

НАБЛИЖЕННЯ ХАОТИЧНИХ ФАЗ ДЛЯ БОЗЕ-СИСТЕМ ВИЩЕ ВІД ТЕМПЕРАТУРИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДУ

І. О. Вакарчук, В. С. Пастухов

*Кафедра теоретичної фізики
Львівського національного університету імені Івана Франка,
вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005, Україна
(Отримано 4 квітня 2011 р.)*

Побудовано теорію бозе-рідин у нормальному стані. У загальних рисах проаналізовано властивості спектра колективних збуджень системи. Зроблено найпростішу оцінку малого критичного індексу.

Ключові слова: RPA, бозе-система, спектр колективних збуджень, малий критичний індекс.

PACS number(s): 05.30.Jp, 03.75.Kk, 64.60.F–

I. ВСТУП

Від часу першого застосування наближення хаотичних фаз (RPA) до проблеми електронного газу високої густини воно стало стандартним інструментом для опису багаточастинкових систем та в теорії магнетизму. Наявність безмежної кількості доданків теорії збуджень дає змогу, принаймі якісно, аналізувати поведінку систем із сильною взаємодією і в найпростішому наближенні шукати спектри колективних збуджень. Важливою особливістю цього наближення є те, що завжди можна вказати нетривіальний граничний випадок, коли RPA-результат стає точним.

На противагу ферміонним системам, для взаємодіючих бозонів при низьких температурах наближення хаотичних фаз дає головний внесок у термодинамічні функції, фактично повністю перебудовуючи систему, що кардинально змінює її властивості. Проте в області високих температур динамічні [1] і термодинамічні властивості слабозв'язаних бозе-систем в RPA-наближенні принципово не відрізняються від властивостей ідеального газу. Відмінності з'являються в околі критичної точки, де роль взаємодії є визначальною. Зрозуміло, що найцікавішою як у теоретичному, так і в експериментальному аспектах є область температур, нижчих від критичної. Повний RPA-опис цих систем із коректним урахуванням конденсатних і надконденсатних внесків подано в [2], а ось праць, присвячених вивченню бозе-систем у нормальному стані, не так уже й багато. Причина цього проста — сучасні експериментальні техніки дають змогу створювати тільки слабозв'язані бозе-системи, для яких наближення хаотичних фаз у певному сенсі є занадто сильним. Винятком є бозе-газ із внутрішніми ступенями вільності [3], де для побудови фазової діаграми не можна обмежуватися скінченною кількістю доданків теорії збуджень. Нагадаємо, що для ферміонів уже тепер є можливість створювати системи в так званій границі унітарності (див., наприклад [4]) і є всі підстави вважати [5], що невдовзі ця область взаємодій стане досяжною для бозе-частинок.

II. ЗАГАЛЬНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Розглянемо сукупність N безспінових частинок в об'ємі V . Запишемо статистичну суму моделі функціональним інтегралом за сукупністю комплексних змінних $\{\psi_{\mathbf{p}}(\omega_n)\}$ [6–8]

$$Z = \int D\psi^* D\psi \exp\{S\}, \quad (2.1)$$

де евклідова дія

$$S = \sum_{\omega_n} \sum_{\mathbf{p}} \{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}}\} \psi_{\mathbf{p}}^*(\omega_n) \psi_{\mathbf{p}}(\omega_n) - \frac{\nu(0)}{2\beta V} \left[\sum_{\omega_n} \sum_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p}}^*(\omega_n) \psi_{\mathbf{p}}(\omega_n) \right]^2 - \frac{1}{2} \sum_{\omega_n} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \nu(\mathbf{k}) \rho_{\mathbf{k}}(\omega_n) \rho_{-\mathbf{k}}(-\omega_n) \quad (2.2)$$

та введено позначення ($\mathbf{k} \neq 0$)

$$\rho_{\mathbf{k}}(\omega_n) = \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \sum_{\omega'_n} \sum_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p}}^*(\omega'_n) \psi_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}(\omega'_n + \omega_n). \quad (2.3)$$

Тут $\omega_n = 2\pi n/\beta$, ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — бозонна матсубарівська частота, $\beta = 1/T$ — обернена температура, $\nu(\mathbf{k})$ — фур'є-образ парного потенціалу взаємодії між частинками та $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \hbar^2 p^2/2m$ — вільночастинковий спектр. Для зручності працюємо у великому канонічному ансамблі, тому введено хімічний потенціал μ .

Розглянемо додатково сукупність комплексних змінних $\varphi_{\mathbf{k}}(\omega_n)$ з такою ж, як і в полів $\rho_{\mathbf{k}}(\omega_n)$, властивістю $\varphi_{\mathbf{k}}^*(\omega_n) = \varphi_{-\mathbf{k}}(-\omega_n)$. Виконаймо перетворення Стратоновича–Габбарда з доданком формули (2.2), що описує взаємодію, і запишемо ефективну дію, яка є основою подальшого розгляду

$$\begin{aligned}
 S_{\text{eff}} &= \sum_{\omega_n} \sum_{\mathbf{p}} \{i\omega_n - \xi_p\} \psi_{\mathbf{p}}^*(\omega_n) \psi_{\mathbf{p}}(\omega_n) \\
 &- \frac{\nu(0)}{2\beta V} \left[\sum_{\omega_n} \sum_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p}}^*(\omega_n) \psi_{\mathbf{p}}(\omega_n) \right]^2 \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{\omega_n} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} [\nu(k)]^{-1} \varphi_{\mathbf{k}}(\omega_n) \varphi_{-\mathbf{k}}(-\omega_n) \\
 &+ \frac{i}{\sqrt{\beta V}} \sum_{\omega_n, \omega'_n} \sum_{\mathbf{k} \neq 0, \mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{k}}(\omega'_n) \psi_{\mathbf{p}}^*(\omega_n) \psi_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}(\omega_n - \omega'_n). \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

Зрозуміло, що функціональний інтеграл беремо за сукупністю дійсних і уявних частин полів φ та ψ . Означимо одночастинкову температурну функцію Гріна

$$G(\omega_n, p) = -\langle \psi_{\mathbf{p}}(\omega_n) \psi_{\mathbf{p}}^*(\omega_n) \rangle, \quad (2.5)$$

де ламані дужки позначають усереднення з дією (2.2) або (2.4). Також уведемо в розгляд парний корелятор $\langle \varphi_{\mathbf{k}}(\omega_n) \varphi_{-\mathbf{k}}(-\omega_n) \rangle$. Тепер можна будувати теорію збурень. У такому формулюванні ми маємо справу з бозонами, які взаємодіють із фіктивним фононним полем. Зрозуміло, що, виконавши перехід $S \rightarrow S_{\text{eff}}$, ми частково перебудували ряд теорії збурень, узявши за основу петлеві діаграми, а отже вважаючи, що саме ці доданки дають максимальний внесок. Відомо, що така ситуація реалізується, коли фур'є-образ потенціалу попарної взаємодії є швидко спадною функцією хвильового вектора — тобто ефективний радіус дії потенціалу значно більший за характерну відстань між частинками. Оскільки працювати з теорією збурень в околі фазового переходу неможливо, то зручніше записати рівняння на точні функції Гріна $G(\omega_n, p)$ та корелятори $\langle \varphi_{\mathbf{k}}(\omega_n) \varphi_{-\mathbf{k}}(-\omega_n) \rangle$ і вже тоді намагатися розв'язати їх у певному наближенні. Відповідні рівняння мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 G^{-1}(\omega_n, p) &= i\omega_n - \xi_p - \rho\nu(0) \\
 &+ \frac{1}{\beta V} \sum_{\omega'_n} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \Gamma(\omega_n - \omega'_n, \mathbf{p} - \mathbf{k} | \omega_n, \mathbf{p}) \\
 &\times \langle \varphi_{\mathbf{k}}(\omega'_n) \varphi_{-\mathbf{k}}(-\omega'_n) \rangle G(\omega_n - \omega'_n, |\mathbf{p} - \mathbf{k}|), \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi_{\mathbf{k}}(\omega_n) \varphi_{-\mathbf{k}}(-\omega_n) \rangle^{-1} &= 1/\nu(k) \\
 &+ \frac{1}{\beta V} \sum_{\omega'_n} \sum_{\mathbf{p}} \Gamma(\omega'_n - \omega_n, \mathbf{p} - \mathbf{k} | \omega'_n, \mathbf{p}) \\
 &\times G(\omega'_n, p) G(\omega'_n - \omega_n, |\mathbf{p} - \mathbf{k}|), \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

де звичним чином введено вершинну функцію

$$\begin{aligned}
 &\langle \psi_{\mathbf{p}}^*(\omega_n) \psi_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}(\omega_n - \omega'_n) \varphi_{\mathbf{k}}(\omega'_n) \rangle \\
 &= \frac{i}{\sqrt{\beta V}} \Gamma(\omega_n - \omega'_n, \mathbf{p} - \mathbf{k} | \omega_n, \mathbf{p}) G(\omega_n, p) \\
 &\times G(\omega_n - \omega'_n, |\mathbf{p} - \mathbf{k}|) \langle \varphi_{\mathbf{k}}(\omega'_n) \varphi_{-\mathbf{k}}(-\omega'_n) \rangle. \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

Тут і далі через $\rho = N/V$ позначено рівноважну густину, яку вважаємо функцією хімічного потенціалу. Перевага системи (2.6)–(2.7) очевидна — з обох боків

рівності входять точні функції Гріна та φ -корелятори, а теорія збурень будується для вершини. Це неабияк важливо в околі фазового переходу, коли ряди теорії збурень починають розбігатися. Тепер коротко вкажемо на один з можливих способів отримати ці рівнянь. Звісно, можна звернутися до відповідних рівностей в операторному формалізмі [9], який повністю еквівалентний функціональному підходу. В нашому випадку варто згадати, що максимальний внесок у статистичну суму повинні давати “класичні” траєкторії, які можна отримати розв'язуванням відповідних рівнянь $\delta(-S_{\text{eff}})/\delta\psi_{\mathbf{p}}^*(\omega_n) = 0$, $\delta(-S_{\text{eff}})/\delta\varphi_{\mathbf{k}}(\omega_n) = 0$. Статистично усереднюючи ці рівності та враховуючи стрибок відповідних функцій, отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned}
 -\langle \psi_{\mathbf{p}}^*(\omega_n) \delta S_{\text{eff}} / \delta \psi_{\mathbf{p}}^*(\omega_n) \rangle &= 1, \\
 -\langle \varphi_{\mathbf{k}}(\omega_n) \delta S_{\text{eff}} / \delta \varphi_{\mathbf{k}}(\omega_n) \rangle &= 1, \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

які переходять у рівняння (2.6)–(2.7), якщо взяти до уваги явний вираз функціоналу S_{eff} . Подібні рівняння для класичних систем отримані в роботі [10] і для спінових систем у статті [11].

Надалі важливе місце займатиме корелятор $\langle \rho_{\mathbf{k}}(\omega_n) \rho_{-\mathbf{k}}(-\omega_n) \rangle$, для якого можна записати точну рівність через відповідний φ -корелятор

$$\begin{aligned}
 \langle \rho_{\mathbf{k}}(\omega_n) \rho_{-\mathbf{k}}(-\omega_n) \rangle &= \frac{1}{\nu(k)} \\
 \times \left\{ 1 - \frac{1}{\nu(k)} \langle \varphi_{\mathbf{k}}(\omega_n) \varphi_{-\mathbf{k}}(-\omega_n) \rangle \right\}. \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

Аналітичним продовженням цієї функції можна одержати динамічний структурний фактор, а відтак і статичний, а ці величини вже вимірюються експериментально.

III. НАБЛИЖЕННЯ ХАОТИЧНИХ ФАЗ

Найпростішим наближенням нашої теорії є наближення хаотичних фаз (RPA). Для цього в ряді для вершинної функції потрібно врахувати тільки перший член, тобто зробити заміну $\Gamma(\omega_n - \omega'_n, \mathbf{p} - \mathbf{k} | \omega_n, \mathbf{p}) \rightarrow 1$ в рівняннях (2.6)–(2.7). Тоді φ -корелятор дорівнює

$$\langle \varphi_{\mathbf{k}}(\omega_n) \varphi_{-\mathbf{k}}(-\omega_n) \rangle = \nu(k) / \{1 + \nu(k) \Pi(\omega_n, k)\}, \quad (3.11)$$

де поляризаційний оператор

$$\begin{aligned}
 \Pi(\omega_n, k) &= \frac{1}{\beta V} \sum_{\omega'_n} \sum_{\mathbf{p}} G(\omega'_n, p) \\
 &\times G(\omega'_n - \omega_n, |\mathbf{p} - \mathbf{k}|). \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

а одночастинкова функція Гріна

$$G^{-1}(\omega_n, p) = i\omega_n - \xi_p - \Sigma(\omega_n, p). \quad (3.13)$$

Власноенергетична частина чи масовий оператор

$$\begin{aligned}
 \Sigma(\omega_n, p) &= \rho\nu(0) - \frac{1}{\beta V} \sum_{\omega'_n} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{\nu(k)}{1 + \nu(k) \Pi(\omega'_n, k)} \\
 &\times G(\omega_n - \omega'_n, |\mathbf{p} - \mathbf{k}|). \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Після аналітичного продовження у верхню півплощину позначимо

$$\begin{aligned}\Sigma_R(\omega, p) &= \Re \Sigma(\omega_n, p)|_{i\omega_n \rightarrow \omega + i0}, \\ \Sigma_I(\omega, p) &= \Im \Sigma(\omega_n, p)|_{i\omega_n \rightarrow \omega + i0}.\end{aligned}$$

Тепер можна записати рівняння для перенормованого спектра [12]

$$\tilde{\xi}_p = \xi_p + \Sigma_R(\tilde{\xi}_p, p), \quad (3.15)$$

який буде стійким за умови зникаюче малого загасання

$$\begin{aligned}\gamma_p &= Z(p)\Sigma_I(\tilde{\xi}_p, p), \\ Z^{-1}(p) &= 1 - \frac{\partial \Sigma_R(\omega, p)}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \tilde{\xi}_p}.\end{aligned} \quad (3.16)$$

Візуальна простота цих рівнянь і наближення в цілому оманливі, бо маємо справу із системою нелінійних рівнянь, замкнених на одночастинкову функцію Гріна, і для знаходження розв'язку потрібно вдатися до чергових спрощень, які ґрунтуються на нашому розумінні фізики бозе-систем. Варто наголосити, що наближення хаотичних фаз не є строгим рядом за параметром взаємодії, а тільки ефективно підсумовує певний клас доданків ряду теорії збурень. Тому в точці фазового переходу не можна обмежуватися лише першим членом для вершинної функції, а принаймі потрібно зібрати ряд із такими ж особливостями, що й у самому RPA. Тобто в околі критичної температури це наближення стає некоректним. У позакритичній області наближення хаотичних фаз добре працюватиме у випадку густих газів і реалістичних далекодієвих потенціалів попарної взаємодії між частинками.

Для того, щоб угадати явний вигляд функції Гріна, скористаємося припущенням, що ввімкнення взаємодії між бозе-частинками суттєво не змінює характеру одночастинкових станів. Тобто деформуються тільки константи біля відповідних функцій. Звісно, ідеться про головні асимптотики при малих значеннях хвильового вектора, адже саме вони є визначальними. Фактично ми обираємо такий вираз для одночастинкової функції Гріна:

$$G^{-1}(\omega_n, p) = Z^{-1}\{i\omega_n - \tilde{\xi}_p\}, \quad (3.17)$$

де $\tilde{\xi}_p = \tilde{\varepsilon}_p - \tilde{\mu}$. Одночастинковий спектр $\tilde{\varepsilon}_p = \hbar^2 p^2 / 2\tilde{m}$ квадратичний за хвильовим вектором і нагадує спектр ідеального бозе-газу, але з перенормованою масою, $\tilde{\mu}$ — перенормований хімічний потенціал. У критичній точці $G^{-1}(0, 0) = 0$ ($\tilde{\mu} = 0$). Після таких спрощень ми звели задачу до самоузгодженого знаходження головних асимптотик відповідних функцій при малих значеннях p .

Займемося дослідженням поляризаційного оператора. Щоб не загроможувати вирази черговими позначеннями, розрахуємо вираз для поляризаційного оператора ідеального бозе-газу. Відтак простою заміною констант ми отримаємо й вираз для реального газу в наближенні (3.17). Отже, переписуємо (3.12)

$$\begin{aligned}\Pi(\omega_n, k) &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} n(\beta \xi_p) \\ &\times \left\{ \frac{1}{\xi_{|\mathbf{p}-\mathbf{k}|} - \xi_p - i\omega_n} + (\omega_n \rightarrow -\omega_n) \right\},\end{aligned} \quad (3.18)$$

тут $n(x) = \{e^x - 1\}^{-1}$ — бозе-розподіл. Виконаймо аналітичне продовження й позначмо

$$\begin{aligned}\Re \Pi(\omega_n, k)|_{i\omega_n \rightarrow \omega + i0} &= R(\omega, k), \\ \Im \Pi(\omega_n, k)|_{i\omega_n \rightarrow \omega + i0} &= I(\omega, k).\end{aligned} \quad (3.19)$$

Відразу можна отримати явний аналітичний вираз для функції

$$\begin{aligned}I(\omega, k) &= \frac{1}{16\pi} \beta k_0^3 \frac{k_0}{k} \\ &\times \ln \left| \frac{1 - \exp\{\beta\mu - [k/2k_0 + \beta\omega/(2k/k_0)]^2\}}{1 - \exp\{\beta\mu - [k/2k_0 - \beta\omega/(2k/k_0)]^2\}} \right|,\end{aligned} \quad (3.20)$$

дійсну частину можна записати так:

$$\begin{aligned}R(\omega, k) &= \beta \rho \frac{k_0}{2k} \{f(k/2k_0 + \beta\omega/(2k/k_0), \beta\mu) \\ &+ f(k/2k_0 - \beta\omega/(2k/k_0), \beta\mu)\},\end{aligned} \quad (3.21)$$

де $k_0 = \sqrt{2mT}/\hbar$, а функція

$$\begin{aligned}f(\varepsilon, y) &= \varepsilon \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} g_{1/2}(e^{y-x\varepsilon^2}) / g_{3/2}(e^y), \\ g_l(e^y) &= \sum_{n \geq 1} \frac{e^{yn}}{n^l}\end{aligned} \quad (3.22)$$

з асимптотиками в граничних випадках

$$\begin{aligned}f(\varepsilon \rightarrow 0, y) &= 2\varepsilon \frac{g_{1/2}(e^{-y})}{g_{3/2}(e^{-y})}, \\ f(\varepsilon \rightarrow 0, 0) &= \frac{\pi^{3/2}}{\zeta(3/2)} \text{sign}(\varepsilon), \\ f(\varepsilon \rightarrow \infty, y) &= 1/\varepsilon.\end{aligned}$$

Використовуючи співвідношення (2.10), можна записати ρ -корелятор у нашому наближенні

$$\begin{aligned}\langle \rho_{\mathbf{k}}(\omega_n) \rho_{-\mathbf{k}}(-\omega_n) \rangle \\ = \Pi(\omega_n, k) / \{1 + \nu(k)\Pi(\omega_n, k)\}.\end{aligned} \quad (3.23)$$

Після аналітичного продовження у верхню півплощину нулі знаменника виразу (3.23) дадуть спектр колективних мод $\omega(k) - i\Gamma(k)$. Для дійсної частини спектра маємо рівняння

$$1 + \nu(k)R(\omega(k), k) = 0. \quad (3.24)$$

Зрозуміло, що уявна частина спектра повинна бути малою, тобто

$$\Gamma(k) = I(\omega(k), k) [\partial R(\omega, k) / \partial \omega]^{-1} \Big|_{\omega \rightarrow \omega(k)} \ll \omega(k).$$

Враховуючи особливості фур'є-образу потенціалу, в загальному випадку знаходження розв'язку рівняння на спектр (3.24) є непростим завданням, тому

спробуємо отримати тільки довгохвильову асимптотику. Цей результат буде загальним для всіх потенціалів з умовою на фур'є-образ $\nu(0) > 0$. Підставивши $\omega(k \rightarrow 0) = \hbar ck$ у рівність (3.24), отримуємо рівняння для швидкості звуку c

$$1 + \rho\nu(0)f'(\hbar ck_0/2T, \beta\mu)/2T = 0. \quad (3.25)$$

Щоб не загроможувати виклад великою кількістю параметрів, проаналізуємо це рівняння в класичній області. Поведінка системи в ній якісно збігатиметься з поведінкою і при низьких температурах. Різниця з'явиться тільки в критичній точці. Важливе спрощення — зникає залежність від хімічного потенціалу функції $f(\varepsilon, y)$

$$f(\varepsilon) = f(\varepsilon, y \rightarrow -\infty) = \varepsilon \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \exp\{-x\varepsilon^2\}. \quad (3.26)$$

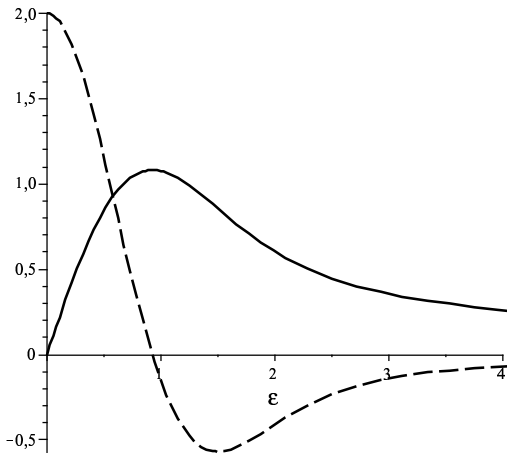


Рис. 1. Графік функції $f(\varepsilon)$ (суцільна лінія) та її похідної (штрихована лінія).

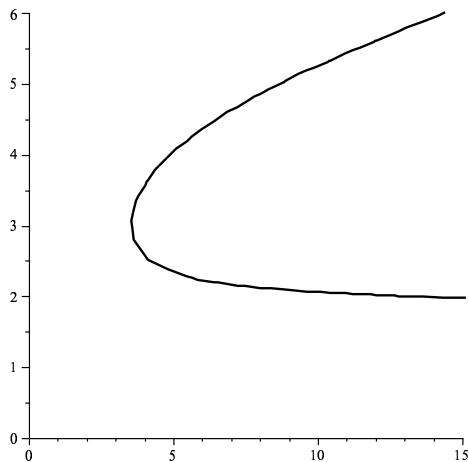


Рис. 2. Графік залежності знерозмірених величин швидкості звуку $c\sqrt{m/2T}$ (верхня лінія) та $c_s\sqrt{m/2T}$ (нижня лінія) спектра колективних збуджень від знерозміреного параметра взаємодії $\rho\nu(0)/T$.

Із графіка похідної функції $f(\varepsilon)$ зрозуміло, що при досить малих значеннях параметра $\rho\nu(0)/T$ звукової вітки не буде взагалі, а при значеннях $\rho\nu(0)/T > 3.514$ виникають дві вітки $\omega(k) = \hbar ck$ (назвемо її основною) та $\omega_s(k) = \hbar c_s k$ (м'яка мода). Наступний член розкладу обох віток у довгохвильовій області кубічний за k . Швидкість звуку першої вітки збільшується зі збільшенням $\rho\nu(0)/T$, другої — спадає і прямує до сталого значення $c_s = 2.661\sqrt{T/m}$. У класичному випадку функцію (3.20) можна записати так:

$$I(\omega, k) = \sqrt{\pi}\beta\rho\frac{k_0}{k} \times \exp\{-[\beta\omega k_0/2k]^2 - k^2/4k_0^2\} \sinh(\beta\omega/2). \quad (3.27)$$

Із цієї формули випливає, що для значень параметра $\rho\nu(0)/T \gg 1$ довгохвильова асимптотика загасання м'якої моди зростає, а для вітки $\omega(k)$, навпаки, швидко спадає до нуля. Фактично це означає, що м'якої вітки взагалі немає. Для основної боголюбівської (нуль-звукової у випадку фермі-систем) вітки головну асимптотику можна отримати аналітично $c = \sqrt{\rho\nu(0)/m}$. Загасання для неї $\Gamma(k \rightarrow 0) \sim k$ і важливо, що відношення

$$\Gamma(k)/\omega(k) = \sqrt{\pi} \left[\frac{\rho\nu(0)}{2T} \right]^{3/2} \exp\{-\rho\nu(0)/2T\}, \quad (3.28)$$

швидко прямує до нуля при зростанні $\rho\nu(0)/T$. Для цієї вітки, навіть при низьких температурах, величина швидкості звуку й загасання не зміниться.

У крайній близькості до точки бозе-конденсації швидкість звуку м'якої моди можна розрахувати аналітично ($\rho\nu(0)/T \gg 1$)

$$c_s^2 = \frac{2\sqrt{\pi}}{-\zeta(1/2)} \sqrt{\beta|\mu|} \frac{T}{m} \left\{ 1 + \frac{T}{\rho\nu(0)} \frac{\zeta(3/2)}{-\zeta(1/2)} \right\}, \quad (3.29)$$

де $\zeta(3/2) = 2.6124\dots$ та $\zeta(1/2) = -1.4604\dots$. Як і в класичному випадку, величина загасання цієї вітки не мала. У критичній температурі для значень знерозміреного параметра взаємодії $\rho\nu(0)/T$, більших за $-\zeta(3/2)/\zeta(1/2) = 1.788\dots$, завжди є одна звукова вітка спектра, яка в границі $\rho\nu(0)/T \gg 1$ переходить у відповідну класичну $\omega(k)$. Отже, значення знерозміреного параметра взаємодії $\rho\nu(0)/T = 1.788$ відділяє області слабкої — сильної взаємодії або, що те ж саме, області високих — низьких температур, у яких бозе-система має принципово різні властивості.

Якщо розглянути властивості спектра колективних збуджень кулонівського бозе-газу в компенсуючому полі [13], то розв'язком рівняння (3.24) завжди буде тільки одна вітка плазмонів зі щільною у спектрі і характерним загасанням Ландау.

Розрахуймо структурний фактор системи

$$S(k) = \frac{1}{\pi\rho} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega n(\beta\omega) \times \Im \{ \langle \rho_{\mathbf{k}}(\omega_n) \rho_{-\mathbf{k}}(-\omega_n) \rangle_{i\omega_n \rightarrow \omega + i0} \}, \quad (3.30)$$

в явному вигляді

$$S(k) = \frac{1}{\pi\rho} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega n(\beta\omega) \times \frac{I(\omega, k)}{(1 + \nu(k)R(\omega, k))^2 + (\nu(k)I(\omega, k))^2}. \quad (3.31)$$

Цю формулу можна значно спростити в областях малих значень хвильового вектора й великих значень параметра взаємодії. Тоді максимальний внесок в інтеграл вноситимуть значення з околиць двох точок $\omega = \pm\omega(k)$, бо добуток $\nu(k)I(\omega(k), k)$ швидко прямує до нуля і можна замінити (в інтегралі)

$$\frac{1}{\pi\rho} \frac{I(\omega, k)}{(1 + \nu(k)R(\omega, k))^2 + (\nu(k)I(\omega, k))^2} \rightarrow \frac{1}{\rho\nu(k)} \text{sign}(I(\omega, k))\delta(1 + \nu(k)R(\omega, k)),$$

остаточно

$$S(k \rightarrow 0) = \frac{1}{\rho\nu^2(k)} [\partial R(\omega, k)/\partial\omega]^{-1} |_{\omega \rightarrow \omega(k)} \times \coth(\beta\omega(k)/2).$$

Для іншої гілки загасання вже не є малим, тому її внесок у структурні функції й термодинаміку системи буде незначним. Використовуючи формулу (3.24), можна розрахувати похідну

$$[\partial R(\omega, k)/\partial\omega]^{-1} |_{\omega \rightarrow \omega(k)} = \nu^2(k) \frac{\partial\omega(k)}{\partial\nu(k)}. \quad (3.32)$$

Із непоганою точністю спектр колективних мод у вказаній області можна запроксимувати боголюбівським $\omega(k) \rightarrow E(k) = \sqrt{\varepsilon_k^2 + 2\rho\nu(k)\varepsilon_k} = \varepsilon_k\alpha_k$. Тоді для структурного фактора матимемо

$$S(k \rightarrow 0) = \frac{1}{\alpha_k} \coth(\beta E(k)/2).$$

Тепер можна взятися за розрахунок власноенергетичної частини одночастинкової функції Гріна в РРА-наближенні (3.14). Оскільки функція $\Pi(\omega_n, k)$ для великих ω_n поводить як $1/\omega_n^2$, то зрозуміло, що ми змушені доозначити суму за частотою [6,9]. Найпростіше це зробити, враховуючи, що в границі $\nu(k) \rightarrow 0$ наші вирази мають відтворювати наближення Гартрі-Фока, тому зручно відразу виділити цей доданок

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta V} \sum_{\omega'_n} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{\nu(k)}{1 + \nu(k)\Pi(\omega'_n, k)} G(\omega_n - \omega'_n, |\mathbf{p} - \mathbf{k}|) \\ &= \frac{1}{\beta V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \nu(k) \lim_{\tau \rightarrow -0} \frac{1}{\beta} \sum_{\omega'_n} e^{i\omega'_n \tau} G(\omega_n - \omega'_n, |\mathbf{p} - \mathbf{k}|) \\ & - \frac{1}{\beta V} \sum_{\omega'_n} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \nu(k) \frac{\nu(k)\Pi(\omega'_n, k)}{1 + \nu(k)\Pi(\omega'_n, k)} G(\omega_n - \omega'_n, |\mathbf{p} - \mathbf{k}|), \end{aligned}$$

тепер сума за ω'_n у другому доданку збіжна. Для спрощення записів виконаймо розрахунки для ідеального

газу, бо узагальнення знову зведеться до перепозначення констант. Рахуємо останній доданок. Використовуючи спектральне представлення, зручно переписати

$$\frac{\nu(k)\Pi(\omega_n, k)}{1 + \nu(k)\Pi(\omega_n, k)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega - i\omega_n} \times \frac{\nu(k)I(\omega, k)}{(1 + \nu(k)R(\omega, k))^2 + (\nu(k)I(\omega, k))^2}.$$

Підставляючи цей вираз у формулу (3.14), отримуємо

$$\begin{aligned} \Sigma(\omega_n, p) &= \rho\nu(0) + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \nu(k)n(\beta\xi_{|\mathbf{k}-\mathbf{p}|}) \\ &+ \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \nu(k) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} \frac{n(\beta\omega) - n(\beta\xi_{|\mathbf{k}-\mathbf{p}|})}{\omega - \xi_{|\mathbf{k}-\mathbf{p}|} + i\omega_n} \\ &\times \frac{\nu(k)I(\omega, k)}{(1 + \nu(k)R(\omega, k))^2 + (\nu(k)I(\omega, k))^2}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Щоб узагальнити результат, достатньо замінити $m \rightarrow \tilde{m}$, $\mu \rightarrow \tilde{\mu}$ та $\nu(k) \rightarrow Z\nu(k)$ у величинах під сумою за хвильовим вектором. Розрахувати власноенергетичну частину аналітично можна у двох граничних випадках: перший — тривіальний — наближення Гартрі-Фока, другий — при достатньо низьких температурах чи великому параметрі взаємодії. Особливо зупинятися на наближенні Гартрі-Фока не будемо, але вкажемо, що перенормовуються тільки маса й хімічний потенціал, а величина Z залишається рівною одиниці. Важливо, що ефективна маса квазічастинок збільшується, а отже, критична температура знижується [14].

У другому випадку можна скористатися тими ж міркуваннями, що й при розрахунку структурного фактора. Нескладні обчислення приводять до такої формули:

$$\begin{aligned} \Sigma(\omega_n, p) &= \rho\nu(0) + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \nu(k)n(\beta\xi_{|\mathbf{k}-\mathbf{p}|}) \\ &- \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \nu^2(k) \frac{\partial\omega(k)}{\partial\nu(k)} \left\{ \frac{1 + n(\beta\omega(k)) + n(\beta\xi_{|\mathbf{k}-\mathbf{p}|})}{\omega(k) + \xi_{|\mathbf{k}-\mathbf{p}|} - i\omega_n} \right. \\ &\left. - \frac{n(\beta\omega(k)) - n(\beta\xi_{|\mathbf{k}-\mathbf{p}|})}{\omega(k) - \xi_{|\mathbf{k}-\mathbf{p}|} + i\omega_n} \right\}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

До цього моменту ми розглядали властивості бозе-системи із сильною взаємодією. У границі $\rho\nu(0)/T \ll 1$ рівняння (3.24) немає дійсних коренів. Як наслідок, у цій області значень параметра взаємодії для розрахунку структурного фактора й масового оператора потрібно використовувати формули (3.31) і (3.33) відповідно.

IV. КРИТИЧНА ОБЛАСТЬ

Розгляньмо поведінку системи при наближенні до критичної температури. Незавжди бачити, враховуючи властивості поляризаційного оператора, що власноенергетична частинка одночастинкової функції

Гріна на нульовій частоті та в границі малих взаємодій поводить як $p^2 \ln p$, а отже, стає визначальною в довгохвильовій області. Така неузгодженість пов'язана з вибором одночастинкової функції Гріна у вигляді (3.17), тобто в критичній області така підстановка вже не правильна. У загальному випадку вгадати структуру одночастинкової функції Гріна ми поки що не можемо, але границю нульової частоти (саме ці внески є проблемними) вдається проаналізувати. Отже, вибираємо тільки ті доданки рівнянь (2.6)–(2.7), які містять особливості при малих значеннях хвильового вектора:

$$G^{-1}(p) = -\xi_p - \rho\nu(0) + \frac{1}{\beta V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \Gamma(\mathbf{p} - \mathbf{k}|\mathbf{p}) \langle \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}} \rangle G(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|), \quad (4.35)$$

$$\langle \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}} \rangle^{-1} = 1/\nu(k) + \frac{1}{\beta V} \sum_{\mathbf{p}} \Gamma(\mathbf{p} - \mathbf{k}|\mathbf{p}) G(p) G(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|). \quad (4.36)$$

Позначення очевидні: $G(p)$, $\langle \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}} \rangle$ і $\Gamma(\mathbf{p} - \mathbf{k}|\mathbf{p})$ одночастинкова функція Гріна, φ -корелятор і вершинна функція відповідно, у яких покладено всі частоти рівними нулеві. Система рівнянь знову непроста. Можливий спосіб розв'язання полягає у виборі певної підстановки для довгохвильових асимптотик (саме вони нас цікавлять) функцій $G(p)$ та $\langle \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}} \rangle$ і розрахунку вершини в заданому наближенні. Найпростіше наближення полягає в підсумовуванні членів ряду вершинної функції, що містять особливості типу RPA

$$\Gamma(\mathbf{p} - \mathbf{k}|\mathbf{p}) = 1/\{1 + \nu(0)\Pi(k)\}, \quad (4.37)$$

тут замість $\Pi(k) \equiv \Pi(\omega_n = 0, k)$ достатньо взяти тільки доданок з особливостями. Підставляючи цю формулу в рівняння (4.36), знаходимо φ -корелятор, і тоді для $G(p)$ отримуємо замкнене на себе рівняння

$$G^{-1}(p) = -\varepsilon_p + \frac{1}{\beta V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{\nu(k)}{1 + (\nu(k) + \nu(0))\Pi(k)} \times [G(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|) - G(k)], \quad (4.38)$$

де

$$\Pi(k) = \frac{1}{\beta V} \sum_{\mathbf{p}} G(p) G(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|), \quad (4.39)$$

і ми вже врахували, що в критичній точці перенормований хімічний потенціал дорівнює нулеві. Тепер достатньо вибрати лише головну асимптотику одночастинкової функції Гріна $G(p) \sim p^{\eta-2}$, розмірні константи неважливі, оскільки вони точно скорочуються в кінцевих виразах. Далі розрахунки прості — обчислюємо функцію

$$\Pi(k) \sim k^{2\eta-1} \pi(\eta), \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \pi(\eta) &= \frac{1}{\eta} \int_0^\infty dx x^{\eta-1} \{(x+1)^\eta - |x-1|^\eta\} \\ &= \frac{1}{2^{2\eta} \sqrt{\pi} \eta} \Gamma(\eta) \Gamma(1/2 - \eta) [1 - \cos(\pi\eta)], \end{aligned}$$

(тут $\Gamma(x)$ — гамма-функція) і підставляємо в рівняння (4.38), з якого знаходимо головну асимптотику при малих p . При цьому достатньо залишити в знаменнику під знаком суми тільки асимптотику при малих k , тобто $-2\nu(0)\Pi(k)$. Тоді рівняння (4.38) перетворюється в алгебраїчне

$$p^{2-\eta} = p^{2-\eta} g(\eta) / 2\pi(\eta) \implies g(\eta) = 2\pi(\eta), \quad (4.41)$$

де введено позначення

$$\begin{aligned} g(\eta) &= \int_0^\infty dx x^{2-2\eta} \left\{ \frac{1}{\eta} [(x+1)^\eta - |x-1|^\eta] - 2/x^{1-\eta} \right\} \\ &= \frac{2^{2(1-\eta)}}{\sqrt{\pi}} \frac{1-2\eta}{(2-\eta)(3-\eta)} \Gamma(\eta) \Gamma(1/2 - \eta) \cos(\pi\eta). \end{aligned}$$

Ще раз наголосимо, що розмірні константи біля відповідних функцій скорочуються, а рівняння на малий критичний індекс η і відповідно, головну довгохвильову асимптотику функції Гріна на нульовій частоті не залежить від потенціалу взаємодії, тільки важливо, щоб він не дорівнював нулеві. Тут ми лише знайшли головну асимптотику, наступні члени розкладу вже можуть залежати від особливостей потенціальної енергії взаємодії між частинками.

Єдиний розв'язок рівняння (4.41) для η дає значення 0.061, що майже вдвічі більше за значення малого критичного індексу $\eta_{MC} = 0.0381(2)$, отриманого за допомогою Monte-Carlo-симуляцій [15] для цього класу універсальності. Причини неузгодженості можуть бути як і в самому наближенні для вершини (4.37), так і у спрощеннях, до яких ми вдалися.

Для повноти опису в критичній області потрібно знайти, як мінімум, ще один критичний індекс. Практично виконати ці обчислення важко, оскільки потрібно знати частотну залежність одночастинкової функції Гріна. Розв'язок цієї задачі, а також точніший розрахунок малого критичного індексу, будуть опубліковані окремо.

V. ВИСНОВКИ

У межах наближення хаотичних фаз розглянуто властивості бозе-рідин вище від температури бозеконденсації. Зокрема докладно проаналізовано довгохвильову область спектра колективних збуджень доволі широкого класу систем з умовою $\nu(0) > 0$ на фур'є-образ потенціалу парної взаємодії між частинками. У загальному випадку знайдено вираз (3.31) для парного структурного фактора бозе-системи в RPA-наближенні, який вдається явно розрахувати для великих взаємодій або низьких температур. Також обчислено власноенергетичну частину одночастинкової функції Гріна і зроблено оцінку малого критичного індексу. У наступній статті за допомогою отриманих тут формул будуть проаналізовані властивості деяких модельних систем.

- [1] J. Bosse, T. Schlieter, in *Path Integrals: New Trends and Perspectives: Proceedings of the 9-th International Conference* (World Scientific Publishing Co., 2008).
- [2] A. Minguzzi, M. P. Tosi, *J. Phys.: Cond. Matt.* **9**, 10211 (1997).
- [3] S. S. Natu, E. J. Mueller, *Phys. Rev. A* **84**, 053625 (2011).
- [4] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1215 (2008).
- [5] K. Henderson *et al.*, *New J. Phys.* **11**, 043030 (2009).
- [6] В. Н. Попов, *Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике* (Москва, Атомиздат, 1976).
- [7] А. Н. Васильев, *Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике* (Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та, 1976).
- [8] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей* (Москва, Наука, 1978).
- [9] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике* (Москва, Физматгиз, 1962).
- [10] И. А. Вакарчук, препринт АН Украины ИТФ-81-31Р, Киев, 1981.
- [11] И. А. Вакарчук, Ю. К. Рудаковский, *Теор. мат. физ.* **49**, 234 (1981).
- [12] Д. Н. Зубарев, *Усп. физ. наук* **71**, 71 (1960).
- [13] S. R. Hore, N. E. Frankel, *Phys. Rev. B* **12**, 2619 (1975).
- [14] A. L. Fetter, J. D. Waleska, *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (McGraw-Hill, NY, 1971).
- [15] M. Campostrini *et al.*, *Phys. Rev. B* **74**, 144506 (2006).

RANDOM PHASE APPROXIMATION FOR BOSE SYSTEMS ABOVE THE TEMPERATURE OF PHASE TRANSITION

I. O. Vakarchuk, V. S. Pastukhov

*Ivan Franko National University of Lviv, Department for Theoretical Physics,
12, Drahomanov St., Lviv, UA-79005, Ukraine*

The theory of non-superfluid Bose-liquid is built. In the general case the properties of the spectrum of collective modes are analyzed. The most simple estimation for the critical exponent η is made.