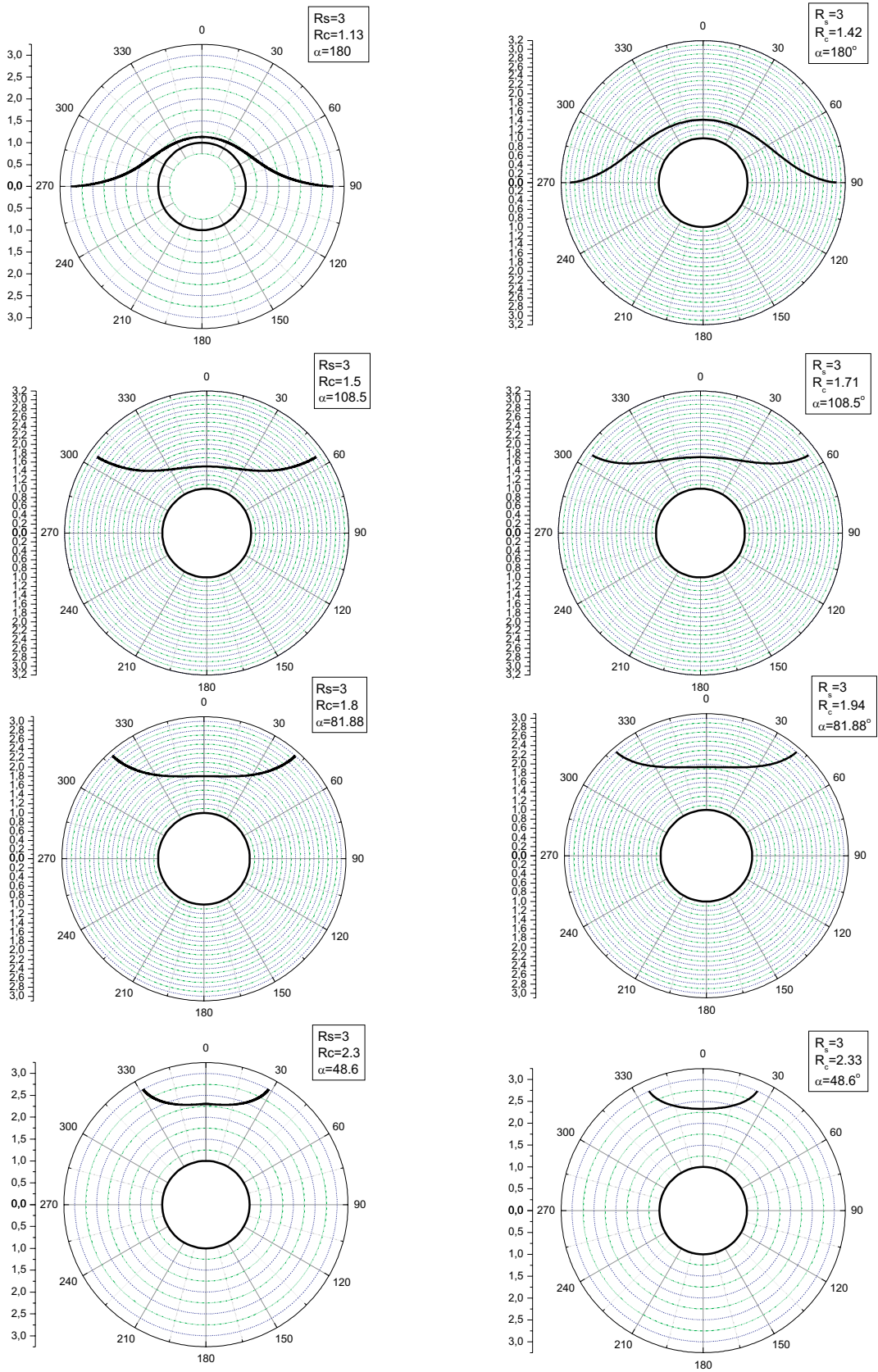


Рис. 5. Ліворуч зображені брахістохрони щодо спостерігачів, які розміщені вздовж кривої, а праворуч — щодо віддаленого спостерігача.

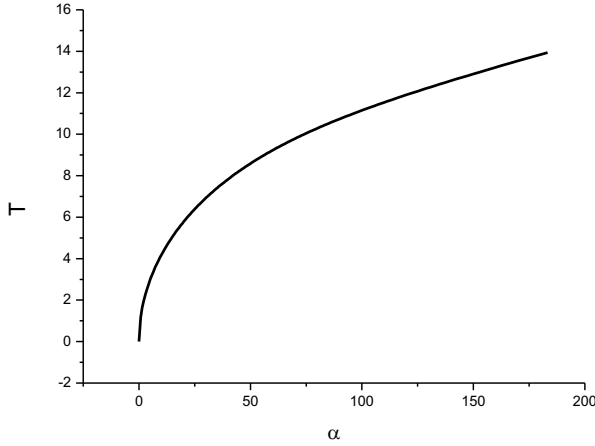


Рис. 6. Час подорожі частинки вздовж брахістохрони щодо віддаленого спостерігача залежно від кута між початковою й кінцевою точками.

Тепер знайдемо рівняння брахістохрони в однорідному полі, використовуючи результат рівняння в неоднорідному полі. Підставмо в рівняння (9) $R = R_s - Y$, $dR = -dY$, $d\phi = \frac{dX}{R}$

$$\frac{dX}{dY} = \sqrt{\frac{Y}{C(R_s - Y)^3 - Y}} \sqrt{\frac{R_s - Y}{R_s - Y - 1}}, \quad (25)$$

де $X = \frac{x}{r_g}$, $Y = \frac{y}{r_g}$. Тепер під першим коренем залишімо в чисельнику і знаменнику лінійні члени по Y , враховуючи $C = \frac{R_s - R_c}{(R_s - 1)R_c^3} = \frac{Y_{\max}}{(R_s - 1)R_c^3}$ (Y_{\max} є найнижчою точкою на кривій), а під другим коренем розкладемо вираз у ряд по Y до лінійного члена:

$$\frac{dX}{dY} = \sqrt{\frac{Y}{C - Y}} \frac{\sqrt{R_s^2 - R_s + Y}}{R_s - 1}. \quad (26)$$

Це і є рівняння брахістохрони в однорідному гравітаційному полі. Звівши його до розмірних величин, одержимо рівняння (24).

$$dT = \sqrt{\frac{(R_s - R_c)(R_s - 1)(R_c - 1)}{R_c^4}} \frac{R^2 \sqrt{R}}{\sqrt{R_s - R} \sqrt{(R_s - R_c)(R_c - 1) \frac{R^4}{R_c^4} - (R_s - R)(R - 1)}} \frac{R}{R - 1} dR, \quad (32)$$

розв'язок якого шукаємо чисельним методом, враховуючи, що підінтегральна функція в точках R_s і R_c має сингулярності. Результати, що стосуються цього розділу для початкової й кінцевої точок, які приймають значення $R_s = R_f = 3$, зображені на рис. 5 (праворуч) і рис. 6.

VII. РЕЗУЛЬТАТИ

Ми отримали диференціальне рівняння брахістохрони щодо спостерігачів, які є вздовж траєкторії (9) у сферично-симетричному гравітаційному полі, виходячи із засад загальної теорії відносності. Також із цього результату розраховані рівняння (17), (19) для часу, який необхідно частинці затратити для переміщення по кривій. У розділі V представлено диференціальне рівняння брахістохрони (26) в однорідному полі. В попередньому розділі обчислені рівняння брахістохрони (30) і часу (32) стосовно до далекого спостерігача.

VI. БРАХІСТОХРОНА СТОСОВНО ДАЛЕКОГО СПОСТЕРІГАЧА

Знайдемо вигляд брахістохрони стосовно до спостерігача, який перебуває на великій відстані від гравітаційного поля. Швидкість щодо далекого спостерігача має вигляд $V = \frac{dl}{dt}$. Перепишемо закон збереження енергії (3) через швидкість, яку фіксує цей спостерігач:

$$\epsilon = \frac{mc^2 g_{00}}{\sqrt{g_{00} - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (27)$$

Нехай у точці r_s швидкість $V = 0$, тоді:

$$\epsilon = mc^2 \sqrt{g_{00}}, \quad (28)$$

а з формул (27) і (28) отримаємо швидкість:

$$V = c \sqrt{g_{00}} \sqrt{1 - \frac{g_{00}}{g_{00}(r_s)}}. \quad (29)$$

Тепер таким самим методом, який викладений у розділі II, одержимо рівняння брахістохрони стосовно до віддаленого спостерігача:

$$\frac{dR}{d\phi} = R \sqrt{\frac{R^4 (R_s - 1) C - (R_s - R)(R - 1)}{R(R_s - R)}}, \quad (30)$$

яке інтегруємо подібно до розділу III, а C можна переписати через R_c :

$$C = \frac{(R_s - R_c)(R_c - 1)}{(R_s - 1)R_c^4}, \quad 1 < R_c < R_s. \quad (31)$$

Це рівняння в границі ($R \gg 1$) прямує до рівняння брахістохрони в ньютонівському гравітаційному полі (10).

Так само, як у розділі IV, отримуємо рівняння для часу руху по траєкторії:

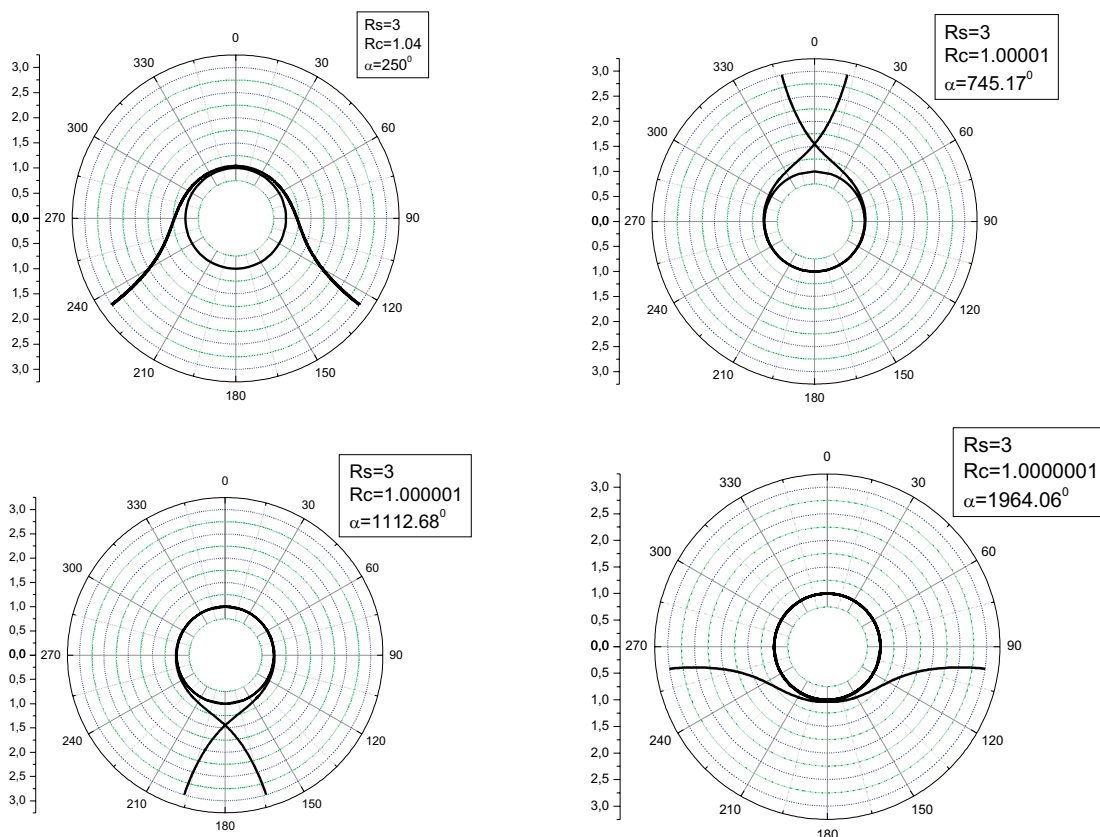


Рис. 7. При зменшенні R_c кут α перевищуватиме 180° .

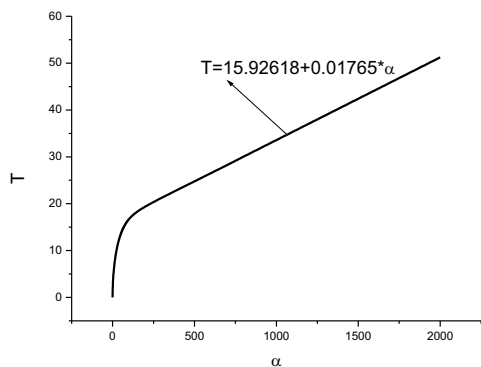


Рис. 8. Час, який фіксують спостерігачі вздовж траєкторії залежно від полярного кута руху по брахістрохоні. Прослідковується майже лінійна залежність власного часу від кута після $\alpha = 200^\circ$.

Для крайових точок, які є на відстані $R_s = R_f = 3$, ми змінювали R_c , а отримані результати зображені на рис. 2. На цьому рисунку (ліворуч) зображені форми кривих при різних R_c , а з правого боку показано вигляд кривих для ньютонівського представлення гравітаційного поля. При однакових R_c крайові точки в полі Шварцшільда рознесені на більший кут, ніж у ньютонівському випадку. Це зумовлено тим, що, на відміну від брахістрохони, яка реалізується в граві-

таційному полі Ньютона (10), релятивістська (9) має множник $(\sqrt{\frac{R-1}{R}})$, що зумовлює це “розширення”.

При подальшому зменшенні R_c кут α перевищуватиме 180° (рис. 7), на відміну від ньютонівського випадку [2]. Ми бачимо, що чим ближче буде точка R_c до гравітаційного радіуса, тим більше витків матиме крива, і при R_c , що прямує до одиниці, α прямує до нескінченності. Тобто для двох фіксованих точок $R_s = R_f$ ми будемо мати безліч траєкторій із різними значеннями R_c , але одна траєкторія буде оптимальною для максимального значення R_c .

Час, який фіксує спостерігач у даній точці траєкторії (17), і час, який фіксує віддалений спостерігач (19) для значень $R_s = R_f = 3$ залежно від полярного кута між цими точками зображено на рис.3. Отже, щоб знайти реальний час, потрібно знерозмірений час помножити на $\frac{r_g}{c}$. Значить, що чим більші розміри чорної діри, то більше часу потрібно затратити тілу, щоб переміститися по брахістрохоні з початкової точки в кінцеву при фіксованих $R_s = R_f$ і куті між ними. Тобто точки на кривій віддалятимуться від початку координат пропорційно до гравітаційного радіуса (Rr_g), і відповідно відстань між початковою й кінцевою точками збільшуватиметься. На рис. 8 зображено власний час руху по брахістрохоні стосовно до спостерігачів уздовж траєкторії. Приблизно після $\alpha = 200^\circ$ залежність часу від кута α можна вважати

лінійною. Це зумовлено тим, що частинка рухається достатньо великий проміжок шляху майже по коловій траєкторії, і через це її швидкість по ці траєкторії можна вважати сталою.

Подібно обчислено брахістохрону щодо віддаленого спостерігача. На рис. 5 зображені криві для початкової й кінцевої точок, які є на відстані трьох гравітаційних радіусів від центра координат ($R_s = R_f = 3$) і при різному куті між ними. Ліворуч зображені траєкторії, які фіксують спостерігачі вздовж цих кривих (9), а праворуч — брахістохрони стосовно віддаленого спостерігача (30). Радіальні координати точок на траєкторії стосовно віддаленого спостерігача мають більші значення (крім крайових точок), ніж у першо-

му випадку. Це зумовлено сповільненням часу в гравітаційному полі (червоне зміщення). Також на рис. 6 зображено час подорожі частинки по брахістохроні залежно від кута між початковою й кінцевою точками (α).

VIII. ПОДЯКИ

Автор вдячний науковому керівникові, докторові фізико-математичних наук професорові В. М. Ткачукові за корисні консультації під час дослідження проблеми, а також колективу кафедри теоретичної фізики за плідні дискусії під час семінарів.

[1] J. Bernoulli, Acta Eruditorum (Lipsiae) **15**, 264 (1696).

[2] B. Singh, R. Kumar, Indian J. Pure Appl. Math. **19**, 575 (1988).

[3] D. R. Mitchell, arXiv:math-ph/0611055v3 (2008).

[4] S. Mertens, S. Mingramm, Eur. J. Phys. **29**, 1191 (2008).

[5] H. F. Goldstein, C. M. Bender, J. Math. Phys. **27**, 507 (1986).

BRACHISTOCHRONE PROBLEM IN THE SCHWARZSCHILD METRIC

A. R. Kuzmak

*Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv,
12, Drahomanov St., Lviv, UA-79005, Ukraine*

The brachistochrone problem in a weakly nonuniform gravitational field was obtained for the first time by Singh and Kumar in 1988. This equation has been obtained using the Newtonian mechanics. We have solved the brachistochrone problem in the Schwarzschild metric using the laws of general relativity. In this work we have obtained the brachistochrone equation and the equation for time. Also, we have obtained the relativistic equation for the uniform gravitational field. These results we have compared with the classical results.