

РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯНЬ ФАДДЕЄВА ДЛЯ ЗАДАЧІ pd -РОЗСІЯННЯ МЕТОДОМ K -ГАРМОНІЧНИХ РОЗКЛАДЕНЬ

В. І. Ковальчук

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
фізичний факультет, просп. акад. Глушкова, 2/1, Київ, 03127, Україна
(Отримано 14 вересня 2011 р.)*

Розвинуто метод розв'язку інтегральних рівнянь Фаддеєва в конфігураційному просторі для системи трьох нуклонів із урахуванням кулонової взаємодії. Метод використано для опису експериментальних кутових залежностей перерізів pd -розсіяння при допорогових енергіях падаючого протона.

Ключові слова: рівняння Фаддеєва, K -гармоніки, кулонова взаємодія.

PACS number(s): 03.65.Nk, 21.45.-v, 31.15.xj

I. ВСТУП

Тринуклонні системи займають особливе місце в нерелятивістській теорії розсіяння, оскільки вони є ключом до глибшого розуміння структури багатонуклонних ядер, процесів за їх участю та самої природи сильної взаємодії. На сьогодні є розвинуті методи досліджень таких систем, найвідомішими з яких є метод Фаддеєва [1–4] та варіаційний метод Кона–Хюльгена з використанням розкладень за корельованим гіперсферичним базисом [5–7]. Обидва підходи, як впливає з тестових розрахунків [8,9], дають дуже близькі результати при описі зв'язаних тринуклонних станів й експериментів з Nd -розсіяння. Істотним недоліком оригінальної схеми Фаддеєва була неможливість безпосередньо використати в рівняннях потенціалу Кулона через виникаючі сингулярності в ядрах інтегральних рівнянь. Перша спроба модифікувати рівняння Фаддеєва для розв'язку тринуклонних задач за участю кулонової взаємодії (КВ) була зроблена в праці Нобла [10], де КВ включали до незбуреної функції Гріна. Проте інтегральні рівняння Нобла не можна було безпосередньо використовувати в розрахунках, оскільки аналітичні вирази ядер цих рівнянь невідомі. Ці труднощі зникали при переході до диференціальної форми рівнянь Фаддеєва, що й було реалізовано в роботі [11]. Згодом виникли інші вдалі підходи, що давали змогу розв'язувати тринуклонні задачі за участю КВ в межах формалізму Фаддеєва: ітеративний метод неперервних дробів [12–14] та метод рівнянь у частинних похідних [15–17] в конфігураційному просторі, екранування кулонового потенціалу та перенормування інтегральних рівнянь в імпульсному представленні [2,18–20]. Ця праця присвячена розв'язку інтегральних рівнянь Фаддеєва в конфігураційному просторі з урахуванням КВ методом K -гармонічних розкладень, вона є логічним продовженням циклу наших робіт із дослідження тринуклонних систем, початок якому покладено в [21].

Структура статті така. У розділі II викладено загальний формалізм побудови основних рівнянь мето-

ду. У розділі III розглянуто частковий випадок — задачу про розсіяння низькоенергетичних протонів дейтронами. Обґрунтовано зроблені наближення та описано алгоритм одержання коефіцієнтів розкладу хвильової функції в області ядерно-кулонової взаємодії й фаз розсіяння. У розділі IV досліджено збіжність розв'язків рівнянь від радіуса екранування. Наведено отримані величини фаз та проаналізовано розраховані кутові залежності перерізів pd -розсіяння, які порівнюються з відповідними експериментальними даними. Нарешті, у розділі V обговорено перспективи запропонованого методу та коротко підведено підсумки виконаної роботи.

II. ФОРМАЛІЗМ

Усі викладені нижче розрахунки виконано в системі центра мас (якщо не обумовлено інакше) та з використанням системи одиниць $\hbar = c = 1$.

Рівняння Фаддеєва [1] для системи трьох частинок, у якій частинка 1 розсіюється на частинках 2 і 3, що перебувають у зв'язаному стані, мають вигляд

$$\begin{aligned}\Psi^{(1)} &= \Phi + G_0(Z)T_{23}(Z)(\Psi^{(2)} + \Psi^{(3)}); \\ \Psi^{(2)} &= G_0(Z)T_{31}(Z)(\Psi^{(3)} + \Psi^{(1)}); \\ \Psi^{(3)} &= G_0(Z)T_{12}(Z)(\Psi^{(1)} + \Psi^{(2)}),\end{aligned}\quad (1)$$

де $\Psi^{(1,2,3)}$ — одночастинкові хвильові функції, сума яких є повною хвильовою функцією системи

$$\Psi = \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)} + \Psi^{(3)}, \quad (2)$$

Φ — асимптотична хвильова функція, що описує інфінітний рух 1-ої частинки щодо центра мас зв'язаної пари (23); $G_0(Z) = (Z - H_0)^{-1}$ — оператор Гріна; $Z = E \pm i0$; E — повна енергія системи 1+(23); H_0 — оператор кінетичної енергії; T_{ij} — двочастинкові оператори переходу, які зв'язані з парними потенціалами V_{ij} ($ij = 12, 23, 31$) за допомогою співвідношень

$$T_{ij}(Z) = V_{ij} + V_{ij}G_0(Z)T_{ij}(Z). \quad (3)$$

Підставимо (3) в (1) та додамо одержані рівняння:

$$\Psi = \Phi + G_0(Z)(U\Psi - V_{23}\Phi), \quad U = V_{12} + V_{23} + V_{31}. \quad (4)$$

Зауважимо, що три зв'язані рівняння Фаддєєва (1) однозначно визначають три фаддєєвські компоненти Ψ^j ($j = 1, 2, 3$), а сума цих рівнянь з використанням зв'язку двочастинкових операторів переходу із парними потенціалами (3) — одержане рівняння (4), таким чином, однозначно визначає шукану повну хвильову функцію системи (2). При отриманні рівняння (4) з вихідних рівнянь Фаддєєва використовували лише операції додавання операторів (не було дії ділення на оператори), тому якщо рівняння Фаддєєва мають однозначний розв'язок (а це вважається їхньою головною перевагою, порівняно з тричастинковим рівнянням Шредінгера та Ліппмана–Швінгера), то це ж саме можна сказати і про рівняння (4). У роботі [22] ми продемонстрували однозначність розв'язків рівняння (4) як для зв'язаного стану тритона, так і для неперервного спектра (nd -розсіяння).

Перепишімо (4) так:

$$\Psi - \Phi = G_0(Z)U(\Psi - \Phi) + G_0(Z)(V_{12} + V_{31})\Phi \quad (5)$$

і розкладемо різницю $\Psi - \Phi$ в ряд за K -гармоніками

$$\Psi - \Phi = \sum_{Kn} \psi_{Kn}(\rho) u_{Kn}(\Omega). \quad (6)$$

Підставляючи розклад (6) у (5) та використовуючи умови ортонормування й повноти для власних функцій радіальної частини оператора H_0 [21], а також умову ортонормування для K -гармонік, одержимо систему одновимірних інтегральних рівнянь для коефіцієнтів розкладу:

$$\psi_{Kn}(\rho) = f_{Kn}(\rho) + \lambda \sum_{K'n'} R_{KK'}^{nn'}(\rho, \bar{\rho}) \psi_{K'n'}(\bar{\rho}), \quad (7)$$

де

$$f_{Kn}(\rho) = \int d\bar{\rho} Q_K(\rho, \bar{\rho}) W_{Kn}(\bar{\rho}), \quad (8)$$

$$R_{KK'}^{nn'}(\rho, \bar{\rho}) = \int d\bar{\rho} Q_K(\rho, \bar{\rho}) U_{KK'}^{nn'}(\bar{\rho}) \quad (9)$$

— інтегральний оператор. Константа λ в (7) містить у собі чисельні коефіцієнти та нуклонну масу m . Функції Q , W і U , що стоять під знаком інтеграла у (8), (9), мають такий вигляд:

$$Q_K(\rho, \bar{\rho}) = -(\bar{\rho}^3/\rho^2) \left\{ I_2(\rho \xi_K(\rho)) K_2(\bar{\rho} \xi_K(\rho)) \Theta(\bar{\rho} - \rho) + I_2(\bar{\rho} \xi_K(\rho)) K_2(\rho \xi_K(\rho)) \Theta(\rho - \bar{\rho}) \right\}, \quad (10)$$

де

$$\xi_K(\rho) = \sqrt{K(K+4)/\rho^2 - 2mE}, \quad E = E_i - \epsilon; \quad (11)$$

$$W_{Kn}(\bar{\rho}) = \int d\Omega u_{Kn}^*(\Omega) (V_{12}(\bar{\rho}, \Omega) + V_{31}(\bar{\rho}, \Omega)) \Phi(\bar{\rho}, \Omega), \quad (12)$$

$$U_{KK'}^{nn'}(\bar{\rho}) = \int d\Omega u_{Kn}^*(\Omega) U(\bar{\rho}, \Omega) u_{K'n'}(\Omega). \quad (13)$$

Величини I_2 , K_2 в (10) є модифікованими функціями Бесселя, а E_i і ϵ в (11) — енергія падаючої частинки та енергія зв'язаного стану в системі трьох частинок ($\epsilon > 0$) відповідно. Рівняння (7) мають найзагальніший вигляд і можуть бути розв'язані звичайними чисельними методами для довільного набору K -гармонік.

Принцип побудови рівнянь (7) легко узагальнити також і для залежності хвильової функції Ψ від спіну та ізоспіну нуклонів. У цьому випадку різниця $\Psi - \Phi$ розкладається за базисними антисиметричними станами

$$\Psi - \Phi = \sum_{Kn} \psi_{Kn}(\rho) \Gamma_{Kn}(\Omega; \sigma, \tau). \quad (14)$$

Стани Γ_{Kn} будуються з гіперсферичних функцій $u_{Kn}^{[g]}(\Omega)$ із певним типом переставної симетрії $[g]: [a], [s], [l], [m]$ (відповідно антисиметричним, симетричним та змішаної симетрії) і спін-ізоспінних функцій $\xi_n^{[\bar{g}]}(\sigma, \tau)$ зі спряженою симетрією $[\bar{g}]: [s], [a], [m], [l]$. Так, для системи трьох нуклонів, які перебувають у зв'язаному стані ($S = 1/2, T = 1/2$), Γ_{Kn} матиме вигляд [23, 24]

$$\Gamma_{Kn} = u_{Kn}^{[a]} \xi^{[s]} - u_{Kn}^{[s]} \xi^{[a]} + u_{Kn}^{[l]} \xi^{[m]} - u_{Kn}^{[m]} \xi^{[l]}. \quad (15)$$

Якщо ж, наприклад, система перебуває в стані з $S = 3/2, T = 1/2$ (квартетне Nd -розсіяння), то

$$\Gamma_{Kn} = u_{Kn}^{[l]} \xi^{[m]} - u_{Kn}^{[m]} \xi^{[l]}. \quad (16)$$

Методика одержання рівнянь для радіальних компонент $\psi_{Kn}(\rho)$ в цьому випадку аналогічна викладеній вище, але з використанням додаткового співвідношення ортогональності для $\xi_n(\sigma, \tau)$

$$\sum_{\sigma\tau} \xi^{[g] \dagger} \xi^{[g']} = \delta_{gg'}. \quad (17)$$

При цьому, звичайно, необхідно ще врахувати, що парний потенціал міститиме матриці Паулі та спін-ізоспінні проекційні оператори.

III. НЕПЕРЕРВНИЙ СПЕКТР: pd -РОЗСІЯННЯ

Не обмежуючи загальності, розглянемо спершу випадок nd -розсіяння. Уважатимемо також, що розсіяння відбувається у квартетному стані (ми не брали до уваги випадку $S = 1/2, T = 1/2$, оскільки з даних фазового аналізу [25, 26] випливає, що внесок дублетної компоненти в переріз становить близько 1%).

У розрахунках при використанні розкладу (7) ми обмежилися доданками з $K = 0, 1, 2$, так що система (7) міститиме 27 K -гармонік $u_{Kn}(\Omega) \equiv u_K^{\ell_x \ell_y LM}(\Omega)$

[27], де ℓ_x — орбітальний момент зв'язаної пари частинок, який відповідає координаті Якобі $\mathbf{x} = \sqrt{1/2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)$, ℓ_y — орбітальний момент першої частинки щодо центра мас пари, що відповідає координаті Якобі $\mathbf{y} = \sqrt{2/3}(\mathbf{r}_1 - (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)/2)$, L — повний орбітальний момент, M — його проекція.

Для задач розсіяння система (7) в цілому буде неоднорідною, оскільки початкова умова $\Phi \neq 0$. Проте деякі рівняння, що входять до (7), виявляються однорідними: $W_{Kn} = 0$ внаслідок властивостей функцій u_{Kn} . Через основну теорему Фредгольма [28] ці рівняння мають тільки тривіальні розв'язки, оскільки для неперервного спектра неможливо забезпечити виводженість матриць відповідних інтегральних операторів (що, до речі, підтверджується також і безпосередніми розрахунками). Неоднорідні рівняння, які залишилися, відповідають функціям u_0^{0000} , u_1^{0110} , u_2^{0000} , u_2^{2020} та u_2^{0220} . Легко бачити, що набори їхніх квантових чисел $\{\ell_x \ell_y LM\}$ являють собою можливі стани при розсіянні в системі трьох частинок: $\ell_x = 0, 2$ відповідають зв'язаному стану підсистеми (23) — дейтрона, $\ell_y = 0, 1, 2$ — орбітальний момент частинки 1 щодо центра мас пари (23), $L = 0, 2$ — повний орбітальний момент із нульовою проекцією M (значення $M \neq 0$ приводять до $W_{Kn} = 0$ і роблять відповідні рівняння (7) однорідними).

Нехтуючи спін-орбітальною та тензорною компонентами нуклон-нуклонної (NN) взаємодії, уведемо центрально-симетричний парний потенціал

$$V_{ij} = \sum_{st} V^{(2s+1, 2t+1)}(r_{ij}) P_{ij}^{(2s+1, 2t+1)}(\sigma, \tau), \quad (18)$$

де s і t — можливі значення сумарного спіну та ізоспіну i -го і j -го нуклонів, $P_{ij}^{(2s+1, 2t+1)}(\sigma, \tau)$ — оператор проєкціонування в спін-ізоспінний стан із мультиплетністю $(2s+1, 2t+1)$. Розкладаючи різницю $\Psi - \Phi$ за антисиметричними станами (16) та обчислюючи матричні елементи від гіперсферичних та спінізоспінних функцій з урахуванням (17), (18), одержимо п'ять рівнянь типу (7) для функцій ψ_0^{0000} , ψ_1^{0110} , ψ_2^{0000} , ψ_2^{2020} та ψ_2^{0220} . Вигляд рівнянь (8)–(13) при цьому залишається незмінним, але $V_{ij} = V^{(3,1)}(r_{i,j})$ в (12), (13). У принципі, цього вже досить, щоб обчислювати квартетні фази розсіяння ${}^4\delta_\ell$ нейтронів дейтронами (з $\ell \equiv \ell_y = 0, 1, 2$) та відповідні перерізи, що й було реалізовано в роботі [22].

Для того, щоб обчислювати функції ψ_{Kn} з урахуванням КВ, введемо екранований кулоновий потенціал

$$V_C^\epsilon(r) = \frac{\alpha e^{-r/R}}{r}, \quad (19)$$

де α — стала тонкої структури, R — радіус екранування. Ця процедура стандартна й досить широко використовується в подібних задачах. Позначмо заряджені частинки індексами 1, 2 і введемо потенціал (19) у (12), (13): $V_{12} \rightarrow V_{12} + V_C^\epsilon$. Обчислюючи далі функції ψ_{Kn} з різними R , можна в такий спосіб дослідити збіжність розв'язків.

IV. РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЕНЬ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ

У розрахунках використовували локальні NN потенціали Малфлі–Тіона (MT-III) [29]

$$V(r) = (1438.72 e^{-3.11r} - 626.885 e^{-1.55r})/r \quad (20)$$

та Волкова [30]

$$V(r) = 144.86 e^{-(r/0.82)^2} - 83.34 e^{-(r/1.6)^2}. \quad (21)$$

В (11) слід покласти $\epsilon = \epsilon_d$, де $\epsilon_d = 2.226$ MeV — енергія зв'язку дейтрона. Як дейтронну хвильову функцію $\phi_d(\mathbf{x})$, що входить до $\Phi \equiv \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \phi_d(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{y})$ (\mathbf{x}, \mathbf{y} — координати Якобі, \mathbf{k} — імпульс протона), ми використали хвильову функцію Хюльгена

$$\phi_d(\mathbf{x}) \equiv \phi_d(x) = \sqrt{\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{2\pi(\beta-\alpha)^2}} \times \frac{\exp(-\alpha x) - \exp(-\beta x)}{x}, \quad (22)$$

де $\alpha = \sqrt{m\epsilon_d}$, $\beta \simeq 7\alpha$ [23].

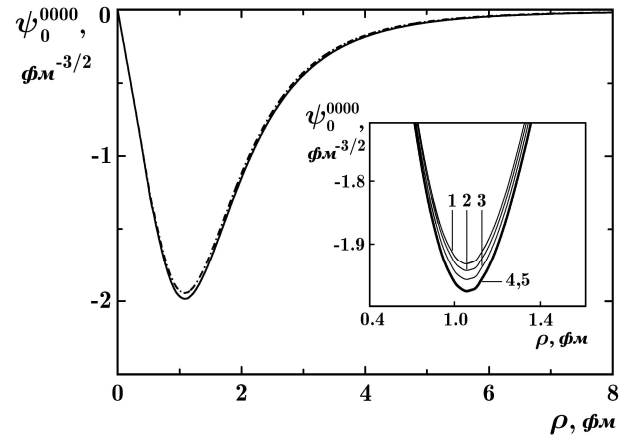


Рис. 1. Розраховані з використанням потенціалу MT-III залежності $\psi_0^{0000}(\rho)$ для енергії падаючих протонів $E_i^{\text{lab}} = 2.5$ MeV: без урахування КВ (штрихпунктирна крива) і з урахуванням КВ (суцільна крива, радіус екранування $R = 100$ фм). На вставці показано збільшений масштаб околу мінімуму обчислених функцій з різними R : 1 — 1 фм, 2 — 2 фм, 3 — 10 фм, 4 — 20 фм, 5 — 100 фм.

На рис. 1, як приклад, зображено сімейство обчислених залежностей $\psi_0^{0000}(\rho)$ з радіусами екранування $R = 1, 2, 10, 20, 100$ фм для потенціалу (20) та енергії протонів $E_i^{\text{lab}} = 2.5$ MeV. Решта розрахованих функцій (ψ_1^{0110} , ψ_2^{0000} , ψ_2^{2020} , ψ_2^{0220}) має такий самий характер збіжності, як і на рис. 1: розв'язки рівнянь (7) збігаються з розв'язком з $R = 100$ фм (на рисунку видно, що розв'язки з $R = 20$ фм та $R = 100$ фм майже збігаються: така поведінка характерна також і для

розв'язків із використанням потенціалу Волкова). Отже, можна вважати, що використання в розрахунках потенціалу (19) з $R = 100$ фм відповідає врахуванню КВ для цієї задачі розсіяння. Із дослідження збіжності розв'язків ψ_{Kn} для енергії протонів $E_i^{\text{lab}} = 3$ МеВ також випливає, що розв'язки збігаються до ψ_{Kn} з $R = 100$ фм. Зауважимо, що в [2], де розв'язували рівняння Фаддєєва в імпульсному представленні для аналогічної задачі при допорогових енергіях протона, встановлено, що розраховані величини фаз розсіяння відрізняються не більше ніж на 1% при зміні радіуса екранування в межах від 100 до 2000 фм. У роботі [20] при обчисленні перерізів pd -розсіяння (при $E_i^{\text{lab}} = 10$ МеВ) із використанням рівняння Лішмана–Швінгера та сепарабельного паризького потенціалу PEST 1-6 радіус екранування також становив 100 фм, збільшуючись до 300 фм при обчисленні поляризаційних характеристик.

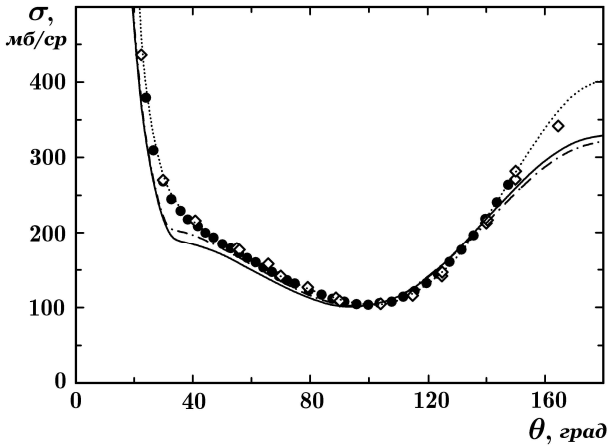


Рис. 2. Диференціальні перерізи pd -розсіяння, розраховані для потенціалів МТ-ІІІ (суцільна крива) і Волкова (штрихпунктирна крива) при енергії падаючих протонів $E_i^{\text{lab}} = 2.5$ МеВ. Експериментальні дані взято з праць [33] (•), [34] (◊). Точкова крива — із праці [6].

Для того, щоб обчислити фази pd -розсіяння, запишімо хвильову функцію задачі у вигляді

$$\Psi = \Psi_{pd} + \Psi_A, \quad \Psi_{pd} = \sum_{Kn} \phi_{Kn}(\rho) u_{Kn}(\Omega), \quad (23)$$

де Ψ_{pd} — розв'язок рівнянь Фаддєєва в області ядерно-кулонової взаємодії, Ψ_A — розв'язок рівняння Шредингера в асимптотичній області для двочастинкової задачі розсіяння протона на точковому дейтроні. Розкладімо Ψ_A в ряд за сферичними функціями [31]

$$\Psi_A(\mathbf{y}) = \sum_{\ell m} \psi_{\ell,k}(y) Y_{\ell m}^*(\mathbf{k}/k) Y_{\ell m}(\mathbf{y}/y), \quad (24)$$

де $\psi_{\ell,k}$ — парціальна компонента, яка описує стан з орбітальним моментом ℓ :

$$\psi_{\ell,k}(y) \simeq F_{\ell}(ky) + (-1)^{\ell+1} \text{tg } \delta_{\ell} G_{\ell}(ky). \quad (25)$$

Тут $F_{\ell}(kr)$, $G_{\ell}(kr)$ — регулярна та нерегулярна кулонові функції, δ_{ℓ} — фаза розсіяння, яку можна визначити з умови зшивання розв'язку в асимптотичній

області з відповідним розв'язком в області взаємодії (див. таблицю 1). В останній колонці табл. 1 наведені також величини кватерних фаз розсіяння, що одержані іншими методами для аналогічної задачі.

$E_i^{\text{lab}}, \text{MeV}$	ℓ	Потенціали та значення фаз		Дані інших авторів
		(20)	(21)	
2.5	0	-58.9	-62.1	-58.5 [6]
	1	23.6	24.2	21.8 [6]
	2	-1.75	-2.37	-3.10 [6]
3	0	-66.8	-68.5	-63.4 [32]
	1	27.4	27.8	23.4 [32]
	2	-2.68	-2.42	-3.74 [32]

Таблиця 1. Величини фаз pd -розсіяння (у градусах).

На рис. 2, 3 зображені кутові залежності перерізів pd -розсіяння, розраховані за формулою [31]

$$\sigma(\theta) = \frac{2}{3} |A_R(\theta) + A(\theta)|^2, \quad (26)$$

де θ — кут розсіяння, A_R — резерфордівська амплітуда

$$A_R(\theta) = -\frac{\eta \Gamma(1+i\eta) \exp(-2i \ln(\sin(\theta/2)))}{2k \Gamma(1-i\eta) \sin^2(\theta/2)}, \quad (27)$$

$\eta = 2\alpha m / (3k)$ — параметр Зоммерфельда,

$$A(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^2 (2\ell+1) \exp(i(2\omega_{\ell} + \delta_{\ell})) \sin \delta_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), \quad (28)$$

$\omega_{\ell} = \arg(\Gamma(\ell+1+i\eta))$ — кулонова фаза.

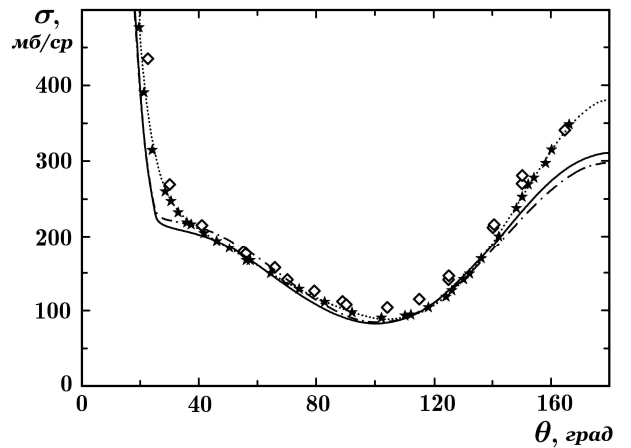


Рис. 3. Те ж саме, що й на рис. 2, але для $E_i^{\text{lab}} = 3$ МеВ. Експериментальні дані — із праць [34] (◊), [35] (★).

З аналізу поведінки кривих, зображених на рис. 2, 3, випливає, що, порівняно з потенціалом Волкова, використання в розрахунках потенціалу МТ-III дещо зменшує величину обчислених перерізів у передній напівсфері (діапазон кутів розсіяння $\simeq 30^\circ \div 80^\circ$) і трохи збільшує їх у задній ($\theta \simeq 140^\circ \div 180^\circ$). Невеличка “поличка” розрахованих кривих в околі $\theta \simeq 30^\circ \div 40^\circ$ — результат використання наближення (26): якщо ми обчислюємо перерізи за формулою (26), то нехтуємо при цьому певною невеликою областю кутів, у якій, строго кажучи, повна амплітуда не дорівнює просто сумі A_R і A [36].

Точкові криві на рис. 2, 3 — результат роботи пізанської групи [6], у якій також проаналізовано дані експериментів [33–35] у межах варіаційного методу Кона–Хюльтена з використанням розкладів за скорельованим гіперсферичним базисом. Розрахунки в [6] виконано з використанням реалістичного NN потенціалу AV18 та тричастинкових сил Urbana IX із залученням 44 фаз і параметрів змішування.

Узгодження з експериментами можна було б дещо поліпшити, якщо додатково врахувати дублетну компоненту амплітуди: як показано в [37], це приводить до певного збільшення значень $\sigma(\theta)$ в області малих та великих кутів розсіяння.

V. ВИСНОВКИ

Вивчення процесів розсіяння в системах, що складаються з трьох сильновзаємодіючих частинок, давно є об'єктом посиленого інтересу дослідників, але, як справедливо відзначено в праці [5], лише в першій половині 90-х років минулого сторіччя вдалося розвинути методи, які дали змогу виконувати точні розрахунки спостережуваних величин у $3N$ -реакціях. Такими методами справедливо вважають метод рівнянь Фаддеєва і метод K -гармонік — одні з найбільш відомих й ефективних підходів у дослідженні $3N$ -систем. Проте при безпосередньому описі станів неперервного

спектра обидва підходи призводять до чималих чисельних труднощів. Так, використання методу рівнянь Фаддеєва в імпульсному представленні вимагає чисельного розв'язку системи зв'язаних двовимірних інтегральних рівнянь, а в методі гіперсферичних гармонік при описі вільного руху нуклона щодо дейтрона потрібно враховувати майже весь ряд за K -гармоніками. Ми поєднали в цій роботі обидва підходи, а саме — використали для знаходження розв'язку рівнянь Фаддеєва в конфігураційному просторі метод розкладу хвильової функції в області взаємодії за гіперсферичними гармоніками. Запропонований підхід, на наш погляд, є швидшим та ефективнішим, оскільки безпосередньо використовує геометрію задачі, одразу представляючи розв'язок рівнянь Фаддеєва у вигляді ряду за власними функціями шестивимірного оператора Лапласа (K -гармоніками). У результаті задача про знаходження фаз розсіяння зводиться до розв'язку системи одновимірних інтегральних рівнянь.

Цей метод можна використати також і для опису експериментів із розсіяння зарядженої частинки з енергією вище від порога на двох інших, які перебувають у зв'язаному стані, оскільки головною перевагою інтегральних рівнянь Фаддеєва є єдиність та існування розв'язку при довільних енергіях розсіяння [11]. Звичайно, зі збільшенням енергії падаючої частинки виникає потреба враховувати більшу кількість доданків у розкладі (6), ніж $K=0, 1, 2$.

Розвинутий підхід до розв'язання рівнянь Фаддеєва з урахуванням КВ, на нашу думку, перспективний, оскільки дає змогу вивчати також інші тричастинкові системи (${}^6\text{Li}$, αd -розсіяння тощо), якщо відомий парний потенціал взаємодії. Метод можна узагальнити і на системи з числом частинок, більшим від 3 [38]. У такому випадку швидкодія запропонованого підходу може виявитися вирішальною, порівняно з традиційним методом (хоча використання останнього в тринуклонних задачах і не являє собою серйозної проблеми для сучасної комп'ютерної техніки).

-
- [1] Л. Д. Фаддеев, Журн. эксп. теор. физ. **39**, 1459 (1960).
 [2] G. H. Berthold, H. Zankel, Phys. Rev. C **34**, 1203 (1986).
 [3] H. Liu, Ch. Elster, W. Glöckle, Phys. Rev. C **72**, 054003 (2005).
 [4] H. Witała, W. Glöckle, Eur. Phys. Journ. A **37**, 87 (2008).
 [5] A. Kievsky, M. Viviani, S. Rosati, Nucl. Phys. A **577**, 511 (1994).
 [6] A. Kievsky, S. Rosati, W. Tornow, M. Viviani, Nucl. Phys. A **607** 402 (1996).
 [7] A. Kievsky, Nucl. Phys. A **624** 125 (1997).
 [8] A. Kievsky *et al.*, Phys. Rev. C **58**, 3085 (1998).
 [9] A. Deltuva *et al.*, Phys. Rev. C **71**, 064003 (2005).
 [10] J. V. Noble, Phys. Rev. **161**, 945 (1967).
 [11] Ю. А. Куперин, С. П. Меркурьев, А. А. Квицинский, Яд. физ. **37**, 1440 (1983).
 [12] T. Sasakawa, T. Sawada, Phys. Rev. C **20**, 1954 (1979).
 [13] Y. Wu, S. Ishikawa, T. Sasakawa, Phys. Rev. Lett. **64**, 1875 (1990).
 [14] Y. Wu, S. Ishikawa, T. Sasakawa, Few-Body Syst. **15**, 145 (1993).
 [15] C. R. Chen, G. L. Payne, J. L. Friar, B. F. Gibson, Phys. Rev. C **39**, 1261 (1989).
 [16] J. L. Friar, G. L. Payne, *In: Coulomb Interactions in Nuclear and Atomic Few-Body Collisions* (New York and London, Plenum Press, 1996).
 [17] C. R. Chen, J. L. Friar, G. L. Payne, Few-Body Syst. **31**, 13 (2001).
 [18] G. H. Berthold, H. Zankel, L. Mathelitsch, H. Carcilazo, Nuovo Cimento A **93**, 89 (1986).
 [19] G. H. Berthold, A. Stadler, H. Zankel, Phys. Rev. C **41**, 1365 (1990).
 [20] E. O. Alt, A. M. Mukhamedzhanov, A. I. Sattarov, Phys. Rev. Lett. **81**, 4820 (1998).

- [21] О. Г. Ситенко, В. К. Тартаковський, І. В. Козловський, Укр. фіз. журн. **46**, 1251 (2001).
- [22] В. І. Ковальчук, І. В. Козловський, В. К. Тартаковський, Яд. фіз. **74**, 720 (2011).
- [23] О. Г. Ситенко, В. К. Тартаковський, *Теорія ядра* (Київ, Либідь, 2000).
- [24] М. І. Мухтарова, Яд. фіз. **49**, 338 (1989).
- [25] R. K. Adair, A. Okazaki, M. Walt, Phys. Rev. **89**, 1165 (1953).
- [26] A. J. Elwyn, R. O. Lane, A. Langsdorf, Jr., Phys. Rev. **128**, 779 (1962).
- [27] Р. І. Джибути, Н. Б. Крупенникова, *Метод гиперсферических функций в квантовой механике нескольких тел* (Мецниереба, Тбилиси, 1984).
- [28] А. Д. Полянин, А. В. Манжиров, *Справочник по интегральным уравнениям* (Физматлит, Москва, 2003).
- [29] R. A. Malfliet, J. A. Tjon, Nucl. Phys. A **127**, 161 (1969).
- [30] A. B. Volkov, Nucl. Phys. A **74**, 33 (1965).
- [31] Н. Ф. Мотт, Г. Месси, *Теория атомных столкновений* (Мир, Москва, 1969).
- [32] L. D. Knutson, L. O. Lamm, J. E. McAninch, Phys. Rev. Lett. **71**, 3762 (1993).
- [33] S. Shimuzu *et al.*, Phys. Rev. C. **52**, 1193 (1995).
- [34] R. Sherr *et al.*, Phys. Rev. **72**, 662 (1947).
- [35] D. C. Kocher, T. B. Clegg, Nucl. Phys. A **132**, 455 (1969).
- [36] В. І. Ковальчук, В. К. Тартаковський, Журн. фіз. до-сл. **12**, 1201 (2008).
- [37] E. O. Alt, B. L. G. Bakker, Z. Phys. A **273**, 37 (1975).
- [38] Р. І. Джибути, К. В. Шитикова, Физ. элемент. частиц атом. ядра **20**, 331 (1989).

SOLUTION OF FADDEEV EQUATIONS FOR THE pd -SCATTERING PROBLEM USING THE K -HARMONIC EXPANSION METHOD

V. I. Kovalchuk

*Taras Shevchenko National University of Kyiv, Physics Department,
prosp. akad. Glushkova, 2/1, Kyiv, UA-03127, Ukraine*

The method of the solution of Faddeev integral equations in configuration space when the Coulomb interaction is included has been developed for the three-nucleon system. The method was used for the description of experimental angular dependencies of pd -scattering cross-sections below the deuteron break-up threshold.