

## ВЗАЄМОДІЇ ЧАСТИНОК, ПРИСКОРЕНИХ У ЗАЛИШКАХ НАДНОВИХ ЗІР. ПРОЦЕСИ ГАММА-ВИПРОМІНЮВАННЯ

О. Петрук, В. Бешлей

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача,  
вул. Наукова, 3б, 79060, Львів*

(Отримано 30 серпня 2012 р.; в остаточному вигляді — 13 лютого 2013 р.)

Подано систематичний огляд основних процесів та методів розрахунку гамма-випромінювання заряджених частинок високої енергії в залишках наднових зір, а саме: обернений Комптон-ефект, нетеплове гальмівне випромінювання електронів та випромінювання внаслідок непружних протон-протонних зіткнень.

**Ключові слова:** гамма-випромінювання, залишки наднових зір.

PACS number(s): 95.30.Gv, 98.38.Mz, 95.85.Pw

### ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b>	<b>1</b>
<b>I Обернений Комптон-ефект</b>	<b>2</b>
A Взаємодія електрона з моноенергетичними фотонами поля . . . . .	3
B Розрахунок гамма-випромінювання. Підхід А: фіксований спектр електронів . . . . .	4
C Розрахунок гамма-випромінювання. Підхід Б: планківський спектр фонових фотонів . . . . .	4
D Наближення “ $\delta$ -функції” для оберненого Комптон-ефекту . . . . .	6
1 Границя Томсона . . . . .	6
E Енергетичні втрати електронів унаслідок оберненого Комптон-ефекту . . . . .	7
<b>II Нетеплове гальмівне випромінювання</b>	<b>7</b>
A Електрон-електронне гальмівне випромінювання . . . . .	8
B Електрон-протонне гальмівне випромінювання . . . . .	11
C Енергетичні втрати електронів унаслідок гальмівного випромінювання . . . . .	14
D Значущість ( $ee$ ) та ( $ep$ ) внесків у гальмівне випромінювання . . . . .	15
<b>III Адронне гамма-випромінювання</b>	<b>16</b>
A Переріз утворення нейтральних піонів унаслідок $pp$ -зіткнень . . . . .	16
B Спектр нейтральних піонів . . . . .	17
C Розрахунок гамма-випромінювання. Підхід А: наближення спектра піонів $\delta$ -функцією . . . . .	18
D Розрахунок гамма-випромінювання. Підхід Б: докладніший опис спектра піонів . . . . .	19
E Енергетичні втрати протонів унаслідок непружних зіткнень . . . . .	22

### ВСТУП

Протягом останніх десяти років значного розвитку досягли методи астрономічних спостережень високоенергетичного (рентгенівського та гамма-) випромінювання. Тепер дані супутників та наземних експериментів астрофізики високих енергій дають змогу тестувати теорії прискорення елементарних частинок в околі ударних хвиль.

Нетепловий компонент рентгенівського випромінювання залишків наднових зір є наслідком синхротронного випромінювання релятивістських електронів, прискорених на фронтах ударних хвиль у цих об'єктах до енергій  $\sim 30 \div 300$  TeV. Електрони з такими енергіями повинні випромінювати також в гамма-діапазоні шляхом оберненого ефекта Комптона та нетеплового гальмівного випромінювання. Гамма-фотони виникають і під час розпадів піонів, породжених зіткненнями релятивістських протонів із протонами нижчих енергій. Виявлення такого випромінювання — єдиний спосіб отримати експериментальні підтвердження про прискорення протонів сильними нерелятивістськими хвилями в астрофізичних об'єктах.

Залишки наднових зір є одними з пріоритетних об'єктів спостережень орбітальною гамма-обсерваторією імені Фермі, яка реєструє кванти з енергіями  $\sim 0.1$ – $100$  GeV, як також і наземними експериментами зі спостереження черенковського випромінювання атмосфери від гамма-фотонів з енергіями в діапазоні  $\sim 0.1$ – $100$  TeV (H.E.S.S., MAGIC, VERITAS та ін.). Гамма-випромінювання виявлено в кількох десятках ЗН із близько трьохсот галактичних ЗН. Із 2004 року надзорствке гамма-випромінювання зафіксовано від двох десятків залишків. Запущена 2008 року орбітальна гамма-обсерваторія імені Фермі зареєструвала гамма-випромінювання від низки залишків. Перша карта ЗН у гамма-променях, одержана 2004 року системою черенковських гамма-телескопів H.E.S.S., започаткувала зображувальну гамма-астрономію; відтоді отримано карти ще декількох залишків наднових зір.

Сучасні спостережувані дані мають суттєвою спектральною та просторовою деталізацією. Тому слід використовувати детальні підходи до моделювання випромінювання. Слід відзначити, однак, що застосування точного формалізму до процесів гамма-випромінювання в астрофізичних джерелах потребує в багатьох випадках суттєвих комп'ютерних ресурсів, оскільки вимагає обчислення складних багатократних інтегралів. Тому моделювання призводить до винятково довгих обчислень навіть на сучасних клас-

терах. У такій ситуації в пригоді стають аналітичні наближення.

У запропонованому огляді подано систематичний виклад процесів гамма-випромінювання високоенергетичних електронів і протонів, методів їх точного розрахунку та відповідних наближень. Описані підходи, окрім залишків наднових зір, можна застосовувати також для моделювання інших астрономічних об'єктів, у яких заряджені елементарні частинки набувають релятивістських енергій, таких, як туманності пульсарного вітру, активні ядра галактик тощо.

Маси спокою, тривалість життя деяких частинок і значення низки сталих, які використовуємо далі, наведені в табл. 1.

$c$	$2.9979 \times 10^{10}$ см/с
$e$	$4.8032 \times 10^{-10}$ од. заряду СГСЕ
$r_o = e^2/m_e c^2$	$2.8179 \times 10^{-13}$ см
$\alpha = e^2/\hbar c$	1/137.037
$\sigma_T = 8\pi r_o^2/3$	$6.6524 \times 10^{-25}$ см <sup>2</sup>
$m_p$	938.28 MeV/c <sup>2</sup>
$m_{e\pm}$	0.51100 MeV/c <sup>2</sup>
$m_{\pi^0}$	134.98 MeV/c <sup>2</sup>
$t_{\pi^0}$	$8.4 \cdot 10^{-17}$
$m_{\pi\pm}$	139.57 MeV/c <sup>2</sup>
$t_{\pi\pm}$	$2.603 \cdot 10^{-8}$
$m_{\mu\pm}$	105.66 MeV/c <sup>2</sup>
$t_{\mu\pm}$	$2.197 \cdot 10^{-6}$
$m_\eta$	547.85 MeV/c <sup>2</sup>
$m_p/m_e$	1836.2
1 од. заряду СГСЕ	$(10c)^{-1}$ Кл
1 барн	$10^{-24}$ см <sup>2</sup>
1 а.о.м.	931.49 MeV/c <sup>2</sup>
1 еВ	$1.6022 \times 10^{-12}$ ерг
1 еВ	$1.6022 \times 10^{-19}$ Дж
1 кеВ	$2.4180 \times 10^{17}$ Гц
1 кеВ	$1.1605 \times 10^7$ К
$\alpha r_o^2$	0.5794 mb

Таблиця 1. Деякі властивості елементарних частинок та значення ряду сталих [1, 2].

## І. ОБЕРНЕНИЙ КОМПТОН-ЕФЕКТ

Високоенергетичний електрон може взаємодіяти з низькоенергетичним фотоном. Фотон під час такої взаємодії отримує частину кінетичної енергії електрона. Такий ефект розсіяння електронів на фотонах називають оберненим Комптон-ефектом (ОК).

Диференційна (за енергією фотонів  $E_\gamma$ ) випромінювальна здатність<sup>1</sup> унаслідок ОК, тобто кількість енергії, яку випромінює елемент об'єму плазми з популяцією електронів зі спектром  $N(E)dE$  за одиницю

часу в інтервалі енергій від  $E_\gamma$  до  $E_\gamma + dE_\gamma$ , задається виразом [3–5]:

$$P(E_\gamma) = cE_\gamma \int \int n_{\text{ph}}(\epsilon) \sigma_{\text{KN}}(E_\gamma, \epsilon, E_e) \times N(E_e) dE_e d\epsilon, \quad (1)$$

де  $E_e = \gamma m_e c^2$  і  $\gamma$  – повна енергія й Лоренц-фактор налітаючого електрона відповідно,  $N(E_e)$  – енергетичний спектр електронів,  $\epsilon$  і  $E_\gamma$  – енергії фотона до й після взаємодії,  $n_{\text{ph}}(\epsilon)$  – розподіл фотонів, на яких відбувається розсіяння. Приймаємо, що розподіл налітаючих електронів та фотонів поля є ізотропним; анізотропний ОК розглянуто в роботах [6–8]. Проінтегрований за кутами переріз взаємодії шляхом оберненого Комптон-ефекту є [3, 5]

$$\sigma_{\text{KN}}(E_\gamma, \epsilon; \gamma) = \frac{3\sigma_T}{4\epsilon\gamma^2} G(q, \eta), \quad (2)$$

де  $\sigma_T$  – ефективний переріз томсонівського розсіювання електромагнітного випромінювання,

$$G(q, \eta) = 2q \ln q + (1 + 2q)(1 - q) + 2\eta q(1 - q), \quad (3)$$

і

$$q = \frac{E_\gamma}{\Gamma(\gamma m_e c^2 - E_\gamma)}, \quad \Gamma = \frac{4\epsilon\gamma}{m_e c^2}, \quad \eta = \frac{\epsilon E_\gamma}{(m_e c^2)^2}. \quad (4)$$

Останній член у  $G$  відповідає за ефект Кляйна–Нішіни; віддачу враховано в параметрі  $q$ . Ефект Кляйна–Нішіни домінує при  $\Gamma \geq 1$  [9]. Кінематика процесу вимагає, щоб  $(4\gamma^2)^{-1} \leq q \leq 1$  [5]. Покладаючи  $q$  рівним його мінімальному та максимальному значенням, знаходимо обмеження на енергії відлітаючих фотонів:

$$E_{\gamma, \text{min}} = \frac{\gamma m_e c^2 \Gamma}{4\gamma^2 + \Gamma}, \quad (5)$$

$$E_{\gamma, \text{max}} = \frac{\gamma m_e c^2 \Gamma}{1 + \Gamma}, \quad (6)$$

що спрощується до

$$E_{\gamma, \text{min}} = \epsilon, \quad E_{\gamma, \text{max}} = 4\gamma^2 \epsilon \quad (7)$$

в наближенні томсонівського розсіювання ( $\Gamma \ll 1$ ; далі: границя Томсона) й до

$$E_{\gamma, \text{min}} = \epsilon(1 \ll \Gamma \ll 4\gamma^2), \quad E_{\gamma, \text{max}} = \gamma m_e c^2 \quad (8)$$

у далекій границі Кляйна–Нішіни ( $\Gamma \gg 1$ ). Умова  $q \leq 1$  обмежує мінімальний фактор Лоренца

$$\gamma_{\text{min}} = \frac{E_\gamma}{2m_e c^2} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{(m_e c^2)^2}{\epsilon E_\gamma} \right)^{1/2} \right], \quad (9)$$

<sup>1</sup>У публікаціях часом йдеться про функцію джерела (source function)  $\mathcal{S}$ , яка вказує на кількість фотонів. Диференціальна випромінювальна здатність  $P$  [ерг см<sup>-3</sup> с<sup>-1</sup> еВ<sup>-1</sup>] пов'язана з  $\mathcal{S}$  [см<sup>-3</sup> с<sup>-1</sup> еВ<sup>-1</sup>] так:  $P = E_\gamma \mathcal{S}$ .

який повинен мати електрон для того, щоби змінити енергію фотона з  $\epsilon$  до  $E_\gamma$ . Функцію  $\gamma_{\min}(E_\gamma)$  можна наближено записати двома виразами:

$$\gamma_{\min} = \begin{cases} E_\gamma^{1/2} / (2\epsilon^{1/2}), & \text{for } \eta \ll 1 \\ E_\gamma / (m_e c^2), & \text{for } \eta \gg 1 \end{cases}. \quad (10)$$

Обрізання Кляйна–Нішіни є нехтовним для  $\eta \ll 1$ , як це видно з виразу (3). Точка, де можна наближено перейти від  $\gamma_{\min} \propto E_\gamma^{1/2}$  до  $\gamma_{\min} \propto E_\gamma$ , є

$$E_{\gamma,*} = \frac{(m_e c^2)^2}{4\epsilon}. \quad (11)$$

Виділемо такі границі ОК:  $\eta \ll 1$  – томсонівська границя,  $\eta \leq 1$  – ближня границя Кляйна–Нішіни й  $\eta \gg 1$  – далека границя Кляйна–Нішіни.

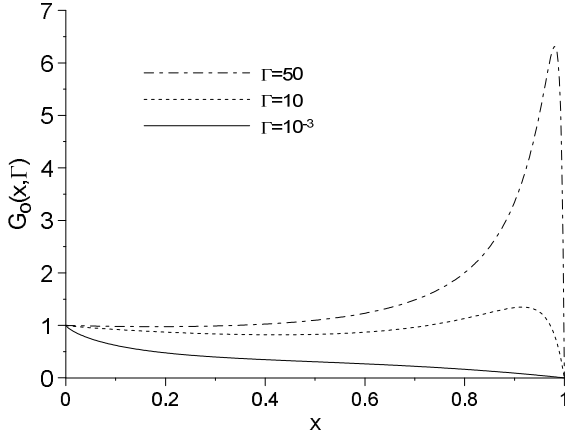


Рис. 1. Розподіл фотонів  $G_0(x, \Gamma)$ , випромінених унаслідок ОК,  $x \equiv E_\gamma / E_{\gamma, \max}$ . Криві побудовані для кількох значень комптонівського параметра  $\Gamma$  [10].

#### А. ВЗАЄМОДІЯ ЕЛЕКТРОНА З МОНОЕНЕРГЕТИЧНИМИ ФОТОНАМИ ПОЛЯ

Спектральний розподіл енергії, випроміненої за одиницю часу внаслідок взаємодії одного електрона з енергією  $E_e$  на моноенергетичних фотонах  $n_{\text{ph}} = n_o \delta(\epsilon - \epsilon_o)$ , отримуємо з (1) [10]:

$$P(E_\gamma, \gamma) = \frac{3\sigma_T c E_\gamma n_o}{4\epsilon_o \gamma^2} G_o, \quad (12)$$

де  $G_o$  обчислюється з (3) для  $\epsilon_o$ . Вираз (12) дійсний для  $\epsilon_o \leq E_\gamma \leq \gamma m_e c^2 \Gamma / (1 + \Gamma)$ . Рис. 1 показує функцію розподілу відлітаючих фотонів  $G_o(x, \Gamma)$  для різних значень комптонівського параметра  $\Gamma$ , де  $x \equiv E_\gamma / E_{\gamma, \max}$ . Криві на рис. 1 є універсальними в термінах  $x$  і комптонівського параметра  $\Gamma$ , тобто залежать лише від цих змінних. Справді, з (4)

$$q = \frac{x}{1 + \Gamma - x\Gamma}, \quad \eta = \frac{x\Gamma^2}{4(1 + \Gamma)}. \quad (13)$$

У томсонівській границі ( $\Gamma \ll 1$ ) зі зростанням  $x$  розподіл плавно спадає від 1 до 0 на  $E_{\gamma, \max} = 4\gamma^2 \epsilon_o$ .

Він не містить яскравого максимуму. Проте можливо розрахувати середню енергію випроміненого фотона [3]:

$$\langle E_\gamma \rangle = \frac{\int_0^\infty E_\gamma P(E_\gamma) dE_\gamma}{\int_0^\infty P(E_\gamma) dE_\gamma} = 4\gamma^2 \epsilon_o \frac{\int_0^1 q(1 + q - 2q^2 + 2q \ln q)}{\int_0^1 (1 + q - 2q^2 + 2q \ln q)} = \frac{4}{3} \gamma^2 \epsilon_o. \quad (14)$$

Попри те, що широкий плавний розподіл (12) у томсонівській границі не містить якоїсь виділеної характеристичної енергії фотонів, його запропоновано представляти у вигляді “монохроматичної” апроксимації [3, 11]:

$$P_{\text{mono}}(E_\gamma) \simeq P_m \delta(E_\gamma - \langle E_\gamma \rangle), \quad (15)$$

де

$$P_m = \int_0^\infty P(E_\gamma) dE_\gamma = \frac{4}{3} c \sigma_T \gamma^2 \omega, \quad (16)$$

$\omega = \epsilon_o n_o$  – густина енергії фотонів поля.

У дальній границі Кляйна–Нішіни ( $\Gamma_o \gg 1$ ) ситуація відрізняється. Функція  $G_o(S)$  добре апроксимується виразом [10]

$$G_o(S) \approx 1 + \frac{S(\Gamma - (\Gamma + 1)S)}{2\Gamma(1 - S)^2}, \quad (17)$$

де  $S = E_\gamma / E_e$  – нормована енергія фотона,  $S_{\max} = \Gamma / (1 + \Gamma)$ . Для малих значень  $S \ll 1$  функція  $G_o \approx 1$ .  $G_o$  є близьким до цього значення майже для всіх енергій  $E_\gamma$ , окрім області, близької до  $S_{\max}$ , де з'являється різкий пік (рис. 1, де  $x = S / S_{\max}$ ). Підставляючи  $S = S_{\max} - \xi$  в (17), отримуємо для  $\xi \ll 1$ :

$$G_o(\xi) \approx 1 + \frac{\xi}{2(\xi + 1/(\Gamma + 1))^2}. \quad (18)$$

Функція  $G_o(\xi)$  має максимум  $G_{\max}(\xi_o) = (\Gamma + 1)/8$  на  $\xi_o = 1/(\Gamma + 1)$  та швидко спадає по обидва боки цього максимуму. Енергія фотона, відповідна  $\xi_o$ , є

$$E_{\gamma, o} = (S_{\max} - \xi_o) \gamma m_e c^2 = \gamma m_e c^2 \frac{\Gamma - 1}{\Gamma + 1}. \quad (19)$$

Сильний контраст у дальній границі Кляйна–Нішіни між потужностями випромінювання  $P$  на  $E_{\gamma, o}$  та  $E_{\gamma, \min} \ll E_{\gamma, o}$ , а саме

$$\frac{P(E_{\gamma, o})}{P(\epsilon_o)} = \frac{\gamma^2}{2}, \quad (20)$$

може забезпечувати за певних умов мімікрію спектра ОК під гамма-лінії, як це запропоновано в [10, 12].

**В. РОЗРАХУНОК  
ГАММА-ВИПРОМІНЮВАННЯ. ПІДХІД А:  
ФІКСОВАНИЙ СПЕКТР ЕЛЕКТРОНІВ**

Рогляньмо спершу найпоширеніший підхід до обчислення випромінювання електронів унаслідок ОК (напр. [4, 5]). У цьому підході приймаємо, що енергетичний спектр електронів має певну типову форму, а важливим є розглянути розсіяння на фотонах зі специфічним спектром  $n_{\text{ph}}(\epsilon)$ . Тоді використовуємо вираз (1), записаний у термінах енергії фотонів поля, тобто розраховуємо інтегруванням за енергією розсіюючих фотонів  $\epsilon$ :

$$P(E_\gamma) = cE_\gamma \int d\epsilon n_{\text{ph}}(\epsilon) \int d\gamma N(\gamma) \sigma_{\text{KN}}(E_\gamma, \epsilon, \gamma). \quad (21)$$

Для степеневого розподілу електронів

$$N(\gamma) = N_0 \gamma^{-s}, \quad \gamma_{\text{min}} < \gamma < \gamma_{\text{max}}, \quad \gamma_{\text{min}} \ll \gamma_{\text{max}} \quad (22)$$

вираз (21) зводиться до такого вигляду [3, 5]:

$$P(E_\gamma) = 3 \times 2^{s-2} c \sigma_{\text{T}} N_0 E_\gamma^{-(s-1)/2} \times \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{(s-1)/2} n_{\text{ph}}(\epsilon) M[\eta(E_\gamma, \epsilon), s], \quad (23)$$

де  $M[\eta(E_\gamma, \epsilon_{\text{ph}}), s]$  — безрозмірна функція, яка задається співвідношенням:

$$M[\eta, s] = \int_0^1 dq q^{(s-1)/2} \frac{2q \ln q + 1 + q - 2q^2 + 2\eta q(1-q)}{(1+\zeta)^{s+2} (1+\eta q)^{(s+3)/2}}, \quad (24)$$

$$\zeta = (\eta q / (1 + \eta q))^{1/2}.$$

Для  $\eta \ll 1$  та  $\eta \leq 1$  запропонована апроксимація виразу (24). Так, розклавши підінтегральний вираз за степенями  $(q\eta)^{1/2}$ , слід зберегти члени до 4-го порядку в розкладі [13]. Тоді вираз (24) добре наближується такою формулою [3, 13]:

$$M[\eta, s] = M_0(s) \left[ 1 - \frac{(s^2 + 6s + 16)(s+1)(s+3)^2(s+5)}{(s^2 + 4s + 11)(s+4)^2(s+6)} \eta^{1/2} + \frac{(s^4 + 12s^3 + 62s^2 + 164s + 209)(s+1)(s+3)}{2(s^2 + 4s + 11)(s+5)(s+7)} \eta \right. \\ \left. - \frac{(s^4 + 14s^3 + 84s^2 + 296s + 576)}{6(s^2 + 4s + 11)(s+4)(s+6)^2(s+8)} (s+1)(s+2)(s+3)^2(s+5)\eta^{3/2} \right]. \quad (25)$$

Член нульового порядку

$$M_0(s) = \frac{4(s^2 + 4s + 11)}{(s+1)(s+5)(s+3)^2} \quad (26)$$

описує асимптотику для  $\eta \ll 1$  й не залежить від  $\eta$ . Із ним отримуємо відоме наближення для (23) в границі Томпсона:

$$P(E_\gamma) = \frac{3 \times 2^s (s^2 + 4s + 11)}{(s+1)(s+5)(s+3)^2} c \sigma_{\text{T}} N_0 E_\gamma^{-(s-1)/2} \times \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{(s-1)/2} n_{\text{ph}}(\epsilon), \quad (27)$$

яке є степеневою функцією  $E_\gamma$  зі спектральним індексом  $(s-1)/2$ .

Для далекої границі Кляйна–Нішіни,  $\eta \gg 1$ , ефективність ОК сильно спадає (так зване “обрізання Кляйна–Нішіни”). Тоді справедливе наближення [5]:

$$M[\eta, s] = 2^{-(s+1)} \eta^{(s+1)/2} (\ln \eta + C(s)), \quad (28)$$

де  $C(s)$  — параметр близько одиниці. З цим  $M$  випромінювальна здатність  $P_{\text{KN}} \propto E_\gamma^{-s}$ , що значно крутіше, ніж у томсонівському режимі  $P_{\text{T}} \propto E_\gamma^{-(s-1)/2}$ .

Аналогічні наближення можна отримати й в іншому важливому випадку, коли енергетичний спектр електронів представляється формулою з обрізанням на високих енергіях

$$N(\gamma) = N_0 \gamma^{-s} \exp(-[\gamma/\gamma_{\text{max}}]^\alpha). \quad (29)$$

Тоді вираз (21) можна звести до (23) з

$$M[\eta, \eta_{\text{max}}, s] = \int_0^1 dq q^{(s-1)/2} \times \frac{2q \ln q + 1 + q - 2q^2 + 2\eta q(1-q)}{(1+\zeta)^{s+2} (1+\eta q)^{(s+3)/2}} \times \exp\left(-\left[\frac{\eta(1+\zeta^{-1})}{2\eta_{\text{max}}}\right]^\alpha\right), \quad (30)$$

де  $\eta_{\text{max}} = \gamma_{\text{max}} \epsilon / (m_e c^2)$ . Якщо параметр  $\eta_{\text{max}} \geq 10$ , то для умов  $\eta \leq 1$  можна використати апроксимацію (25). Якщо  $\eta \gg 1$ , слід використовувати такий вираз:

$$M[\eta, s, \eta_{\text{max}}] = 2^{-(s+1)} \eta^{-(s+1)/2} (\ln \eta + C(s)) \times \exp(-(\eta/\eta_{\text{max}})^\alpha). \quad (31)$$

**С. РОЗРАХУНОК  
ГАММА-ВИПРОМІНЮВАННЯ. ПІДХІД Б:  
ПЛАНКІВСЬКИЙ СПЕКТР ФОНОВИХ  
ФОТОНІВ**

Відомо, що умови, за яких ОК-фотони випромінюються електронами, що поширюються в ізотропному

полі фотонів із чорнотільним енергетичним розподілом, часто бувають в астрофізичних джерелах. Зокрема, для залишків наднових зір можна розглядати такі розподіли з різними температурами, які відповідають космічному мікрохвильовому, інфрачервоному та оптичному випромінюванню; до того ж, густина енергії мікрохвильового поля переважно домінує. З іншого боку, форма енергетичного спектра електронів на енергіях, які важливі для гамма-випромінювання, може суттєво відрізнятися від степеневі, особливо якщо розглядати випромінювання електронів з енергіями біля максимально можливого значення.

Тому розгляньмо вираз (1), записаний у термінах енергії налітаючих електронів  $E_e$ :

$$P(E_\gamma) = cE_\gamma \int d\gamma N(\gamma) \int d\epsilon n_{\text{ph}}(\epsilon) \sigma_{\text{KN}}(E_\gamma, \epsilon, \gamma). \quad (32)$$

Він дає змогу моделювати випромінювання електронами з енергетичним спектром, відмінним від степеневого [14].

Уважатимемо фонові фотони ізотропними з планківським спектром

$$n_{\text{ph}}(\epsilon) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \frac{\epsilon^2}{\exp(\epsilon/\epsilon_c) - 1} \quad (33)$$

з  $\epsilon_c = kT$ .

Перепишімо (32) у вигляді

$$P(E_\gamma) = \int d\gamma N(\gamma) p(\gamma, E_\gamma), \quad (34)$$

де спектральний розподіл потужності ОК-випромінювання "одного" електрона з Лоренц-фактором  $\gamma$

$$p(\gamma, E_\gamma) = cE_\gamma \int d\epsilon n_{\text{ph}}(\epsilon) \sigma_{\text{KN}}(E_\gamma, \epsilon, \gamma). \quad (35)$$

За використання виразу (2) для  $\sigma_{\text{KN}}$

$$p(\gamma, E_\gamma) = \frac{3\sigma_{\text{T}} m_e^2 c^2 \epsilon_c}{4\pi^2 \hbar^3} \gamma^{-2} \mathcal{I}(\eta_c, \eta_o) = \frac{2e^4 \epsilon_c}{\pi \hbar^3 c^2} \gamma^{-2} \mathcal{I}(\eta_c, \eta_o) \quad (36)$$

з функцією  $\mathcal{I}(\eta_c(E_\gamma), \eta_o(\gamma, E_\gamma))$

$$\mathcal{I}(\eta_c, \eta_o) = \int \frac{(\eta/\eta_c) G(\eta_o/\eta, \eta)}{\exp(\eta/\eta_c) - 1} d\eta, \quad (37)$$

$$\eta_c = \frac{\epsilon_c E_\gamma}{(m_e c^2)^2}, \quad \eta_o \equiv q\eta = \frac{E_\gamma^2}{4\gamma m_e c^2 (\gamma m_e c^2 - E_\gamma)}. \quad (38)$$

Інтеграл  $\mathcal{I}$  має важливу властивість. Його можна записати у вигляді суми  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$  з двома інтегралами, які допускають масштабування:

$$\mathcal{I}_1(a\eta_c, a\eta_o) = a\mathcal{I}_1(\eta_c, \eta_o), \quad \mathcal{I}_2(a\eta_c, a\eta_o) = a^2\mathcal{I}_2(\eta_c, \eta_o). \quad (39)$$

Така властивість дає змогу отримати аналітичну апроксимацію  $\mathcal{I}$ . Вона також зумовлює високу точність

цієї апроксимації для широкого діапазону параметрів. Використовуючи  $a = \eta_c^{-1}$  у законах масштабування (39), одержуємо

$$\mathcal{I}_1(\eta_c, \eta_o) = \eta_c \mathcal{I}_1(1, \eta_o/\eta_c), \quad \mathcal{I}_2(\eta_c, \eta_o) = \eta_c^2 \mathcal{I}_2(1, \eta_o/\eta_c). \quad (40)$$

Це означає, що достатньо перевірити, наскільки точними є наближені вирази  $\mathcal{I}_1(1, x)$  й  $\mathcal{I}_2(1, x)$ , і ми знатимемо їхню точність для будь-яких  $\eta_c$  та  $\eta_o$ . Детальні розрахунки досить точно наближуються виразами [14]:

$$\mathcal{I}_1 \approx \frac{\pi^2}{6} \eta_c \exp\left[-\frac{2\eta_o}{3\eta_c} - \frac{5}{4} \left(\frac{\eta_o}{\eta_c}\right)^{1/2}\right], \quad (41)$$

$$\mathcal{I}_2 \approx \frac{\pi^2}{3} \eta_c \eta_o \exp\left[-\frac{2\eta_o}{3\eta_c} - \frac{5}{7} \left(\frac{\eta_o}{\eta_c}\right)^{0.7}\right], \quad (42)$$

як це видно з рис. 2.

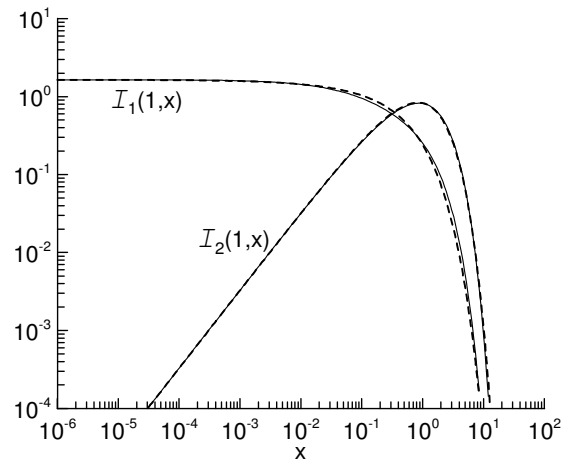


Рис. 2. Порівняння інтегралів  $\mathcal{I}_1(1, x)$ ,  $\mathcal{I}_2(1, x)$  (суцільні лінії) з їхніми наближеннями (41) і (42) (точкові лінії).

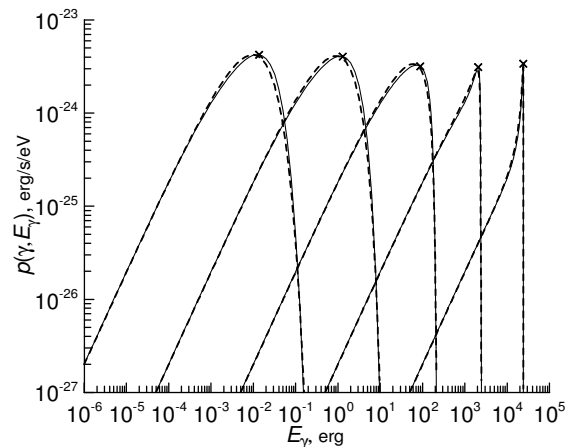


Рис. 3. Спектр  $p(E_\gamma)$  розрахований із інтегралом  $\mathcal{I}$  (суцільні лінії) та з його наближенням (штрихові лінії) для електронів із Лоренц-фактором  $\gamma = 3 \cdot (10^6, 10^7, 10^8, 10^9, 10^{10})$  (починаючи ліворуч), що відповідає енергіям  $E_e = 1.5 \cdot (10^{12}, 10^{13}, 10^{14}, 10^{15}, 10^{16})$  еВ. Хрестики відповідають положенню  $E_{\gamma, \text{max}}(\gamma, \epsilon_c)$ . Обчислення зроблено для поля фотонів із планківським розподілом із температурою  $T = 2.75$  К.

Масштабна властивість (39) зумовлює те, що сума наближень (41) і (42)

$$\mathcal{I}(\eta_c, \eta_o) \approx \frac{\pi^2}{6} \eta_c \left( \exp \left[ -\frac{5}{4} \left( \frac{\eta_o}{\eta_c} \right)^{1/2} \right] + 2\eta_o \exp \left[ -\frac{5}{7} \left( \frac{\eta_o}{\eta_c} \right)^{0.7} \right] \right) \exp \left[ -\frac{2\eta_o}{3\eta_c} \right] \quad (43)$$

є достатньо точною для розрахунків  $\mathcal{I}$  у будь-якому режимі, від томсонівської границі до дальньої границі Кляйна–Нішіни [14].

Рис. 3 демонструє спектральний розподіл випромінювання електронів у полі фотонів з чорнотільним розподілом у розрахунку на один електрон.

#### Д. НАБЛИЖЕННЯ “ $\delta$ -ФУНКЦІЇ” ДЛЯ ОБЕРНЕНОГО КОМПТОН-ЕФЕКТУ

Рис. 3 показує, що електрони з Лоренц-фактором  $\gamma$ , розсіяні фотонами з планківським енергетичним розподілом, випромінюють основну частину своєї енергії у фотонах із деякою характеристичною енергією  $E_{\gamma m}$ . Тому можна запропонувати наближення “ $\delta$ -функції” для оберненого Комптон-ефекту [14] на додачу до класичного “монохроматичного наближення” (підрозділ ІА), де електрон розсіюється фотонами з фіксованою енергією  $\epsilon_o$ .

А саме, можна наближено вважати, що електрон, який розсіюється на фотонах із планківським розподілом, випромінює всі фотони на енергії  $E_{\gamma m}$ :

$$p(\gamma, E_\gamma) \approx p_m(\gamma) \delta(E_\gamma - E_{\gamma m}), \quad (44)$$

де

$$p_m(\gamma) = \int_0^\infty p(\gamma, E_\gamma) dE_\gamma, \quad (45)$$

$p_m$  — енергетичні втрати електрона внаслідок ОК (підрозділ ІЕ).

Чисельні розрахунки показують (рис. 3), що

$$E_{\gamma m}(\gamma) \approx E_{\gamma, \max}(\gamma, \epsilon_c) \quad (46)$$

де  $E_{\gamma, \max}(\gamma, \epsilon)$  дано виразом (6). У границі Томсона це

$$E_{\gamma m}(\gamma) \approx 4\epsilon_c \gamma^2. \quad (47)$$

У “монохроматичному” наближенні середнє значення  $\langle E_\gamma \rangle = (4/3)\epsilon_o \gamma^2$  широкого розподілу використовують для оцінок енергії “монохроматичних” фотонів, випромінених електронном унаслідок оберненого Комптон-ефекту в томсонівському режимі.

#### 1. Границя Томсона

У границі  $\eta_o \ll \eta_c$ , еквівалентній до томсонівської границі  $\Gamma(\epsilon_c) \ll 1$ , інтеграл (37) можна отримати аналітично:

$$\mathcal{I}_T(\eta_c, \eta_o) = \eta_c \int_0^\infty \frac{\eta' d\eta'}{\exp(\eta') - 1} = \frac{\pi^2 \eta_c}{6}. \quad (48)$$

Використання (48) у (36) дає змогу записати вираз для випромінювальної здатності в цій границі. Спектральний розподіл потужності випромінювання “одного” електрона шляхом оберненого Комптон-ефекту є [14]

$$p_T(\gamma, E_\gamma) = \frac{\sigma_T \epsilon_c^2 E_\gamma}{8\hbar^3 c^2 \gamma^2} = \frac{\pi e^4 \epsilon_c^2 E_\gamma}{3\hbar^3 c^2 E^2}, \quad E_\gamma \leq E_{\gamma, \lim}, \quad (49)$$

де  $E_{\gamma, \lim}$  — характеристична максимальна енергія, означена нижче. Цей вираз урахує інтегрування за всіма можливими енергіями фотонів поля  $\epsilon$ .

Розподіл  $p_T(\gamma, E_\gamma)$  є зростаючою функцією  $E_\gamma$ , тоді як  $p(\gamma, E_\gamma)$  спадає досить швидко після максимуму (рис. 3). Означимо енергію  $E_{\gamma, \lim}$  через умову [14]

$$\int_0^{E_{\gamma, \lim}} p_T(\gamma, E_\gamma) dE_\gamma = p_{mT}(\gamma), \quad (50)$$

де  $p_{mT}(\gamma) = (4/3)c\sigma_T \omega \gamma^2$  — енергетичні втрати електрона внаслідок оберненого Комптон-ефекту в границі Томсона (підрозділ ІЕ). З означення (50) випливає, що

$$E_{\gamma, \lim} = \frac{4}{\pi} \epsilon_c \gamma^2 \left[ \frac{2}{3} \int_0^\infty \frac{z^3 dz}{\exp(z) - 1} \right]^{1/2} = 2.65 \epsilon_c \gamma^2. \quad (51)$$

Зауважимо, що  $E_{\gamma, \lim}$  мало відрізняється від  $E_{\gamma, \max}(\epsilon_c) = 4\epsilon_c \gamma^2$ .

Випромінювальну здатність електронів, розподілених згідно з (22), запишемо так [14]:

$$P(E_\gamma) = \frac{\sigma_T \epsilon_c^2}{8\hbar^3 c^2 (s+1)} N_o E_\gamma \gamma_{\min}^{-(s+1)}. \quad (52)$$

Як видно з (10), для  $E_\gamma \lesssim E_{\gamma, *}$ , мінімальний Лоренц-фактор  $\gamma_{\min} = E_\gamma^{1/2} / (2\epsilon_*^{1/2})$ . Відтак можна наближено переписати (34) в границі Томсона у вигляді

$$P(E_\gamma) = \frac{2^{s-2} \sigma_T \epsilon_c^2 \epsilon_*^{(s+1)/2}}{\hbar^3 c^2 (s+1)} N_o E_\gamma^{-(s-1)/2}, \quad (53)$$

з відомими нахилом  $P(E_\gamma) \propto E_\gamma^{-(s-1)/2}$ . Значення  $\epsilon_*$  можна знайти порівнянням (53) з (27); тобто,  $\epsilon_* = \mathcal{A}(s)\epsilon_c$  з

$$\mathcal{A}(s) = \left[ \frac{12}{\pi^2} \frac{(s^2 + 4s + 11)}{(s+5)(s+3)^2} \int_0^\infty \frac{z^{(s+3)/2} dz}{\exp(z) - 1} \right]^{2/(s+1)}. \quad (54)$$

Чисельно,  $\mathcal{A}(1.8) = 0.665$ ,  $\mathcal{A}(2) = 0.710$ ,  $\mathcal{A}(2.2) = 0.755$ .

**Е. ЕНЕРГІТИЧНІ ВТРАТИ ЕЛЕКТРОНІВ  
УНАСЛІДОК ОБЕРНЕНОГО  
КОМПТОН-ЕФЕКТУ**

Щоб отримати вираз для втрат енергії електрона при ОК на фотонах із розподілом  $n_{\text{ph}}(\epsilon)$ , потрібно проінтегрувати (35) за енергіями розсіяних фотонів:

$$\left(\frac{dE_e}{dt}\right)_{\text{ic}} = m_e c^2 \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{\text{ic}} = - \int_0^{E_{\gamma, \text{max}}} p(\gamma, E_{\gamma}) dE_{\gamma}. \quad (55)$$

У загальному випадку, використавши (2) та те, що  $q = 1$  для  $E_{\gamma} = E_{\gamma, \text{max}}$  (див. (13)), отримуємо [3]:

$$-\left(\frac{dE_e}{dt}\right)_{\text{ic}} = \frac{3c\sigma_T (m_e c^2)^2}{4} \int_0^{\infty} d\epsilon \epsilon^{-1} n_{\text{ph}}(\epsilon) \times \int_0^1 dq \frac{\Gamma^2 q}{(1 + \Gamma q)^3} G(q, \Gamma). \quad (56)$$

У границі Томсона,  $\Gamma \ll 1$ , інтеграл за  $q$  у формулі (56) дорівнює  $\Gamma^2/9$  [3]. Тому

$$-\left(\frac{dE_e}{dt}\right)_{\text{T}} = \frac{4}{3} c\sigma_T \omega \gamma^2, \quad (57)$$

де  $\omega = \int \epsilon n_{\text{ph}}(\epsilon) d\epsilon$  — густина енергії фотонів поля.

У границі Кляйна-Нішіни,  $\Gamma \gg 1$ , інтеграл за  $q$  у (56) одержано в [5, 15]. Тоді

$$-\left(\frac{dE_e}{dt}\right)_{\text{KN}} = \frac{3}{8} c\sigma_T (m_e c^2)^2 \times \int_0^{\infty} d\epsilon \epsilon^{-1} n_{\text{ph}}(\epsilon) \left(\ln \Gamma - \frac{11}{6}\right). \quad (58)$$

Енергетичні втрати електронів у цій границі зростають лише логарифмічно з  $E_e$  (тобто майже сталі),

на відміну від томсонівської границі, де вони пропорційні до  $E_e^2$ . Така особливість викликана якісною відмінністю процесу взаємодії в обох випадках. Так, у томсонівському режимі електрони втрачають енергію поступово, малими порціями, а в режимі Кляйна-Нішіни витрати енергії електроном під час кожної взаємодії сумірні зі значною частиною його початкової енергії.

**ІІ. НЕТЕПЛОВЕ ГАЛЬМІВНЕ  
ВИПРОМІНЮВАННЯ**

Нетепловий електрон із повною енергією  $E_e = E_{e, \text{kin}} + m_e c^2$ , що гальмується в електростатичному полі іншого електрона, протона, іншого атома чи йона, випромінює фотон. Спектр гальмівного випромінювання таких нетеплових електронів (в англійській літературі “nonthermal bremsstrahlung”) переважно зумовлений внеском двох компонент: коли нетепловий електрон гальмується на іншому електроні (електрон-електронне ( $ee$ ) гальмівне випромінювання) та коли електрон гальмується на протоні (електрон-протонне ( $ep$ ) гальмівне випромінювання) чи іншому атомі. Тобто випромінювальна здатність елемента об’єму

$$P(E_{\gamma}) = \int_{E_{e, \text{min}}(E_{\gamma})}^{\infty} N(E_e) p_{ee}(E_e, E_{\gamma}) dE_e + \int_{E_{\gamma}}^{\infty} N(E_e) p_{ep}(E_e, E_{\gamma}) dE_e, \quad (59)$$

де  $p_{ee}(E_e, E_{\gamma})$  та  $p_{ep}(E_e, E_{\gamma})$  — спектральні розподіли випромінювання одного електрона з енергією  $E_e$ ,  $E_{e, \text{min}}$  — мінімальна енергія наближаючого електрона, за якої він здатен випродукувати гамма-квант із енергією  $E_{\gamma}$ . Для електрон-електронної взаємодії  $E_{\gamma}$  зв’язане з  $E_{e, \text{min}}$  виразом<sup>2</sup>:

$$E_{\gamma} = \frac{(E_{e, \text{min}} - m_e c^2) m_e c^2}{E_{e, \text{min}} + m_e c^2 - \sqrt{(E_{e, \text{min}} - m_e c^2)(E_{e, \text{min}} + m_e c^2)}}, \quad (60)$$

де  $m_e$  і  $c$  — маса електрона і швидкість світла. На рис. 4 наведено залежність  $E_{e, \text{min}}(E_{\gamma})$ , розраховану за цим виразом.

Із формули (60) випливає, що в граничних випадках

$$E_{e, \text{min}} = \begin{cases} E_{\gamma}, & E_e \gg m_e c^2, \\ 2E_{\gamma} + m_e c^2, & E_e \rightarrow m_e c^2. \end{cases} \quad (61)$$

Для ( $ep$ )-механізму добрим наближенням є  $E_{e, \text{min}, \text{kin}} = E_{\gamma}$  [16].

Спектральний розподіл енергії, випроміненої одним релятивістським електроном за одиницю часу, визначаємо формулою

<sup>2</sup>Цей вираз отримуємо з (68)

$$p_{ee} = v_e E_\gamma n_e \sigma_{ee}(E_e, E_\gamma), \quad (62)$$

$$p_{ep} = v_e E_\gamma n_p \sigma_{ep}(E_e, E_\gamma),$$

де  $\sigma_{ee}, \sigma_{ep}$  — проінтегрований за кутами фотона й відлітаючого електрона диференціальний (на одиницю енергії) переріз гальмівного випромінювання для ( $ee$ ) і ( $ep$ ) механізмів відповідно,  $n_e, n_p$  — концентрація електронів або протонів, які зумовлюють гальмування,  $v_e$  — швидкість електрона щодо розсіюючого центра. Часто такі центри можна вважати нерухомими; так, якщо розсіюючі частинки є тепловими та розподілені за законом Максвелла з температурою  $T$ , то їхнім рухом можна знехтувати, якщо  $kT \ll (\gamma - 1)m_e c^2$ .

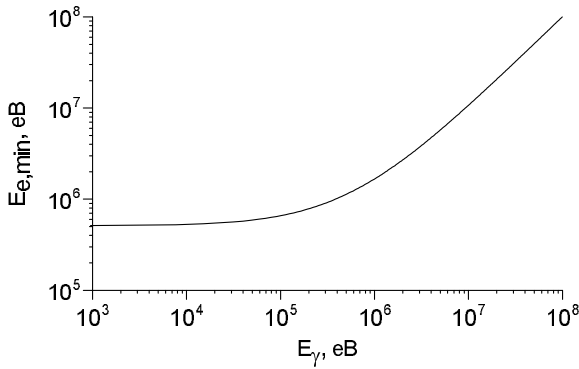


Рис. 4. Мінімальна повна енергія налітаючого електрона  $E_{e,\min}$ , необхідна для генерування фотона з енергією  $E_\gamma$  у процесі нетеплового гальмівного ( $ee$ ) випромінювання.

Якщо електрон розсіюється не лише на електронах, але й на інших атомах чи йонах (позначимо їх індексом  $j$ ), то

$$p_{ej}(E_e, E_\gamma) = v_e E_\gamma \sum_j n_j \sigma_{ej}(E_e, E_\gamma). \quad (63)$$

Так, для гальмівного випромінювання на електронах, протонах та альфа-частинках,

$$p_e = v_e E_\gamma [(n_p + 4n_{He})\sigma_{ep} + n_e \sigma_{ee}], \quad (64)$$

тут множник 4 зумовлений тим, що переріз  $\sigma_{ep}$  застосовуємо як до протонів, так і для альфа-частинок із множником  $Z^2$ , де  $Z$  — заряд атома (за відсутності екранування; розділ II В).

Коли енергії налітаючої та розсіюючої частинок сумірні, то при розсіянні на ядрах з великим  $Z$  та частково-йонізованих йонах опис ускладнюється [17, 18].

#### А. ЕЛЕКТРОН-ЕЛЕКТРОННЕ ГАЛЬМІВНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ

Загальну формулу для розрахунку диференціального перерізу гальмівного випромінювання електронів у полі електронів, яка задає кутовий розподіл та

енергетичний спектр випромінених фотонів, отримано в роботі [19] у Борнівському наближенні (коли взаємодії розглядають як малі збурення, що достатньо для опису ( $ee$ )-процесу [17]). У коваріантній формі, чинній у будь-якій системі відліку, формулу запишемо як

$$\frac{d\sigma_{ee}}{d\Omega} = \frac{\alpha r_o^2 \varepsilon}{\pi^2 \omega \varrho} \sqrt{\frac{\varrho^2 - 4}{\omega^2 - 4}} \Psi(\varepsilon, \theta), \quad (65)$$

де  $\varepsilon = E_\gamma/m_e c^2$ ,  $r_o = e^2/m_e c^2$  — класичний радіус електрона,  $\alpha = e^2/\hbar c$  — стала тонкої структури. Внаслідок симетрії процесу тілесний кут для вилітаючих фотонів запишемо просто як  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ ; кут  $\theta$  вимірюємо від вектора моменту  $p_e = \gamma m_e v_e$  налітаючого електрона.  $\omega^2$  і  $\varrho^2$  є квадратами сум 4-імпульсів налітаючого та розсіюючого електронів до і після взаємодії відповідно. Вираз для функції  $\Psi \sqrt{\varrho^2 - 4}/\pi$  наведено в додатку до роботи [19]; він громіздкий, тому тут його не наводимо.

У лабораторній системі (у якій розсіюючий електрон перебуває у стані спокою)

$$\omega^2 = 2(\gamma + 1), \quad \varrho^2 = 2[\gamma + 1 - \varepsilon(\gamma + 1 - \rho \cos \theta)], \quad (66)$$

де  $\gamma = E_e/m_e c^2$  ( $E_e$  — повна енергія електрона),  $\rho = p_e/m_e c$  — нормований імпульс електрона,  $\rho = \sqrt{\gamma^2 - 1}$ . Застосування цих виразів у (65) дає змогу отримати формулу для перерізу та виявити основні властивості випромінювання в лабораторній системі [19]. У цій системі фотони випромінюються в конусі з максимальним кутом розхилу  $\theta_o$ . Для фотонів з енергіями  $(\gamma - 1)/(\gamma + 1 + \rho) < \varepsilon \leq (\gamma - 1)/(\gamma + 1 - \rho)$  його задаємо виразом

$$\cos \theta_o = \frac{(\gamma + 1)\varepsilon - (\gamma - 1)}{\varepsilon \rho}. \quad (67)$$

Фотони менших енергій можуть розлітатися в будь-якому напрямку:  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Максимально можлива енергія фотона залежить від кута, визначається умовою  $\varrho^2 = 4$  і становить

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1 - \rho \cos \theta} \quad (68)$$

з абсолютним максимумом уздовж напрямку руху налітаючого електрона (при  $\theta = 0$ ). Зі збільшенням  $\varepsilon$ , конус стає все більш і більш звуженим. Для ультрарелятивістського випадку фотони випромінюються в суттєво вузькому конусі вздовж напрямку руху набігаючого електрона; кут, у якому потік випромінювання досягає половини максимуму,  $\sim (2\gamma)^{-1}$ , подібно до ( $ep$ ) гальмівного випромінювання. Максимальна енергія фотона в такому випадку  $\varepsilon_{\max} \sim \gamma$ . Рис. 5, 6 і 7 демонструють залежність перерізу  $d\sigma_{ee}/d\Omega$  від кута  $\theta$ , енергії налітаючих електронів і випромінених фотонів у лабораторній системі. З рис. 7 видно, що наближено  $\sigma_{ee} \propto \varepsilon^{-1.1}$  для низьких  $\varepsilon$ .



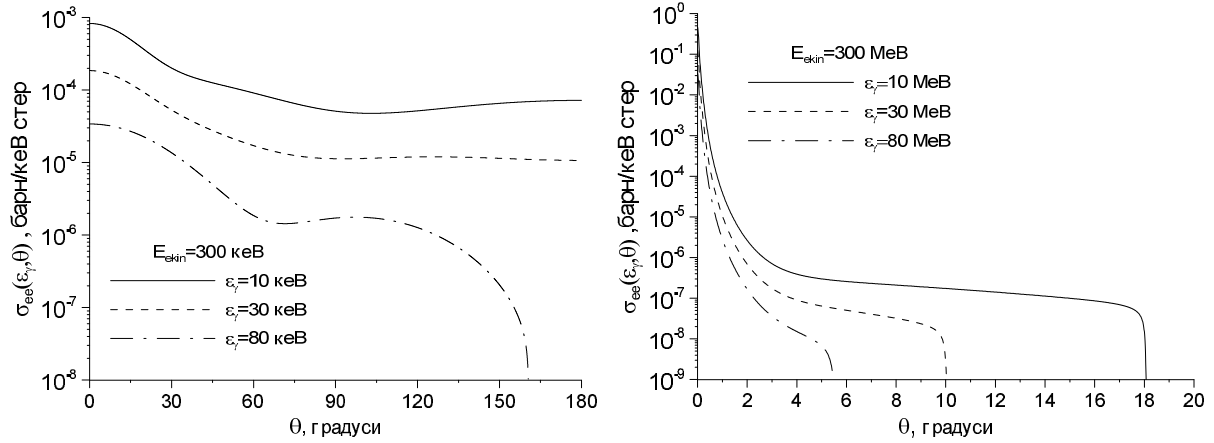


Рис. 5. Залежність перерізу  $d\sigma_{ee}/d\Omega$  електрон-електронного гальмівного випромінювання для налітаючих електронів із кінетичними енергіями 300 кеВ (ліворуч) і 300 МеВ (праворуч) від напрямку, для фотонів різних енергій у лабораторній системі.

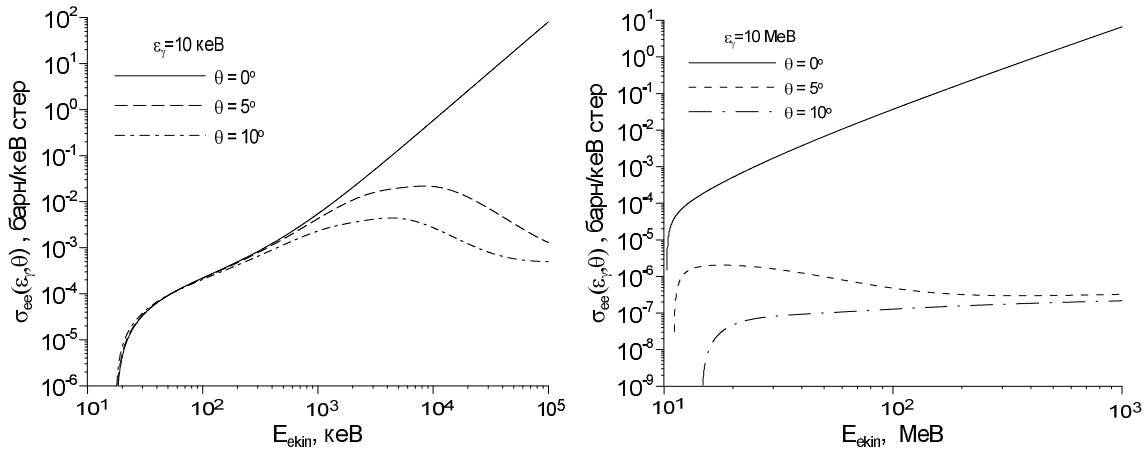


Рис. 6. Залежність перерізу  $d\sigma_{ee}/d\Omega$  електрон-електронного гальмівного випромінювання в лабораторній системі для фотонів із енергіями 10 кеВ (ліворуч) та 10 МеВ (праворуч) від кінетичної енергії випромінюючого електрона, для кутів  $\theta = 0^\circ, 5^\circ$  і  $10^\circ$ .

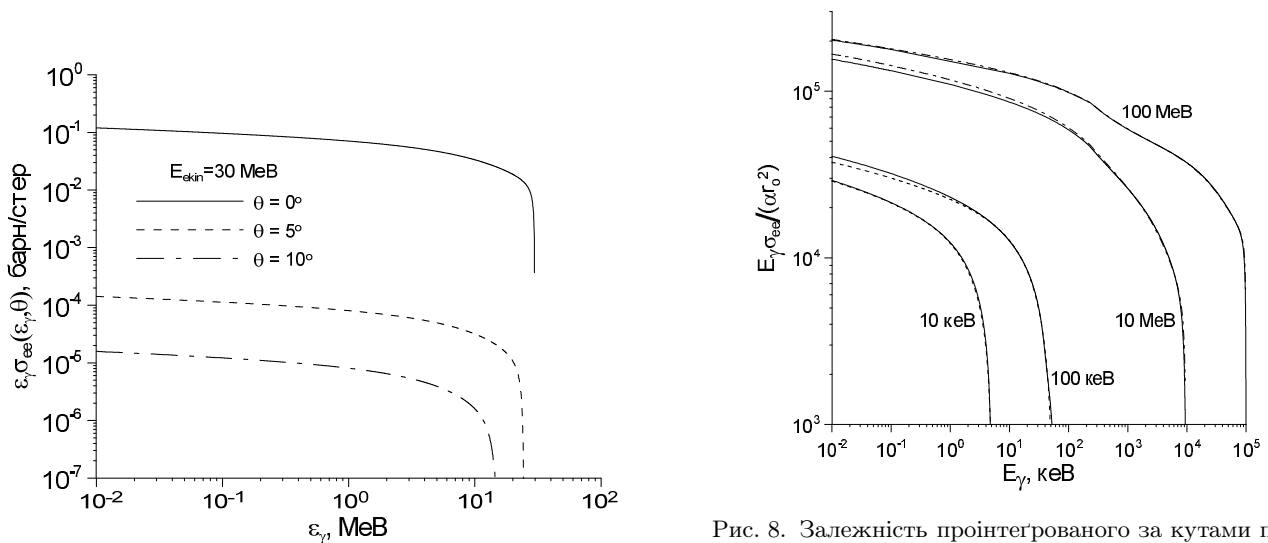


Рис. 7. Залежність перерізу  $d\sigma_{ee}/d\Omega$  електрон-електронного гальмівного випромінювання в лабораторній системі від енергії фотонів, для електрона з кінетичною енергією 30 МеВ і кутів  $\theta = 0^\circ, 5^\circ$  і  $10^\circ$ .

Рис. 8. Залежність проінтегрованого за кутами перерізу  $\sigma_{ee}$  в лабораторній системі від енергії фотонів для електронів різних кінетичних енергій, розрахована за точними формулами [19,21] (суцільні лінії) та аналітичними апроксимаціями (69), (72) (штрих-пунктирні та штрихові лінії відповідно).

Розрахунок перерізу  $\sigma_{ee}$ , диференціального лише за енергією фотона, потребує складного інтегрування за кутом  $\theta$ , яке неможливо провести в коваріантній формі. Таке інтегрування здійснене в праці [20] для системи центра мас, а в праці [21] — для лабораторної системи<sup>3</sup>. Так, у системі відліку нерухомих фонових (розсіювальних) електронів переріз  $\sigma_{ee}$ , розрахований за проінтегрованою формулою, показано на рис. 8. Для фотонів низьких енергій криві є близькими до степеневі залежності  $\sigma_{ee} \propto \varepsilon^{-1.1}$ , як це видно й у наведеній нижче апроксимації (72), де функція  $F(x)$  слабо залежить від  $x$ :  $F(x) \propto x^{-0.1}$  для  $x \ll 1$ . Детальний вираз, отриманий у [21], усе ж залишається незручним: він дуже громіздкий та містить члени, що вимагають чисельного інтегрування.

У практичних застосуваннях найчастіше використовують наближення для нерелятивістської та сильно-релятивістської енергій налітаючого електрона. Такі наближення для нерелятивістської границі розроблені в працях [22, 23]<sup>4</sup> й можуть бути застосовані для  $E_{e, \text{kin}} < 10$  кеВ [17]. В ультрарелятивістському випадку вираз для перерізу  $\sigma_{ee}$  в лабораторній

системі виведено в [24]; він збігається з ультрарелятивістською границею для  $\sigma_{ep}$  (85) і його можна застосовувати для  $E_e > 1$  ГеВ з похибкою менше 1% [17, 19]. Для системи центра мас ультрарелятивістське наближення отримано в [25]. Уведення коректуючих членів [9, 16] розширює можливості використовувати апроксимації на проміжні енергії  $E_e$ .

В ультрарелятивістській границі формула для поперечного перерізу електрон-електронного гальмівного випромінювання з поправкою для менших релятивістських енергій має вигляд [9, 16]:

$$\sigma_{ee} = (\sigma_1 + \sigma_2)A(\varepsilon, \gamma) \quad \text{см}^2 \text{ еВ}^{-1}, \quad (69)$$

де функції  $\sigma_1(\varepsilon, \gamma)$ ,  $\sigma_2(\varepsilon, \gamma)$  та  $A(\varepsilon, \gamma)$  задаються виразами:

$$\begin{aligned} \sigma_1(\varepsilon, \gamma) &= \frac{4\alpha r_0^2}{\varepsilon} \left\{ 1 + \left( \frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{\gamma - 1} \right) \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\gamma - 1} \right) \right\} \\ &\times \left[ \ln \left( 2(\gamma - 1) \frac{\gamma - 1 - \varepsilon}{\varepsilon} \right) - \frac{1}{2} \right], \quad (70) \end{aligned}$$

$$\sigma_2 = \frac{\alpha r_0^2}{3\varepsilon} \begin{cases} 16(1 - \varepsilon + \varepsilon^2) \ln \left( \frac{\gamma}{\varepsilon} \right) - \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{3}{\varepsilon} - 4 + 4\varepsilon - 8\varepsilon^2 \\ -2(1 - 2\varepsilon) \ln(1 - 2\varepsilon) \left( \frac{1}{4\varepsilon^3} - \frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{3}{\varepsilon} - 2 + 4\varepsilon \right), & \varepsilon \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2}{\varepsilon} \left[ \left( 4 - \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{4\varepsilon^2} \right) \ln(2\gamma) - 2 + \frac{2}{\varepsilon} - \frac{5}{8\varepsilon^2} \right], & \varepsilon > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

й поправка

$$A(\varepsilon) = 1 - \frac{10(\gamma - 1)^{1/5}}{3(\gamma + 1)} \left( \frac{\varepsilon}{\gamma} \right)^{1/3}. \quad (71)$$

Похибка цієї апроксимації, порівняно з точними розрахунками [19, 21], не перевищує 10% для енергій електрона  $\geq 5$  МеВ. Тому її можна використовувати для обчислення внеску нетеплового гальмівного випромінювання в гамма-випромінювання ЗН. Проте її не можна застосувати для рентгенівського та м'якого гамма-діапазону, куди потрапляє випромінювання налітаючих електронів із нерелятивістськими енергіями.

У нерелятивістській границі достатньо точною є інша апроксимація. З поправками, які розширюють її використання на енергії, вищі за суттєво нерелятивістську границю, вона має вигляд [9]:

$$\sigma_{ee} = \frac{4\alpha r_0^2}{15\varepsilon} F \left( \frac{4\varepsilon}{\gamma^2 - 1} \right), \quad 0 < \varepsilon < (\gamma^2 - 1)/4, \quad (72)$$

де для  $0 < x < 1$ ,

$$F(x) = B(\gamma) \left[ 17 - \frac{3x^2}{(2-x)^2} - C(\gamma, x) \right] \sqrt{1-x} + \left[ 12(2-x) - \frac{7x^2}{2-x} - \frac{3x^4}{(2-x)^3} \right] \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} \right), \quad (73)$$

<sup>3</sup>При зіткненні релятивістського електрона зі стаціонарним електроном центр мас рухається зі швидкістю  $v_c = c\sqrt{\rho/(\gamma+1)}$ .

<sup>4</sup>Це формули, ідентичні до (72)–(73) з  $B \equiv 1$  and  $C \equiv 0$

а поправки визначаються формулами

$$B(\gamma) = 1 + \frac{1}{2}(\gamma^2 - 1), \quad C(\gamma, x) = \frac{10x\gamma\beta(2 + \gamma\beta)}{1 + x^2(\gamma^2 - 1)}, \quad (74)$$

де  $\beta = v/c = \rho/\gamma$ . Для суттєво нерелятивістських енергій  $B = 1$ ,  $C = 0$  й вираз для  $F(x)$  не містить  $\gamma$ , а лише  $x$ ; для  $x \leq 0.03$  наближено  $F(x) \propto x^{-0.1}$  й  $\sigma_{ee} \propto \varepsilon^{-1.1}$ . Граничне наближення (72) відтворює результати з [19, 21] з похибкою в межах 10% для енергій електрона  $E_e \leq 500$  кеВ. Її точність не набагато гірша й для енергій до кількох МеВ.

Отож, перемикаючись між двома граничними режимами наближеного розрахунку перерізу  $\sigma_{ee}$  на  $E_e = 2$  МеВ [9], можна розраховувати електрон-електронне гальмівне випромінювання для всіх енергій налітаючого електрона. На рис. 8 апроксимацію (69)-(74) показано в порівнянні з точними розрахунками.

Слід відзначити, що для перерізів (еє) і (ер) процесів існують так звані кулонівські поправки. Така поправка є важливою для низьких енергій налітаючого електрона тоді, коли від нього до фотона передається значний імпульс (тобто коли  $p_2 \rightarrow 0$  чи, інакше,  $\varrho \rightarrow 2$ ; така взаємодія називається коротко-хвильовою або високо-частотною границею). Взаємодії тоді відбуваються на масштабах, сумірних із радіусом розсіюючого електрона чи атома, відтак слід урахувати відхилення конфігурації поля на таких масштабах від кулонівської, а кулонівське відштовхування зумовлює те, що електрони мають менше часу на взаємодію. Для (ер) гальмівного випромінювання така поправка забезпечується фактором Елверта (див. підрозділ ПВ), а для (еє) випромінювання — фактором Максона–Кормана (докладніше див. розділ 3 в [19] та с.4-5 в [17]); обидві поправки мають фізичний зміст відношення ймовірностей знайти налітаючий і відлітаючий електрони в точці розташування розсіюючого центра. Фактор Максона–Кормана [26] записуємо так:

$$f_{MC} = \frac{a' \exp(2\pi a) - 1}{a \exp(2\pi a') - 1}, \quad (75)$$

де  $a = \alpha/\beta_{12}$ ,  $a' = \alpha/\beta'_{12}$ , а відносні швидкості електронів до і після взаємодії, в одиницях  $c$ , даються виразами:

$$\beta_{12} = \frac{\omega\sqrt{\omega^2 - 4}}{\omega^2 - 2}, \quad \beta'_{12} = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - 4}}{\varrho^2 - 2}. \quad (76)$$

Фактор  $f_{MC}$  залежить від кута відлітаючого фотона  $\theta$ ; аналітичні інтегрування за кутами, описані вище, не враховують цього фактора.  $f_{MC}$  є важливим для низьких енергій електрона. Проте в системах, де низько-енергетичні електрони гальмуються як на електронах, так і на протонах чи інших атомах, фактор  $f_{MC}$  не відіграє жодної ролі, оскільки переріз (еє) взаємодії є нехтовним порівняно з (ер) перерізом (підрозділ ПД). Окрім того,  $f_{MC}$  є нехтовним для високих енергій, тому в астрофізичних застосуваннях для рентгенівського та гамма-діапазонів переважно не застосовується [17, 19].

## В. ЕЛЕКТРОН-ПРОТОННЕ ГАЛЬМІВНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ

Розгляньмо нетеплове гальмівне випромінювання електрона в полі йона [18, 27]. Вважатимемо, що відхиляючі йони повністю йонізовані, тому поправки на екранування не потрібні. Оскільки йон значно важчий за електрон, то імпульс системи електрон-фотон не зберігається: йон може прийняти на себе будь-який імпульс. Проте енергію такої системи йон не змінює:  $E'_e + E_\gamma = E_e$ .

Диференціальний за енергією переріз  $\sigma_{ep}$  визначається формулою Бете–Гайтлера [28], яка визначає ймовірність того, що відхилення релятивістського електрона в неекранованому полі йона випродукує фотон [29, 30]:

$$\sigma_{ep} = \frac{Z^2 r_0^2 \alpha}{\varepsilon} \frac{\rho'}{\rho} \left\{ \frac{4}{3} - 2\gamma'\gamma \frac{\rho'^2 + \rho^2}{\rho^2 \rho'^2} + \frac{\eta\gamma'}{\rho^3} + \frac{\eta'\gamma}{\rho'^3} - \frac{\eta\eta'}{\rho\rho'} + Lx \right\}, \quad (77)$$

де

$$x = \frac{8\gamma\gamma'}{3\rho\rho'} + \frac{\varepsilon^2(\gamma^2\gamma'^2 + \rho^2\rho'^2)}{\rho^3\rho'^3} + \frac{\varepsilon}{2\rho\rho'} \left[ \eta \frac{\gamma\gamma' + \rho^2}{\rho^3} - \eta' \frac{\gamma\gamma' + \rho'^2}{\rho'^3} + \frac{2\varepsilon\gamma\gamma'}{\rho^2\rho'^2} \right], \quad (78)$$

$$\eta = \ln \frac{\gamma + \rho}{\gamma - \rho}, \quad \eta' = \ln \frac{\gamma' + \rho'}{\gamma' - \rho'}, \quad (79)$$

$$L = 2 \ln \frac{\gamma\gamma' + \rho\rho' - 1}{\varepsilon}. \quad (80)$$

У цих рівняннях  $\gamma$ ,  $\gamma'$ ,  $\rho$ ,  $\rho'$  — енергія й імпульс електрона до і після гальмування на йоні,  $Z$  — заряд йона. Енергію відлітаючого електрона розраховуємо як  $\gamma' = \gamma - \varepsilon$ . Вираз (77) для перерізу отримано в борнівському наближенні; у ньому не враховано спотворення хвильової функції електрона кулонівським полем ядер, взаємодію налітаючого електрона розглядаємо як мале збурення, ймовірність взаємодії розкладаємо в ряд за степенями  $Ze^2$  й зберігаємо лише члени першого порядку розкладу. Такий підхід дає коректні результати, коли кінетичні енергії налітаючого й відлітаючого електронів є високими:  $2\pi\alpha Z\gamma/\rho \ll 1$  і  $2\pi\alpha Z\gamma'/\rho' \ll 1$ . Для іонів з малим зарядом  $Z$  (наприклад, водню та гелію, які домінують в астрофізичних системах) ця умова виконується завжди, коли енергія налітаючого електрона є релятивістською [18]. Винятком є вузький інтервал частот, коли електрон віддає майже всю свою енергію фотона й має малу швидкість після взаємодії. У цій області коротких хвиль ( $\rho' \rightarrow 0$ ) переріз поліпшується введенням коректуючого множника Елверта [31, 32]:

$$f_E = \frac{\xi' 1 - \exp(-\xi)}{\xi 1 - \exp(-\xi')}, \quad (81)$$

$$\xi = 2\pi\alpha \frac{Z\gamma}{\rho}, \quad \xi' = 2\pi\alpha \frac{Z\gamma'}{\rho'}. \quad (82)$$

Множник Елверта добре працює в усьому діапазоні енергій для ядер із малим значенням  $Z$ , які переважають в астрофізичних системах [32,33]. Тому *всі вирази для  $\sigma_{\text{ep}}$  слід множити на  $f_E$* . (Роль цього множника є суттєвою для електронів зі швидкостями, меншими за  $c/10$  [9]; таку середню швидкість мають електрони, розподілені за законом Максвелла з температурою 2 кеВ.) Випадки малих початкових швидкостей чи тяжких ядер розглянуто в [18, 27].

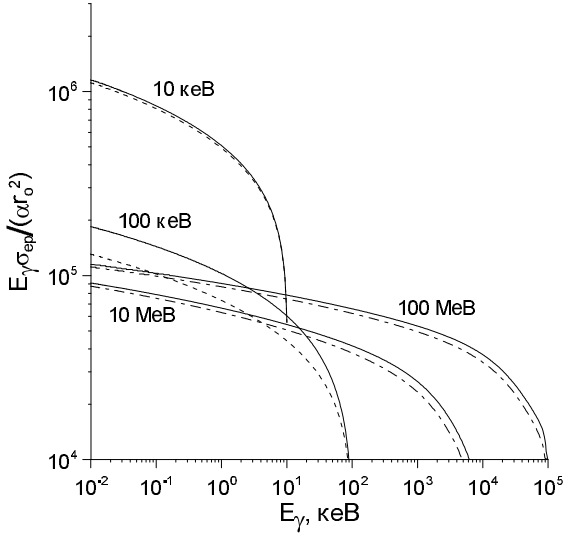


Рис. 9. Залежність перерізу  $\sigma_{\text{ep}}$  від енергії фотонів для електронів різних кінетичних енергій, розрахована за точною формулою (77) (суцільні лінії) та аналітичними апроксимаціями (83) (штрихові лінії), (85) (штрих-пунктирні лінії) та (87) (на рисунку не відрізняється від суцільних ліній). Усі вказані вирази домножені на фактор Елверта.

Деколи зручніше використовувати простіші формули, які отримуємо з повного виразу (77) в граничних випадках. У нерелятивістській границі ( $p \ll m_e c$ ) формула (77) значно спрощується (наприклад, [29, 32]) і може бути записана у вигляді:

$$\sigma_{\text{ep}} = \frac{16Z^2 r_0^2 \alpha}{3\varepsilon \rho^2} \ln \frac{\rho + \rho'}{\rho - \rho'}. \quad (83)$$

Звідси, за використання для налітаючого електрона формули  $E_{\text{kin}} = p^2/2m_e$ , переріз

$$\sigma_{\text{ep}} \propto \frac{1}{E_\gamma E_{\text{kin}}} \ln \frac{\sqrt{E_{\text{kin}}} + \sqrt{E_{\text{kin}} - E_\gamma}}{E_\gamma}. \quad (84)$$

Бачимо, що в нерелятивістській області ймовірність випромінити фотон із енергією  $E_\gamma$  приблизно пропорційний до  $1/E_\gamma$ , а для максимально можливої енергії кванта  $E_\gamma = E_{\text{kin}}$  (короткохвильова границя) він перетворюється в нуль. При  $E_\gamma \rightarrow 0$  вираз для інтенсивності  $E_\gamma \sigma_{\text{ep}}(E_\gamma)$  логарифмічно розбігається (цей ефект буває лише для кулонівського поля ядра та борнівського наближення); проте врахування екранування поля ядра атомними електронами усуває цю розбіжність [27].

Використовувати просту формулу (83) зручно для аналітичних перетворень. Проте її точність швидко падає зі зростанням енергії налітаючого електрона; так, уже для  $E_e > 30$  кеВ відносна похибка стає більшою за 10% [32]. Зображення повного перерізу  $\sigma_{\text{ee}}$  рядом до порядку  $\rho^6$ ,  $\rho'^6$  дає змогу розширити межі застосування наближення (83) до перехідних релятивістських енергій; похибка такого розкладу перевищує 10% уже при  $E_e > 470$  кеВ [32].

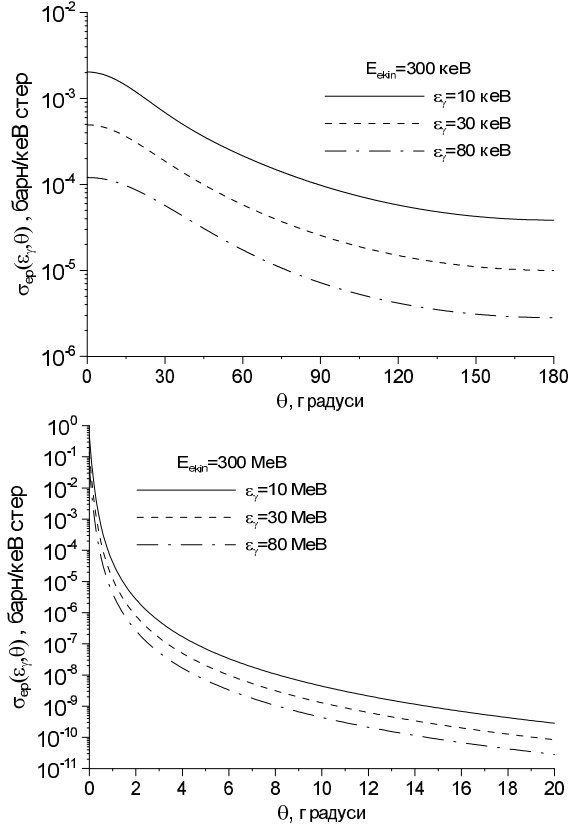


Рис. 10. Залежність перерізу  $d\sigma_{\text{ep}}/d\Omega$  електрон-протонного гальмівного випромінювання (88) для налітаючих електронів із кінетичними енергіями 300 кеВ (ліворуч) і 300 МеВ (праворуч) від напрямку, для фотонів різних енергій.

Відомою є також ультрарелятивістська границя формули Бете-Гайтлера (наприклад, [29, 32]):

$$\sigma_{\text{ep}} = \frac{2Zr_0^2 \alpha}{\varepsilon \rho^2} \left( \frac{4}{3} \gamma \gamma' + \varepsilon^2 \right) \left( 2 \ln \frac{2\gamma \gamma'}{\varepsilon} - 1 \right). \quad (85)$$

Із формулою  $\rho = \gamma/c$  це переписуємо як

$$\sigma_{\text{ep}} \propto \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\gamma} + \frac{3}{4} \left[ \frac{\varepsilon}{\gamma} \right]^2 \right) \left( \ln \left[ 2\gamma \left( \frac{\gamma}{\varepsilon} - 1 \right) \right] - \frac{1}{2} \right). \quad (86)$$

Бачимо, що ймовірність випромінення електроном певної частини своєї енергії (тобто при фіксованому відношенні  $\gamma/\varepsilon$ ) приблизно пропорційна логарифму  $\gamma$ . При  $E_\gamma \rightarrow 0$  вираз  $E_\gamma \sigma_{\text{ep}}(E_\gamma)$  розбігається також і в ультрарелятивістському випадку [27].

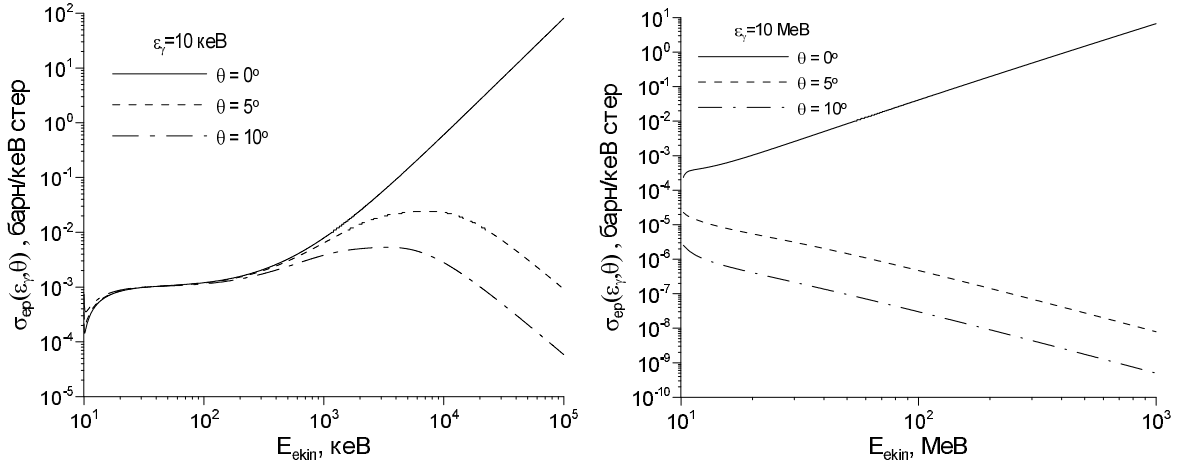


Рис. 11. Залежність перерізу  $d\sigma_{ep}/d\Omega$  електрон-протонного гальмівного випромінювання (88) для фотонів з енергіями 10 кеВ (ліворуч) та 10 МеВ (праворуч) від кінетичної енергії випромінюючого електрона, для кутів  $\theta = 0^\circ, 5^\circ$  і  $10^\circ$ .

Використання комбінації формули (85) і згаданого вище розкладу перерізу до членів порядку  $\rho^6$  і  $\rho'^6$ , а саме формули

$$\sigma_{ep} = \frac{2Zr_0^2\alpha}{\varepsilon\rho^2} \left\{ \frac{4}{3}\gamma\gamma' + \varepsilon^2 - \frac{7}{15}\frac{\varepsilon^2}{\gamma\gamma'} - \frac{11}{70}\frac{\varepsilon^2(\rho^2 + \rho'^2)}{(\gamma\gamma')^4} \right\} \times \left\{ 2\ln \frac{\gamma\gamma' + \rho\rho' - 1}{\varepsilon} - \frac{\rho\rho'}{\gamma\gamma'} \left[ 1 + \frac{1}{\gamma\gamma'} + \frac{7}{20}\frac{\rho^2 + \rho'^2}{(\gamma\gamma')^3} + \left( \frac{9}{28}\varepsilon^2 + \frac{263}{210}\rho^2\rho'^2 \right) \frac{1}{(\gamma\gamma')^3} \right] \right\}, \quad (87)$$

надає можливість наближати переріз електрон-протонного випромінювання (77) для всіх енергій, із найбільшою похибкою 6% (в області  $E_{e1} = 1800$  кеВ) [32]. Зауважимо, що, застосовуючи цю формулу, слід використовувати релятивістський вираз для моментів електронів до і після взаємодії:  $pc = \sqrt{E_e^2 - m_e^2c^4}$  чи  $\rho = \sqrt{\gamma^2 - 1}$ .

Наближення (83), (85), (87) порівняно з (77) на рис. 9 (варто ще раз звернути увагу, що для розрахунків ці вирази слід множити на фактор Елверта).

Переріз нетеплового гальмівного електрон-протонного випромінювання, диференціального за енергіями та кутами породженого фотона, задається формулою Заутера [34] з фактором Елверта [29, 32, 35]:

$$\frac{d\sigma_{ep}}{d\Omega} = f_E \frac{Z^2r_0^2\alpha}{\pi\varepsilon} \left\{ \frac{2\gamma^2 + 1}{\rho^2u^4} \sin^2\theta - \frac{1}{\rho^2u^2} \left( \gamma^2 + 1 + \frac{1}{2}\gamma'\rho\cos\theta \right) - \frac{\rho(\rho - \varepsilon\cos\theta)}{2u^2P^2} - \frac{\ln(\gamma' + \rho')}{u\rho'} \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho'P} \ln \frac{P + \rho'}{P - \rho'} \left[ \frac{1}{2u^2} - \frac{\varepsilon}{u} + \frac{\varepsilon^2}{2uP^2}(\varepsilon - \rho\cos\theta) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho\rho'} \ln \frac{\gamma\gamma' + \rho\rho' - 1}{\varepsilon} \left[ \frac{\gamma(3\varepsilon - \gamma'\rho^2)}{\rho^2u^4} \sin^2\theta + \frac{\gamma^2 + \gamma'^2 - 1/2}{u^2} - \frac{\varepsilon}{u^2\rho^2}(2\gamma + \gamma'/2) + \frac{\varepsilon}{2u} \left( \frac{\gamma\gamma'}{\rho^2} + 1 \right) \right] \right\}, \quad (88)$$

де  $\theta$  — кут між напрямком руху налітаючого електрона та випроміненого фотона,

$$u = \gamma - \rho\cos\theta, \quad P = (\rho^2 + \varepsilon^2 - 2\rho\varepsilon\cos\theta)^{1/2}. \quad (89)$$

Ця формула отримана також у борнівському наближенні та дійсна для будь-яких енергій електронів [35]. Використовувати нерелятивістську границю цієї формули в (59) не слід, оскільки вклад високоенергетичних електронів є важливим навіть для фотонів низьких енергій [35]. У нерелятивістському випадку максимум випромінювання перебуває в напрямку, перпендикулярному до площини руху електрона ( $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$ ). Зі збільшенням енергії налітаючого електрона макси-

мум у кутовому розподілі фотонів наближається до напрямку  $\mathbf{p}$  й для релятивістських енергій цей максимум стає значним. Справді, при  $\gamma \gg 1$  значення імпульсу  $\rho \rightarrow \gamma$ , тому значення  $u$  в знаменниках формули (88) прямує до нуля для малих  $\theta$ , зумовлюючи суттєвий максимум перерізу довкола вектора початкового моменту електрона. В ультрарелятивістській границі майже все випромінювання зосереджено в малому куті  $\sim 1/\gamma$  від напрямку руху налітаючого електрона [18]. Особливості кутової залежності (ер) гальмівного випромінювання показано на рис. 10–12. В загальних рисах ці властивості подібні до властивостей (еє) випромінювання (порівн. з рис. 5–7).

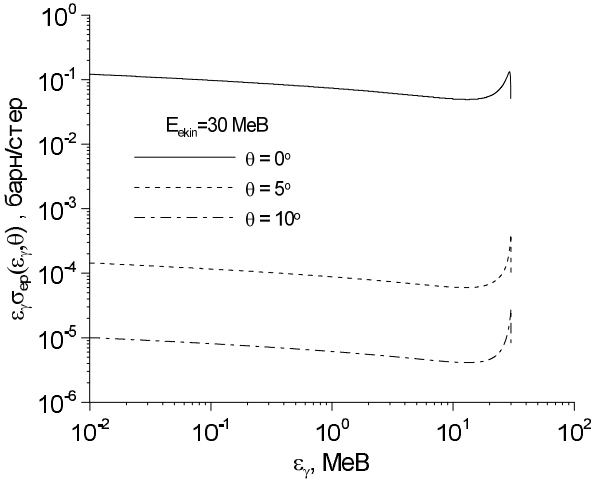


Рис. 12. Залежність перерізу  $d\sigma_{ep}/d\Omega$  електрон-протонного гальмівного випромінювання в лабораторній системі від енергії фотонів, для електрона з кінетичною енергією 30 MeV і кутів  $\theta = 0^\circ, 5^\circ$  і  $10^\circ$ . Для широкого діапазону  $\varepsilon$ , наближено  $\sigma_{ep} \propto \varepsilon^{-1.1}$ .

### С. ЕНЕРГЕТИЧНІ ВТРАТИ ЕЛЕКТРОНІВ УНАСЛІДОК ГАЛЬМІВНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ

Енергетичні втрати електрона внаслідок гальмівного випромінювання є сумою втрат унаслідок електрон-електрон та електрон-протонної взаємодії. Так, у загальному випадку:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{br} = - \int p_{ej}(E, E_\gamma) dE_\gamma, \quad (90)$$

де  $p_{ej}$  задається виразом (63).

Утрати енергії електрона на (ee) випромінювання обчислюється як [17]

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{ee} = -v_e n_e \int_0^{\varepsilon_{max}} \varepsilon \sigma_{ee} d\varepsilon, \quad (91)$$

де  $\varepsilon_{max}$  задається (68) з  $\theta = 0$ , а швидкість можна виразити через безрозмірні енергію та імпульс:  $v_e = c\rho/\gamma$ . За використання перерізу

$$\Phi_{ee} = \frac{1}{\gamma - 1} \int_0^{\varepsilon_{max}} \varepsilon \sigma_{ee} d\varepsilon, \quad (92)$$

який описує відношення випроміненої енергії до початкової кінетичної енергії електрона, вираз (91) переписується у вигляді

$$(d\gamma/dt)_{ee} = -v_e n_e (\gamma - 1) \Phi_{ee}. \quad (93)$$

Вирази для  $\Phi_{ee}$  одержуємо аналітично в граничних випадках  $\gamma - 1 \ll 1$  і  $\gamma \gg 1$ . За використання нерелятивістської границі для перерізу  $\sigma_{ee}$  [19], яка задається виразом (72) з  $B \equiv 1$ ,  $C \equiv 0$  (її можна застосовувати для  $\gamma \leq 10$  кеВ, окрім короткохвильової границі), отримуємо [36]:

$$\Phi_{ee} = \frac{10}{3} \alpha r_o^2 \left( \frac{11}{3} - \frac{\pi^2}{4} \right) \approx 4.00 \alpha r_o^2 \approx 2.32 \text{ mb}. \quad (94)$$

Для ультрарелятивістського випадку [17]:

$$\Phi_{ee} = 4 \alpha r_o^2 \left( \ln(2\gamma) - \frac{1}{3} \right). \quad (95)$$

У загальному випадку, для розрахунку  $\Phi_{ee}$  слід чисельно інтегрувати вираз (92) із громіздкою формулою для  $\sigma_{ee}$ , отриманою в роботі [21], та врахуванням кулонівської поправки (75). Такі розрахунки подано в [17, 37], де запропоновано також аналітичну апроксимацію:

$$\Phi_{ee} \approx \alpha r_o^2 \begin{cases} \frac{\gamma + 1}{\gamma} (0.6664 + 43.935\rho - 2.272\rho^2 - 3.055\rho^3) \left(1 - e^{2\pi\alpha\gamma/\rho}\right), & E_{e,kin} \leq 100 \text{ кеВ}, \\ \frac{\gamma + 1}{\gamma} (0.5754 + 1.4492\gamma - 0.0665\gamma^2), & 100 \text{ кеВ} \leq E_{e,kin} \leq 1 \text{ МеВ}, \\ (\gamma + 1) \frac{4.181\gamma \ln(\gamma + \rho) - 2.676\gamma - 2.256}{\gamma^2 + 1.022\gamma - 3.871}, & 1 \text{ МеВ} \leq E_{e,kin} \leq 500 \text{ МеВ}, \\ 4 \left( \ln(2\gamma) - \frac{1}{3} \right), & E_{e,kin} > 500 \text{ МеВ}. \end{cases} \quad (96)$$

Переріз  $\Phi_{ee}$  та дві його границі показано на рис. 13 ліворуч.

Утрати енергії електрона на (ep) випромінювання запишемо як [18, 27]

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{ep} = -v_e n_p \int_0^{\varepsilon-1} \varepsilon \sigma_{ep} d\varepsilon \equiv -v_e n_p \gamma \Phi_{ep}, \quad \Phi_{ep} = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\varepsilon-1} \varepsilon \sigma_{ep} d\varepsilon, \quad (97)$$

За використання повного виразу (77) для  $\sigma_{ep}$  аналітично отримуємо [29, 38], що

$$\Phi_{ep} = Z^2 \alpha r_o^2 \left\{ \frac{(12\gamma^2 + 4)}{3\gamma\rho} \ln(\gamma + \rho) - \frac{(8\gamma + 6\rho)}{3\gamma\rho^2} [\ln(\gamma + \rho)]^2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{\gamma\rho} F(2\rho(\gamma + \rho)) \right\}. \quad (98)$$

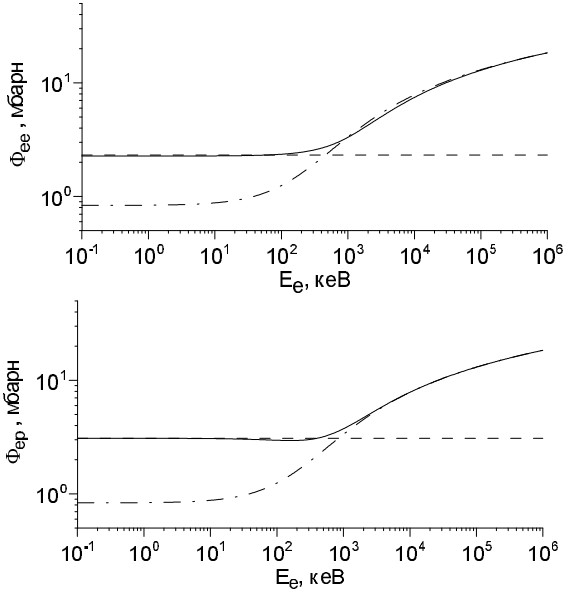


Рис. 13. *Угорі*: Переріз  $\Phi_{ee}$ , розрахований за (96), суцільна лінія та його граничні випадки (94) і (95) показані штрихованою та штрих-пунктирною лініями відповідно. Суцільна лінія дещо знижується порівняно зі штрихованою, оскільки (94) не враховує кулонівської поправки, на відміну від (96). *Внизу*: Переріз  $\Phi_{ep}$ , розрахований за (104), та його граничні випадки (102) і (103); кулонівської поправки не враховано.

У цій формулі не враховано множника Елверта,  $F(x)$  — дилогарифм:

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+y)}{y} dy. \quad (99)$$

Для наближень використовуємо границі функції  $F(x)$ : для малих  $x$  вживаємо розклад у ряд

$$F(x) = x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \dots, \quad (100)$$

а для великих  $x$  — точну формулу

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{(\ln x)^2}{2} - F\left(\frac{1}{x}\right). \quad (101)$$

У нерелятивістській та ультрарелятивістській границі переріз  $\Phi_{ep}$  (без множника Елверта) запишемо відповідно як [29, 38]

$$\Phi_{ep} = \frac{16}{3} Z^2 \alpha r_o^2 \approx 3.09 Z^2 \text{ mb}, \quad (102)$$

$$\Phi_{ep} = 4Z^2 \alpha r_o^2 \left( \ln(2\gamma) - \frac{1}{3} \right). \quad (103)$$

Бачимо, що ультрарелятивістські границі для перерізу гальмівного випромінювання електрона в полі електрона  $\Phi_{ee}$  і в полі протона  $\Phi_{ep}$  збігаються.

У практичних застосуваннях, щоб уникнути чисельного розрахунку  $F(x)$ , корисно використовувати наближення [37]:

$$\Phi_{ep} \approx 8Z^2 \alpha r_o^2 \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \rho^2} \times \left\{ \frac{\gamma}{\rho} \ln(\gamma + \rho) - \frac{1}{3} + \frac{\rho^2}{\gamma^6} \left( \frac{2}{9} \gamma^2 - \frac{19}{675} \gamma \rho^2 - 0.06 \frac{\rho^4}{\gamma} \right) \right\}. \quad (104)$$

Цей вираз можна використовувати в усьому діапазоні енергій. Його відносна похибка ніде не перевищує 0.54%; однак це наближення не враховує кулонівської поправки, тому переріз має насправді бути дещо меншим для низьких енергій налітаючого електрона.

Переріз  $\Phi_{ep}$  та дві його границі показано на рис. 13 праворуч.

#### Д. ЗНАЧУЩІСТЬ ( $ee$ ) ТА ( $ep$ ) ВНЕСКІВ У ГАЛЬМІВНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ

Відносну важливість внесків ( $ee$ ) і ( $ep$ ) процесів у нетеплове гальмівне випромінювання електронів показано на рис. 14.

Для нерелятивістських енергій налітаючих електронів основний внесок у спектри дає гальмівне випромінювання на протонах, а у випадку релятивістських електронів випромінювання в обох процесах є сумірним (рис. 14). Спектр ( $ee$ ) випромінювання релятивістських електронів є дещо крутішим, ніж спектр їхнього ( $ep$ ) випромінювання, тому  $\sigma_{ee}$  є трохи вищим за  $\sigma_{ep}$  на низьких  $E_\gamma$  [21]. Оскільки ультрарелятивістські границі  $\sigma_{ee}$  і  $\sigma_{ep}$  збігаються, то випромінювальна здатність залежить від заряду розсіювальної частинки, а не від її маси. Тому відношення електрон-електронного до електрон-йонного внесків до нетеплового гальмівного випромінювання в плазмі, яка складається з електронів, протонів та альфа-частинок, буде<sup>5</sup>  $(n_p + 2n_{He}) / (n_p + 4n_{He})$  для фотонів з енергіями, вищими за  $\sim 10$  МеВ [9].

<sup>5</sup>Це відношення дорівнює 0.86 для плазми з  $n_{He} = 0.1n_H$ .

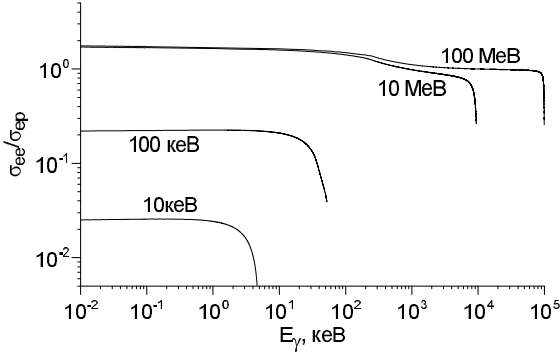


Рис. 14. Відношення  $\sigma_{ee}/\sigma_{ep}$  для випадків, показаних суцільними лініями на рис. 8 та 9.

Роль  $(ee)$  випромінювання в енергетичних втратах випромінювальних електронів зростає зі збільшенням їхньої енергії

$$\frac{\dot{\gamma}_{ee}}{\dot{\gamma}_{ep}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{n_e}{n_p} \frac{\Phi_{ee}}{\Phi_{pp}}. \quad (105)$$

Для  $E_{e,kin} > 1$  MeV його внесок перевищує 30%. При  $Z = 1$  у нерелятивістській границі  $\Phi_{ee}/\Phi_{pp} \approx 0.75$ , а для ультрарелятивістських енергій  $\Phi_{ee} = \Phi_{pp}$ .

### III. АДРОННЕ ГАММА-ВИПРОМІНЮВАННЯ

Зіткнення релятивістських протонів та протонів-мішеней зі значно меншою енергією (наприклад, теплових) зумовлює ряд перетворень елементарних частинок. Так, зокрема, при непружних зіткненнях таких протонів утворюються з приблизно однаковою ймовірністю  $\pi^0$ ,  $\pi^+$  і  $\pi^-$  мезони; ці піони і є майже всіма продуктами такої реакції [1].

Заряджені піони  $\pi^+$  та  $\pi^-$  за час  $t_{\pi^\pm} = 2.6 \cdot 10^{-8}$  з імовірністю 0.99988 розпадаються за схемами  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ ,  $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ . Відтак мюон та антимюон за час  $t_{\mu^\pm} = 2.2 \cdot 10^{-6}$  стають джерелами електронів та позитронів (рис. 15) завдяки реакціям  $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$ ,  $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ , які реалізуються практично в усіх випадках; з імовірністю 0.014 реакції відбуваються за тими ж схемами, але з додатковим утворенням  $\gamma$ -кванта; імовірність інших розпадів менша за  $3 \times 10^{-5}$  [1, с.27]. Ці реакції повинні зумовлювати потік нейтрино від ЗН.

Нейтральні піони за час  $t_{\pi^0} = 8.4 \cdot 10^{-17}$  с розпадаються на два  $\gamma$ -кванти за схемою  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ . Імовірність такого розпаду становить 0.98823, у 0.01174 випадках нейтральний піон розпадається за схемою  $\pi^0 \rightarrow \gamma e^- e^+$ ; імовірність інших реакцій є меншою за  $4 \times 10^{-5}$  [1, с.31]. Генерація гамма-квантів унаслідок розпаду нейтральних піонів домінує в адронному<sup>6</sup> гамма-випромінюванні.

В астрофізичних застосуваннях важливим може бути також внесок в адронне гамма-випромінювання й від розпадів  $\eta$ -мезонів, які відбуваються за різними схемами, основними з яких є  $\eta \rightarrow 2\gamma$  (39.31%),  $\eta \rightarrow 3\pi^0$  (32.57%),  $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$  (22.7%) and  $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$  (4.60%) [1, с.31]. Під час розпаду  $\eta$ -мезонів утворюються в середньому (в розрахунку на один розпад) приблизно 3.2  $\gamma$ -фотона; середня енергія, яка передається всім цим фотонам становить  $0.81E_\eta$  [39].

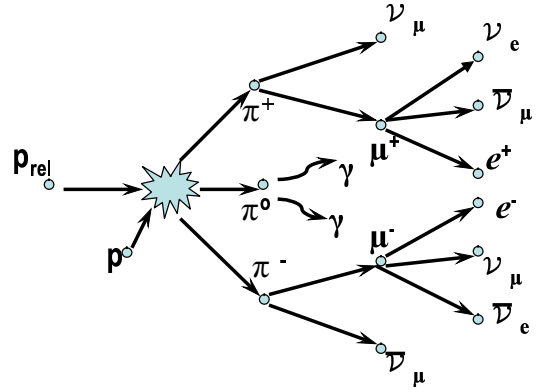


Рис. 15. Схематичне зображення основних процесів перетворення частинок унаслідок зіткнення релятивістсько-го протона з протоном значно нижчої енергії.

#### A. ПЕРЕРІЗ УТВОРЕННЯ НЕЙТРАЛЬНИХ ПІОНІВ УНАСЛІДОК $pp$ -ЗІТКНЕНЬ

Повний поперечний переріз утворення  $\pi^0$  мезонів під час непружного (“inelastic”) зіткнення,  $\sigma_{\pi^0}(E_p)$ , пов’язаний із диференціальним перерізом  $d\sigma_{\pi^0}(E_\pi, E_p)/dE_\pi$  таким виразом [40]:

$$\sigma_{\pi^0}(E_p) = \int_0^{E_{\pi, \max}} \frac{d\sigma_{\pi^0}(E_\pi, E_p)}{dE_\pi} dE_\pi. \quad (106)$$

З метою використання експериментальних даних з перерізу  $\sigma_{\pi^0}(E_p)$  диференціальний переріз записуємо як [41, 42]

$$\frac{d\sigma_{\pi^0}(E_\pi, E_p)}{dE_\pi} = \sigma_{\pi^0}(E_p) \tilde{F}_\pi(E_\pi, E_p), \quad (107)$$

де  $\tilde{F}_\pi(E_\pi, E_p)$  — нормований спектр нейтральних піонів, тобто

$$\int_0^\infty \tilde{F}_\pi(E_\pi, E_p) dE_\pi = \tilde{n}, \quad (108)$$

де  $\tilde{n} = 1$  (параметр  $\tilde{n}$  може дещо відрізнитися від одиниці; його введено в [39] для нормування спектра випромінювання; див. деталі далі).

<sup>6</sup>Адрони — це баріони (найвідомішими з баріонів є протони й нейтрони), утворені з трьох кварків, та мезони, що складаються з кварка й антикварка.



У публікаціях величини перерізу часто подають для певних значень інваріанта  $\sqrt{s}$ . За означенням  $s = E_{\text{CMS}}^2$ , де  $E_{\text{CMS}}$  — повна енергія системи взаємодіючих частинок (налітаючої  $a$  і мішені  $b$ ) в системі відліку центра мас (у цій системі повний імпульс дорівнює нулеві). Повна енергія системи до взаємодії в лабораторній системі відліку (в цій системі мішень перебуває в стані спокою) є  $W = E_{\text{LAB}} + m_b c^2$ , де  $E_{\text{LAB}}$  — повна енергія налітаючої частинки. Отож,  $s = (m_a c^2)^2 + (m_b c^2)^2 + 2(m_b c^2)E_{\text{LAB}}$ . Тому для протон-протонного зіткнення енергію налітаючого протона в лабораторній системі перераховують згідно з

$$E_p = \frac{(\sqrt{s})^2}{2m_p c^2} - m_p c^2 \quad (109)$$

або  $E_p = 533 (\sqrt{s})^2$  (TeV), якщо  $\sqrt{s} \gg m_p c^2$ .

Експериментальні дані з перерізу непружних протон-протонних зіткнень наведено на рис. 16. Вони показують, що повний переріз  $\sigma_{\pi^0}(E_p)$  швидко зростає з порогової енергії  $E_{p,\text{kin}} \simeq 0.3$  GeV до 28-30 mb на  $E_{p,\text{kin}} \leq 2$  GeV; відтак зростає лише логарифмічно (рис. 16). Це демонструє просте наближення [45]:

$$\sigma_{\pi^0}(E_p) = 30 \cdot [0.95 + 0.06 \ln(E_{p,\text{kin}}/1 \text{ GeV})] \text{ mb} \quad (110)$$

(1 mb =  $10^{-27}$  см<sup>2</sup>), яке можна використати для  $E_{p,\text{kin}} \geq 1$  GeV, а для менших енергій брати  $\sigma_{\pi^0}(E_p) = 0$ .

Детальнішу апроксимацію перерізу для  $E_p < 1$  GeV, як наприклад у [42], не змінює помітно гамма-потоків навіть на малих енергіях фотонів, якщо спектр протонів простягається понад 10 GeV, й тому повний потік зумовлений, в основному, протонами з енергією більше від кількох GeV. Відомі й інші апроксимації, наприклад, кусково-степеневі ([43] чи формула (3) в [42], остання продовжена на вищі енергії в розділі 2.2 роботи [41]). Порівняння кількох параметризацій диференціального та повного перерізів проведено в додатку до роботи [44].

Однією з останніх апроксимацій, яка відтворює експериментальні дані до  $E_p \approx 20$  TeV та чисельні результати (програма SIBYLL) до  $E_p \sim 10^4$  TeV, наведена в роботі [39] та на рис. 16 (лінія з довгим пунктиром). Як бачимо, ця апроксимація дещо переоцінює переріз на найвищих енергіях. Зміна в ній двох коефіцієнтів<sup>7</sup> робить її більш відповідною сучасним експериментальним даним. Із цими змінами вона виглядає так:

$$\sigma_{\pi^0}(E_p) = (34.3 + 1.68L + 0.21L^2) \left[ 1 - \left( \frac{E_{\text{th}}}{E_p} \right)^4 \right]^2 \text{ mb}, \quad (111)$$

де  $L = \ln(E_p/1 \text{ TeV})$ ;  $\sigma_{\pi^0} = 0$  для  $E_p < E_{\text{th}}$  (рис. 16, суцільна лінія).

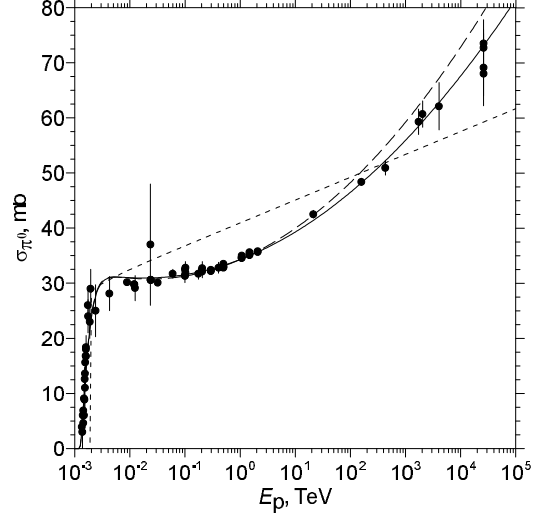


Рис. 16. Експериментальні дані з перерізу  $\sigma_{\pi^0}(E_p)$  (темні кружечки з похибками) та апроксимації: штрихована лінія з коротким пунктиром (110) [45], штрихована лінія з довгим пунктиром [39], суцільна лінія (111). Дані експериментів з енергіями до  $E_p \approx 2$  TeV взято з [39], для  $E_p \approx 2$  TeV–20 PeV з [46–48]; вищі енергії досягаються на Великому адронному колайдері [49–52].

## В. СПЕКТР НЕЙТРАЛЬНИХ ПІОНІВ

Спектр нейтральних піонів узагалі розрахувати доволі складно. Для цього використовують спеціалізовані програми, наприклад, SIBYLL [53], QGSJET [54], RYTHIA [55] та ін.; вони базуються на моделях взаємодій та експериментальних даних. Проте існують певні параметризації, які зручно використовувати для задач, де їхня точність є прийнятною. Так, розподіли  $F_\pi$ , розраховані програмою SIBYLL, апроксимуються виразом [39]

$$F_\pi(x_\pi, E_p) = 4\alpha B_\pi x_\pi^{\alpha-1} \left( \frac{1 - x_\pi^\alpha}{1 + r x_\pi^\alpha (1 - x_\pi^\alpha)} \right)^4 \times \left( \frac{1}{1 - x_\pi^\alpha} + \frac{r(1 - 2x_\pi^\alpha)}{1 + r x_\pi^\alpha (1 - x_\pi^\alpha)} \right) \left( 1 - \frac{m_\pi}{x_\pi E_p} \right)^{1/2} \quad (112)$$

з параметрами

$$B_\pi = a + 0.25, \quad \alpha = \frac{0.98}{\sqrt{a}}, \quad r = \frac{2.6}{\sqrt{a}} \quad (113)$$

$$a = 3.67 + 0.83L + 0.075L^2, \quad L = \ln(E_p/1 \text{ TeV}). \quad (114)$$

Кількість  $\pi^0$  мезонів в інтервалі енергій  $(E_\pi, E_\pi + dE_\pi)$  на одне  $pp$  зіткнення протона з енергією  $E_p$  визначається як

$$\tilde{F}_\pi(E_\pi, E_p) dE_\pi = F_\pi(E_\pi, E_p) dE_\pi / E_p = F_\pi(x_\pi, E_p) dx_\pi; \quad (115)$$

<sup>7</sup>У роботі [39] коефіцієнти біля  $L$  та  $L^2$  були відповідно 1.88, 0.25.

слід зауважити, що повна кількість нейтральних піонів становить [39]

$$\int_0^1 F_\pi(x_\pi, E_p) dx_\pi = B_\pi(E_p). \quad (116)$$

У роботі [39] наведено також апроксимацію  $F_\pi$ , яка розраховується програмою QGSJET. Варто зазначити, що результати різних чисельних розрахунків дещо різняться між собою, оскільки експериментальні дані, на яких вони базуються, містять систематичні похибки (див. рис. 3 в роботі [39]; на енергіях  $x_\pi \gtrsim 4 \times 10^{-2}$  обидві програми добре узгоджуються). Автори праці [39] надають перевагу використанню даних SIBYLL.

Для врахування внеску в гамма-випромінювання від розпадів  $\eta$ -мезонів зручно використати апроксимацію розподілу  $F_\eta$  [39]

$$F_\eta(x_\eta, E_p) = (0.55 + 0.028 \ln x_\eta) \left(1 - \frac{m_\eta}{x_\eta E_p}\right) F_\pi(x_\eta, E_p) \quad (117)$$

і  $F_\eta = 0$  для  $x_\eta < m_\eta c^2 / E_p$ , де  $x_\eta = E_\eta / E_p$ .

Для  $x_\pi \geq 10^{-3}$ , у діапазоні  $0.1 \leq E_p \leq 10^5$  TeV, апроксимація (112) відтворює чисельні результати в межах похибки 10%; точність (117) дещо менша, але достатня для застосувань, оскільки домінує розпад  $\pi^0$  мезонів (рис. 17).

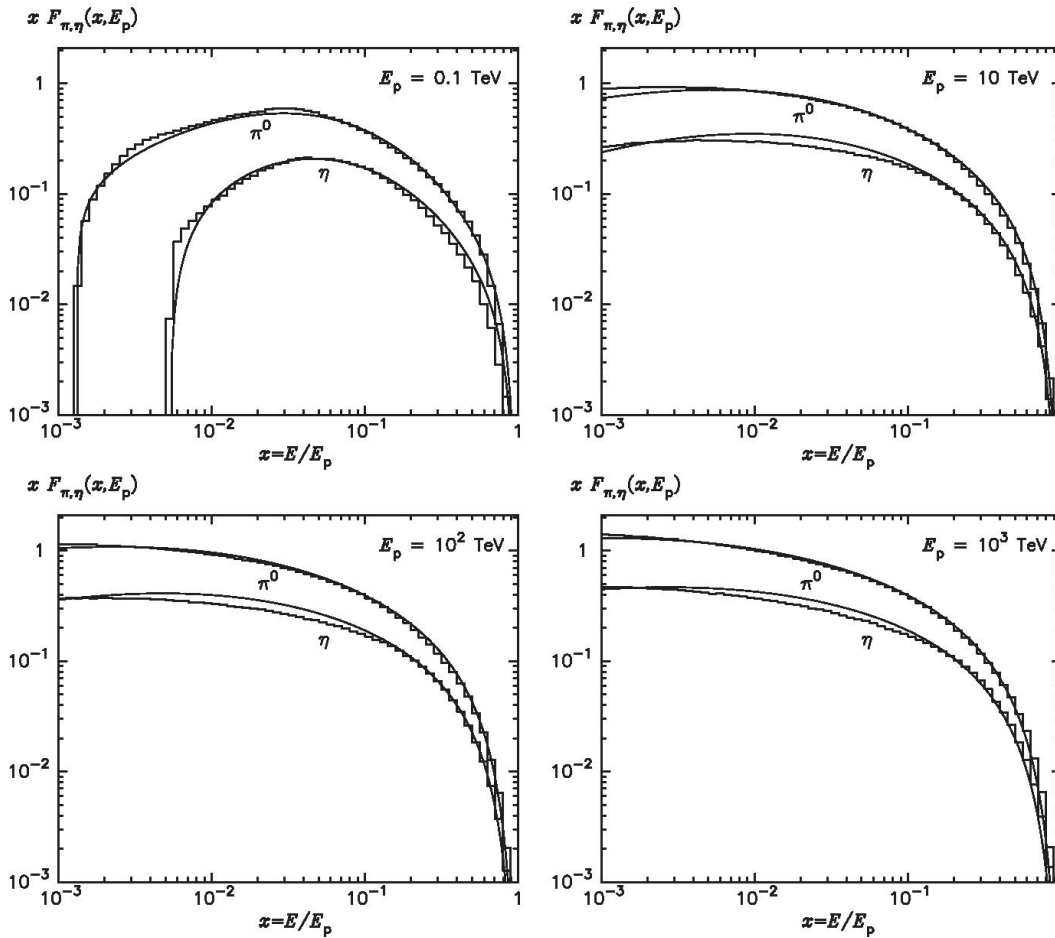


Рис. 17. Спектри піонів і мезонів, одержані програмою SIBYLL (гістограми) та з аналітичних апроксимацій (112) і (117) (суцільні лінії). Розрахунки наведено для кількох значень енергії  $E_p$  налітаючого протона [39].

**С. РОЗРАХУНОК  
ГАММА-ВИПРОМІНЮВАННЯ. ПІДХІД А:  
НАБЛИЖЕННЯ СПЕКТРА ПІОНІВ  
 $\delta$ -ФУНКЦІЄЮ**

Описаний у цьому підрозділі підхід до опису гамма-випромінювання представлено в роботі [45].

Випромінювальна здатність  $q_\gamma(E_\gamma)$  елемента об'єму з протонами-мішенями визначається як [45]

$$q_\gamma(E_\gamma) = 2 \int_{E_{\pi,\min}(E_\gamma)}^{E_{\pi,\max}} \frac{q_\pi(E_\pi)}{\sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2 c^4}} dE_\pi \frac{\text{фотонів}}{(\text{см}^3 \text{ с еВ})}, \quad (118)$$

де фактор 2 з'являється через те, що внаслідок розпаду піона виникає два фотони,  $E_{\pi,\max}(E_{p,\max})$  — максимальна енергія піона, який можна створити популяцією релятивістських протонів,  $q_\pi(E_\pi)$  — випроміню-

новальна здатність нейтральних піонів, а мінімальна енергія піона, необхідна для створення фотона з енергією  $E_\gamma$  є (напр., [44, 45])

$$E_{\pi, \min} = E_\gamma + m_\pi^2 c^4 / 4E_\gamma. \quad (119)$$

Загалом випромінювальна здатність нейтральних піонів  $q_\pi(E_\pi)$  виражається формулою [56]:

$$q_\pi(E_\pi) = c \sum_{ik} n_k \int_{E_i} N(E_i) \frac{d\sigma_{ik}(E_\pi, E_i)}{dE_\pi} dE_i, \quad (120)$$

де  $n_k$  — густина ядер-мішеней типу  $k$  в міжзоряно-му середовищі,  $N(E_i)$  — спектр розподілу налітаючих ядер типу  $i$  з енергією  $E_i$  і  $d\sigma_{ik}(E_\pi, E_i)/dE_\pi$  — диференційний переріз утворення нейтральних піонів енергії  $E_\pi$  із частинок з енергією  $E_i$ .

Для взаємодії протонів вираз (120) переписуємо так:

$$q_\pi(E_\pi) = c n_H \int_{E_{p, \min}(E_\pi)}^{E_{p, \max}} N(E_p) \frac{d\sigma_{\pi^0}(E_\pi, E_p)}{dE_p} dE_p \quad \text{піонів}/(\text{см}^3 \text{ с eВ}), \quad (121)$$

де  $N(E_p)$  — ізотропний розподіл протонів за енергіями,  $E_p$  — повна енергія протона,  $E_{p, \max}$  — максимальна енергія протона в популяції (залежить від типу розподілу  $N(E_p)$ ; часто можна покласти  $\infty$  замість  $E_{p, \max}$  і  $E_{\pi, \max}$ ). З кінематики зіткнень отримуємо, що мінімальна повна енергія протона  $E_{p, \min}$ , необхідна для утворення нейтрального піона з повною енергією  $E_\pi$ , є [30]

$$E_{p, \min} = m_p c^2 + 2E_\pi + m_\pi^2 c^2 / 2m_p. \quad (122)$$

Звідси бачимо, що нейтральні піони народжуються лише тоді, якщо повна енергія протона  $E_p$  є вищою за порогову

$$E_{\text{th}} = m_p c^2 + 2m_\pi c^2 + m_\pi^2 c^2 / 2m_p = 1.22 \text{ GeV}/c^2; \quad (123)$$

відповідний пороговий гамма-фактор протона  $\gamma_{\text{th}} = 1.298$ .

У розрахунках часто розглядають лише взаємодію між протонами. Коли необхідно, роль важких ядер на практиці враховують введенням додаткового множника в інтегралі (121), а саме, фактора  $\epsilon^M(E_p)$ , який є сталим  $\epsilon^M = 1.52$  для  $E_p \leq 100$  GeV й монотонно зростає до 1.85 для  $E_p = 100$  TeV (деталі див. у розділі 2.4 в [41]). Таке шкалювання враховує зміну хімічного вмісту космічних променів з енергією (тобто зміну відношення концентрацій протонів до важчих йонів), але припускає, що залежність процесу народження піонів важчими частинками (які можуть бути як налітаючими, так і мішенями) від енергії є такою ж, як і для протонів, що є явним наближенням.

Для розрахунку спектра гамма-випромінювання внаслідок розпаду піонів можливим є використання спеціалізованих програм, наприклад, SIBYLL чи QGSJET. Детальні підходи до розрахунків для енергій  $E_p < 1$  TeV описано в працях [42, 57–59].

Однак показано [44], що простий формалізм, описаний у статті [45], досить точно відтворює детальні розрахунки, зокрема зі статті [60]. У цьому підході використано т. зв. наближення  $\delta$ -функції для спектра піонів, породжених протоном з енергією  $E_p$ :

$$\tilde{F}_\pi(E_\pi, E_p) = \tilde{n} \delta(E_\pi - \kappa E_{p, \text{kin}}), \quad (124)$$

і апроксимацію повного перерізу  $\sigma_{\pi^0}(E_p)$ . Параметр  $\kappa$  визначає середню частку кінетичної енергії протона, передану мезону під час одного зіткнення. У широкому діапазоні енергій гамма-фотонів, від GeV до TeV,  $\kappa \approx 0.17$ ; ця величина враховує також  $\sim 6\%$  внесок від народження  $\eta$ -мезонів [45]. Тому, в середньому, піон з енергією  $E_\pi$  утворюється протоном з енергією

$$E_{p, \text{ave}} = m_p c^2 + E_\pi / \kappa. \quad (125)$$

Отже, у підході [45], за використання (124) в (107) і (121), отримуємо наближення для спектра нейтральних піонів

$$q_\pi(E_\pi) = \tilde{n} \frac{c n_H}{\kappa} \sigma_{\pi^0} \left( m_p c^2 + \frac{E_\pi}{\kappa} \right) N \left( m_p c^2 + \frac{E_\pi}{\kappa} \right). \quad (126)$$

Використовуючи вираз (126) в (118), одержуємо спектр гамма-випромінювання  $q_\gamma(E_\gamma)$  внаслідок утворення і розпадів піонів, для довільного, достатньо широкого і гладкого розподілу  $N(E_p)$  релятивістських протонів. У [44] показано, що такий спектр збігається з детальними розрахунками [60] у межах коефіцієнта 1.3.

#### D. РОЗРАХУНОК ГАММА-ВИПРОМІНЮВАННЯ. ПІДХІД Б: ДОКЛАДНІШИЙ ОПИС СПЕКТРА ПІОНІВ

Описаний у цьому підрозділі підхід до опису гамма-випромінювання представлено в роботі [39].

У випадку, якщо спектр протонів  $N(E_p)$  містить різкі особливості, як обрізання чи піки, наближення (124) буде зумовлювати суттєві похибки спектру гамма-випромінювання в областях, де домінує внесок відповідних протонів. Тоді необхідно проводити детальне чисельне моделювання. Важливо, однак, що

запропоновано параметризацію й для такого випадку [39]; наближений аналітичний опис дозволяє не лише зменшити комп'ютерний час, але й сприяє кращому розумінню процесів формування спектра випромінювання. Формалізм [39] полягає в аналітичному

наближенні розподілу піонів  $F_\pi(E_\pi, E_p)$ , але вже не  $\delta$ , а складнішою функцією. Так, розподіли  $F_\pi$ , розраховані програмою SIBYLL, апроксимуються виразом (112).

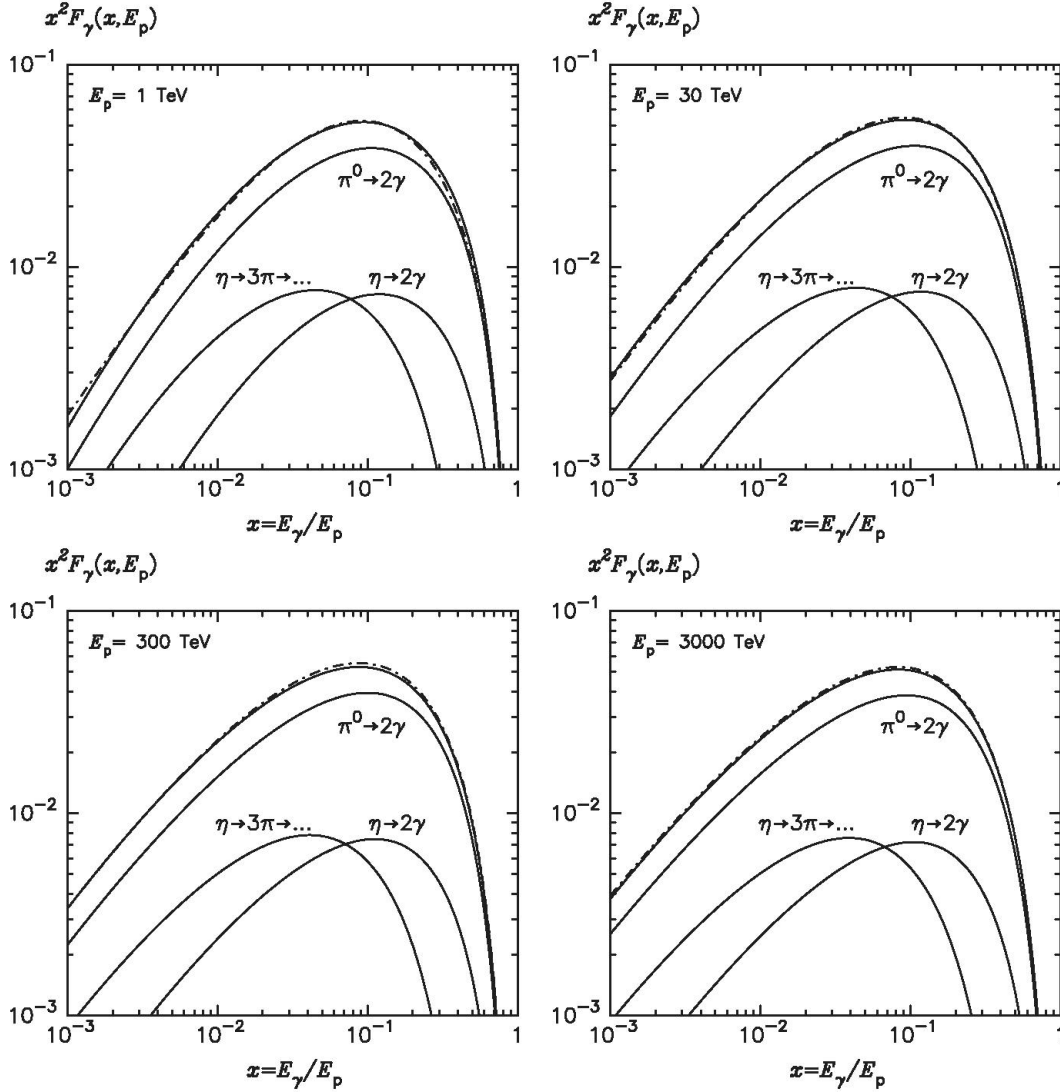


Рис. 18. Спектр гамма-променів, породжених унаслідок  $pp$ -зіткнень для різних енергій  $E_p$  [39]. Суцільні криві — чисельні розрахунки програми SYBILL з урахуванням розпадів  $\pi^0$  і  $\eta$  мезонів (показано внески часткових процесів та сумарний спектр); штрих-пунктирні криві — аналітична апроксимація (133).

Якщо підставити (107) в (121) і далі в (118) та змінити порядок інтегрування, тоді одержимо

$$q_\gamma(E_\gamma) = c n_H \int_{E_{p,\min}(E_\gamma)}^{E_{p,\max}} \sigma_{\pi^0}(E_p) N(E_p) \tilde{F}_\gamma(E_\gamma, E_p) dE_p \quad (127)$$

чи в інших позначеннях

$$q_\gamma(E_\gamma) = \int_{E_{p,\min}(E_\gamma)}^{E_{p,\max}} N(E_p) p(E_p, E_\gamma) dE_p, \quad (128)$$

спектральний розподіл випромінювання “одного” протона з енергією  $E_p$  ми означили як

$$p(E_p, E_\gamma) = c n_H \sigma_{\pi^0}(E_p) \tilde{F}_\gamma(E_\gamma, E_p), \quad (129)$$

де

$$\tilde{F}_\gamma(E_\gamma, E_p) = 2 \int_{E_{\pi,\min}(E_\gamma)}^{E_{\pi,\max}} \frac{\tilde{F}_\pi(E_\pi, E_p) dE_\pi}{\sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2 c^4}}. \quad (130)$$

Із практичних міркувань зручно ввести параметр  $x = E_\gamma/E_p$  (тоді  $\tilde{F}_\gamma dE_p = F_\gamma dE_p/E_p = F_\gamma dx/x$ ) й переписати (127) і (130),

$$q_\gamma(E_\gamma) = cn_H \int_0^1 \sigma_{\pi^0}(E_\gamma/x) F_\gamma(x, E_\gamma/x) N(E_\gamma/x) \frac{dx}{x}, \quad (131)$$

розподіл фотонів пов'язаний із розподілом піонів так:

$$F_\gamma(x, E_p) = 2 \int_{x_{\pi, \min}(x)}^1 \frac{F_\pi(x_\pi, E_p) dx_\pi}{\sqrt{x_\pi^2 - m_\pi^2 c^4/E_p^2}}. \quad (132)$$

Кількість фотонів на одне  $pp$ -зіткнення в інтервалі енергій  $(E_\gamma, E_\gamma + dE_\gamma)$  визначаємо як  $\tilde{F}_\gamma(E_\gamma, E_p) dE_\gamma = F_\gamma(E_\gamma, E_p) dE_\gamma/E_p = F_\gamma(x, E_p) dx$ .

Спектр гамма-променів  $F_\gamma(x, E_p)$ , породжений "одним" протоном (тобто в розрахунку на одне  $pp$ -зіткнення) з енергією  $E_p$ , наближено можна записати у вигляді [39]

$$F_\gamma(x, E_p) = B_\gamma \frac{\ln(x)}{x} \left( \frac{1 - x^{\beta_\gamma}}{1 + k_\gamma x^{\beta_\gamma} (1 - x^{\beta_\gamma})} \right)^4 \times \left[ \frac{1}{\ln(x)} - \frac{4\beta_\gamma x^{\beta_\gamma}}{1 - x^{\beta_\gamma}} - \frac{4k_\gamma \beta_\gamma x^{\beta_\gamma} (1 - 2x^{\beta_\gamma})}{1 + k_\gamma x^{\beta_\gamma} (1 - x^{\beta_\gamma})} \right], \quad (133)$$

$$B_\gamma = 1.30 + 0.14L + 0.011L^2, \quad (134)$$

$$\beta_\gamma = \frac{1}{1.79 + 0.11L + 0.008L^2}, \quad (135)$$

$$k_\gamma = \frac{1}{0.801 + 0.049L + 0.014L^2}. \quad (136)$$

Цей вираз одержано за використання розрахунків коду SIBYLL для розподілів  $\pi^0$  і  $\eta$  мезонів. Внесок  $\eta$  мезонів в області  $x \sim 0.1$  становить близько 25%. Чисельні розрахунки порівняно з цією апроксимацією на рис. 18. Похибка наближення менше кількох відсотків для  $E_\gamma \geq 1$  GeV; на нижчих енергіях похибка цього виразу більша, тому його не можна застосовувати для розрахунку повної кількості гамма-променів [39].

На рис. 18 яскраво помітна властивість спектра  $F_\gamma(E_\gamma, E_p)$ : спектри для різних  $E_p$  дуже подібні, якщо поділити енергію фотонів на певну характеристичну енергію, якою є енергія протона; тобто якщо вони записані в змінних  $F_\gamma(x, E_p)$  (така властивість спостерігається для синхротронного випромінювання, з тією відмінністю, що синхротронні спектри збігаються точно). Цю властивість наочно демонструє рис. 19, де показано спектри  $F_\gamma(x, E_p)$  для  $E_p$  від 0.1 до 1000 TeV. Отже, у задачах, де можна знехтувати невеликою розбіжністю у спектрах  $F_\gamma(x, E_p)$  для різних  $E_p$ , розрахунки можна спростити, застосувавши універсальне наближення, яке відтворюватиме "середню" форму спектра й буде функцією лише змінної  $x$ . Такий підхід використав Гіллсас [61], запропонувавши

відповідну апроксимацію для кількості фотонів на інтервал  $(x, x + dx)$

$$F_\gamma(x) = 3.06x^{-1} \exp(-9.47x^{0.75}). \quad (137)$$

Ця функція показана штрихованою кривою на рис. 19.

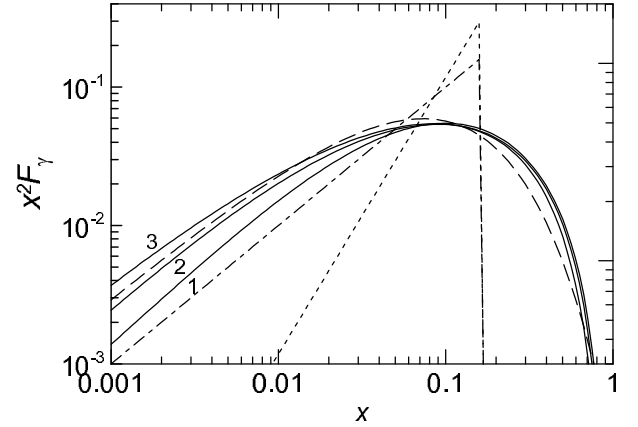


Рис. 19. Спектри  $F_\gamma(x, E_p)$  (133) для  $E_p = 0.1, 10, 1000$  TeV (суцільні криві з номерами 1, 2, 3 відповідно) та апроксимації  $F_\gamma(x)$ : штрихована крива з довгим пунктиром — (137), штрихована крива з коротким пунктиром — (145), штрих-пунктирна крива — (146). Крива з довгим пунктиром наближує спектр випромінювання протонів з енергіями  $E_p$  близько кількох десятків TeV, розрахований кодом QGSJET; суцільні криві базуються на кодї SIBYLL.

Отже, для розрахунку гамма-випромінювання від розпадів піонів у багатьох задачах, де спектри протонів містять різкі особливості чи обрізання, достатньо використовувати вираз (131) разом із (137). Коли потрібні вищі точності, то формула (131) повинна бути використана разом із (133)–(136).

Такий підхід, як зазначалося вище, можна застосувати лише для енергій фотонів  $E_\gamma \gtrsim 0.1$  TeV. На менших енергіях, аж до мінімальної порогової енергії  $E_{th}$ , опис за допомогою наближення  $\delta$ -функції, а саме (126) і (118), є точнішим. Тому для розрахунку повного спектра  $\gamma$ -випромінювання, від найменших до найвищих енергій, у [39] запропоновано зшивати два підходи: спершу розраховувати частину спектра для  $E_\gamma \geq 0.1$  TeV, тоді для  $E_\gamma \leq 0.1$  TeV, відтак параметр  $\tilde{n}$  визначатиметься вимогою зшивки обох спектрів на  $E_\gamma = 0.1$  TeV, тобто гладкого продовження спектра з вищих на нижчі енергії. Значення  $\tilde{n}$  залежить від спектра протонів; так, для  $s = 1.5, 2, 2.5$ ,  $\tilde{n} = 2.26, 1.10, 0.86$  відповідно.

Рис. 20 показує спектри  $\gamma$ -випромінювання, розраховані в різних підходах для спектра налітаючих протонів вигляду

$$N(E)dE = KE^{-s} \exp\left(-\frac{E}{E_{\max}}\right) dE. \quad (138)$$

Зазначимо, що детальні чисельні результати найкраще описати штрих-пунктирною кривою до  $E_\gamma = 0.1$  TeV і суцільною для вищих енергій.

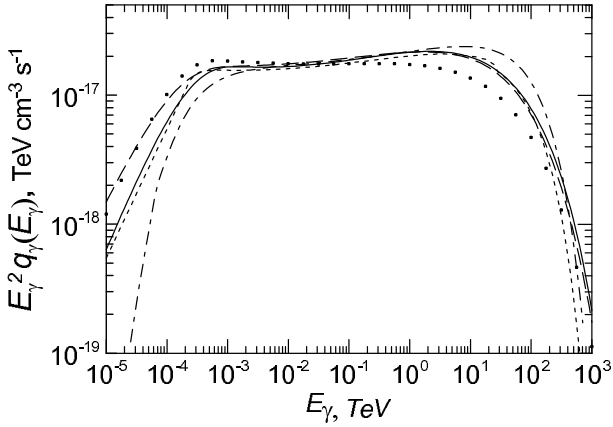


Рис. 20. Спектри гамма-променів  $q_\gamma(E_\gamma)$  у випадку спектра релятивістських протонів (138), розраховані в підході А (штрих-пунктирна крива), а також підході Б з наближеннями для  $F_\gamma(x, E_p)$ : детальна апроксимація (133) (суцільна крива), апроксимація Гілласса (137) (штрихована крива з довгим пунктиром) і апроксимація (146) з  $A = 1$  (штрихована крива з коротким пунктиром). Точки показують той самий спектр, що й суцільна крива, але для формального випадку сталого перерізу  $\sigma_{\pi^0} = 34$  mb (для  $E_p \geq 1$  GeV, для менших енергій  $\sigma_{\pi^0} = 0$ ). Розрахунки проведено для спектра протонів (138) з  $s = 2$ ,  $E_{\max} = 1000$  TeV,  $n_H = 1$  см $^{-3}$ , значення  $K$  визначали з умови  $\int_{1 \text{ TeV}}^{\infty} E_p N(E_p) dE_p = 1$  ерг см $^{-3}$ , переріз  $\sigma_{\pi^0}$  обчислювали за формулою (111).

Деякі додаткові аспекти опису адронного гамма-випромінювання коротко представлені в Додатку.

### Е. ЕНЕРГЕТИЧНІ ВТРАТИ ПРОТОНІВ УНАСЛІДОК НЕПРУЖНИХ ЗІТКНЕНЬ

Для отримання виразу для втрат “одного” протона з енергією  $E_p$  на зіткнення з утворенням піонів (за

схемою, зображеною на рис. 15) використаємо формулу (121):

$$p(E_p, E_\pi) = cn_H E_\pi \frac{d\sigma_{\pi^0}(E_\pi, E_p)}{dE_\pi} \times H(E_p - E_{p,\min}(E_\pi)) \text{ ерг}/(c \cdot \text{eB}). \quad (139)$$

Енергетичні втрати такого протона запишемо в такому вигляді:

$$-\left(\frac{dE_p}{dt}\right)_{pp} = 3 \int_0^\infty p(E_p, E_\pi) dE_\pi. \quad (140)$$

Число 3 перед інтегралом ураховує той факт, що при протонних зіткненнях імовірності утворення трьох типів піонів ( $\pi^0, \pi^+, \pi^-$ ) приблизно однакові. Для поперечного перерізу вигляду (107) та функції  $F_\pi(E_\pi, E_p)$  в дельта-наближенні (124) отримаємо:

$$-\left(\frac{dE_p}{dt}\right)_{pp} = 3\kappa \tilde{n} cn_H \sigma_{\pi^0}(E_p) E_{p,\text{kin}}, \quad (141)$$

константа  $3\kappa = 0.51$ , що узгоджується з коефіцієнтом “непружності”  $f \approx 0.5$  у виразі (3.13) з [62]; якщо  $E_p \gtrsim 0.03$  TeV, то для простих оцінок можна використати  $\sigma_{\pi^0}(E_p) \approx 30$  mb (рис. 16).

### ПОДЯКА

Висловлюємо подяку Е. Хогу (E. Haug) за програму розрахунку перерізу  $\sigma_{ee}$  та С. Кельнерові за експериментальні дані з перерізу  $\sigma_{\pi^0}$  до енергій 2 TeV, використані на рис. 16. Огляд здійснено за часткового фінансування в межах Цільової комплексної програми НАН України з наукових космічних досліджень на 2012–2016 рр.

### ДОДАТОК. АДРОННЕ ГАММА-ВИПРОМІНЮВАННЯ: ДОДАТКОВИЙ АНАЛІЗ

Можливі ще кілька спрощень, які можуть бути зручними для якісного аналізу протонного  $\gamma$ -випромінювання.

1. Якщо розглядати лише високоенергетичні протони, тобто  $E_p \gg 1$  GeV, то масами спокою протонів  $m_p c^2 \sim 1$  GeV і піонів  $m_\pi c^2 \sim 0.1$  GeV можна знехтувати. Тоді з (122), (125), (119) і (110) випливає, що  $E_{p,\min} = 2E_\pi$ ,  $E_{p,\text{ave}} = E_\pi/\kappa = 5.88E_\pi$  (ця енергія природно вища за  $E_{p,\min}$  приблизно в три рази, бо в середньому, при зіткненнях протонів утворюються три типи піонів із майже рівними ймовірностями),  $E_{\pi,\min} = E_\gamma$  (саме так, без множника 2, бо під час розпаду нейтрального піона можуть утворюватися фотони з різними енергіями) і  $\sigma_{\pi^0} \approx \text{const}$ . Із цих формул також видно, що умову високоенергетичних протонів можна переформулювати в термінах високоенергетичних гамма-квантів: формули значно спрощуються, якщо нас цікавлять лише фотони з енергіями  $E_\gamma \gg 10$  GeV.

2. Для степеневого розподілу протонів за енергіями  $N(E_p) = K E_p^{-s}$  та високоенергетичних протонів, з (126) і (118) одержуємо, що

$$q_\gamma(E_\gamma) = 2\tilde{n} cn_H \kappa^{s-1} s^{-1} \sigma_{\pi^0} K E_\gamma^{-s}. \quad (142)$$

Тобто спектр  $pp$   $\gamma$ -випромінювання наближено також є степеневим із тим самим показником, що й спектр початкових протонів.

3. У випадку розподілу протонів з обрізанням (138), відмінності у спектрі випромінювання внаслідок спрощеного припущення про сталий переріз демонструє точкова крива на рис. 20. Отже, при розрахунку спектрів гамма-променів важливо враховувати зміни перерізу з енергією протона.

4. Підставивши (126) в (118), одержимо вираз вигляду (127) з  $F_\gamma$  в підході А [45]:

$$\tilde{F}_\gamma(E_\gamma, E_{p,\text{ave}}) = \frac{2(\tilde{n}/\kappa)H(E_{p,\text{ave}} - E_{p,\text{ave},\text{min}}(E_\gamma))}{\sqrt{(E_{p,\text{ave}} - m_p c^2)^2 - (m_\pi c^2)^2/\kappa^2}}, \quad (143)$$

де  $H$  — функція Гевісайда (важливо зауважити, що залежність від  $E_\gamma$  в цьому виразі є лише через  $E_{p,\text{ave},\text{min}}(E_\gamma)$ ), середня енергія протона  $E_{p,\text{ave}} = E_\pi/\kappa + m_p c^2$ , мінімальна середня енергія протона, необхідна для народження  $\gamma$ -кванта з енергією  $E_\gamma$ , є  $E_{p,\text{ave},\text{min}}(E_\gamma) = E_{p,\text{ave}}(E_{\pi,\text{min}}(E_\gamma))$  й, згідно з (119), вона дорівнює

$$E_{p,\text{ave},\text{min}}(E_\gamma) = \frac{1}{\kappa} \left( E_\gamma + \frac{(m_\pi c^2)^2}{4E_\gamma} \right) + m_p c^2. \quad (144)$$

Для фотонів з  $E_\gamma \gg 10$  GeV цей вираз перетворюється в  $E_{p,\text{ave},\text{min}} = E_\gamma/\kappa$ , а (143) переписується в термінах змінної  $x = E_\gamma/E_p$  як

$$F_\gamma(x) = \frac{2\tilde{n}}{\kappa} H(\kappa - x). \quad (145)$$

Підставивши цей вираз у (131), прийнявши  $\sigma_{\pi^0} = \text{const}$  та  $N(E_p) = K E_p^{-s}$ , отримаємо, як це і повинно бути, (142).

Звертає на себе увагу той факт, що в формулі (145)  $F_\gamma(x) = \text{const}$  для  $x \leq \kappa$ , тоді як в апроксимації Гіллса (137)  $F_\gamma(x) \propto x$  для малих  $x$ , що точніше відображає детальні розрахунки (рис. 19). Причиною такої поведінки виразу (145) є те, що  $F_\pi(x_\pi)$  наближалася  $\delta$ -функцією.

Адекватнішою може бути така формальна апроксимація, яка для малих  $x$  пропорційна до  $x$  (рис. 19):

$$F_\gamma(x) = \frac{A}{x} H(\kappa - x), \quad (146)$$

Підставивши цей вираз у (131), прийнявши  $\sigma_{\pi^0} = \text{const}$  та  $N(E_p) = K E_p^{-s}$  та прирівнявши отриманий вираз до (142), матимемо, що  $A = 2(s-1)/s$ . Оскільки  $s = 2$  є найбільш типовим значенням, доцільно покласти  $A = 1$ .

5. Якою є характеристична енергія протонів  $E_{p,m}$ , які зумовлюють основний внесок у  $pp$   $\gamma$ -випромінювання у фотонах з енергією  $E_\gamma$ ? Відповідне значення  $x_m$  можна знайти, прирівнявши  $q_\gamma$ , розраховане за повною формулою (131), до добутку енергетичного спектра протонів на випромінювальну здатність “одного” протона, записаних із застосуванням  $x_m$ :

$$N(E_\gamma/x_m)p(x_m, E_\gamma/x_m) = \int_0^1 N(E_\gamma/x)p(x, E_\gamma/x) \frac{dx}{x}. \quad (147)$$

Значення  $x_m$  буде різним для різних розподілів  $N(E_p)$ . Знайдемо його для  $N(E_p) = K E_p^{-s}$  у випадку високоенергетичних фотонів. Використаймо також наближення  $\sigma_{\pi^0} = \text{const}$ ,  $F_\gamma(x) = x^{-1}H(\kappa - x)$ . У такому випадку з (147) отримаємо:

$$x_m = (s-1)^{-1/(s-1)} \kappa. \quad (148)$$

Множник перед  $\kappa$  дорівнює одиниці для  $s = 2$ , 1.3 для  $s = 1.8$  й 0.86 для 2.2. Отже, для степеневого спектра протонів високоенергетичні кванти з енергією  $E_\gamma$  переважно породжені протонами з енергією  $E_{p,m} \approx \kappa E_\gamma$ .

6. Використаймо  $\delta$ -функцію (124) з підходу [45] та підставмо її в означення  $\tilde{F}_\gamma$  (130) в підході [39]. Як результат одержимо вираз (143). Отже, обидва підходи узгоджуються.

[1] K. Nakamura *et al.* (Particle Data Group), J. Phys. G **37**, 075021 (2010).  
 [2] NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty [http://physics.nist.gov/cuu/index.html].  
 [3] R. Schlickeiser, *Cosmic ray astrophysics* (Springer,

2002).  
 [4] F. C. Jones, Phys. Rev. **167**, 1159 (1968).  
 [5] G. R. Blumenthal, R. J. Gould, Rev. Modern. Phys. **42**, 237 (1970).  
 [6] T. Jones, S. O'Dell, W. Stein, Astrophys. J. **188**, 353

- (1974).
- [7] I. V. Moskalenko & A. W. Strong, *Astrophys. J.* **528**, 357 (2000).
- [8] J. Poutaten, I. Vurm, *Astrophys. J. Suppl.* **189**, 286 (2010).
- [9] M. G. Baring, D. C. Ellison, S. P. Reynolds, I. A. Grenier, P. Goret, *Astrophys. J.* **513**, 311 (1999).
- [10] R. Schlickeiser, *Astron. Astrophys.* **213**, L23 (1989).
- [11] J. Felten, P. Morrison, *Astrophys. J.* **146**, 686 (1966).
- [12] F. Aharonian, D. Khangulyan, D. Malyshev, *astro-ph.HE/1207.0458* (2012).
- [13] R. Schlickeiser, *Astrophys. J.* **233**, 294 (1979).
- [14] O. Petruk, *Astron. Astrophys.* **499**, 643 (2009).
- [15] F. C. Jones, *Phys. Rev.* **137**, 1306 (1965).
- [16] A. M. Bykov *et al.*, *Astrophys. J.* **538**, 203 (2000).
- [17] E. Haug, *Radiation Physics and Chemistry* **75**, 1330 (2006).
- [18] В. Гайтлер, *Квантовая теория излучения* (Иноиздат, Москва, 1956).
- [19] E. Haug, *Z. Naturforsch.* **30a**, 1099 (1975).
- [20] E. Haug, *Astron. Astrophys.* **218**, 330 (1989).
- [21] E. Haug, *Solar Physics.* **178**, 341 (1998).
- [22] B. K. Fedyushin, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **22**, 140 (1952).
- [23] G. M. Garibyan, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **24**, 617 (1953).
- [24] V. N. Baier, V. S. Fadin, V. A. Khoze, *Sov. Phys. JETP* **24**, 760 (1967).
- [25] V. N. Baier, V. S. Fadin, V. A. Khoze, *Sov. Phys. JETP* **26**, 1238 (1968).
- [26] M. Maxon, E. Corman, *Phys. Rev.* **163**, 156 (1967).
- [27] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика* (Наука, Москва, 1981).
- [28] H. Bethe, W. Heitler, *Proc. Roy. Soc. London A* **146**, 83 (1934).
- [29] H. W. Koch, J. W. Moth, *Rev. Mod. Phys.* **31**, 920 (1959).
- [30] J. C. Houck, G. E. Allen, *Astrophys. J.* **167**, 26 (2006).
- [31] G. Elwert, *Ann. Phys. (Berlin)* **34**, 178 (1939).
- [32] E. Haug, *Astron. Astrophys.* **326**, 417 (1997).
- [33] R. H. Pratt, H. K. Tseng, *Phys. Rev. A* **11**, 1797 (1975).
- [34] F. Sauter, *Ann. Phys. (Berlin)* **412**, 404 (1934).
- [35] G. Elwert, E. Haug, *Solar Phys.* **20**, 413 (1971).
- [36] J. Stickforth, *Z. Phys.* **164**, 1 (1961).
- [37] E. Haug, *Astron. Astrophys.* **423**, 793 (2004).
- [38] G. Racah, *Nuovo Cim.* **11**, 461 (1934).
- [39] S. R. Kelner, F. A. Aharonian, V. V. Bugayov, *Phys. Rev. D.* **74**, 034018 (2006).
- [40] C. Cheng, *Space Sci. Rev.* **13**, 3 (1972).
- [41] M. Mori, *Astrophys. J.* **478**, 225 (1997).
- [42] C. D. Dermer, *Astron. Astrophys.* **157**, 223 (1986).
- [43] F. W. Stecker, *Astrophys. J.* **185**, 499 (1973).
- [44] E. Domingo-Santamaria, D. Torres, *Astron. Astrophys.* **444**, 403 (2005).
- [45] F. A. Aharonian, A. M. Atoyan, *Astron. Astrophys.* **362**, 937 (2000).
- [46] S. Klimenko, J. Konigsberg, T. Liss, *Fermilab Report FN-0741* (2003). [<http://lss.fnal.gov/archive/test-fn/0000/fermilab-fn-0741.pdf>].
- [47] F. Abe *et al.*, *Phys. Rev. D* **50**, 5550 (1994).
- [48] J. Rushbrooke, Preprint CERN-EP-85-178, (1985). [<https://cdsweb.cern.ch/record/163703>].
- [49] The ATLAS Collaboration, *Nature Commun.* **2**, 463 (2011).
- [50] The TOTEM Collaboration, *Europhys. Lett.* **96**, 21002 (2011).
- [51] M. Poghosyan, preprint hep-ex/1109.4510 (2011).
- [52] A. Zsigmond, preprint hep-ex/1205.3142 (2012).
- [53] R. S. Fletcher, T. K. Gaisser, P. Lipari, T. Stanev, *Phys. Rev. D* **50**, 5710 (1994).
- [54] N. N. Kalmykov, S. S. Ostapchenko, A. I. Pavlov, *Nucl. Phys. B, Proc. Suppl.* **52**, 17 (1997).
- [55] T. Sjöstrand, S. Mrennac, P. Skands, *Computer Phys. Commun.* **82**, 74 (1994).
- [56] S. A. Stephens, G. D. Badhward, *Astrophys. Space Sci.* **76**, 213 (1981).
- [57] C. D. Dermer, *Astrophys. J.* **307**, 47 (1986).
- [58] T. Kamae, T. Abe, T. Koi, *Astrophys. J.* **620**, 244 (2005).
- [59] T. Kamae, N. Karlsson, T. Misuno, T. Abe, T. Koi, *Astrophys. J.* **647**, 692 (2006).
- [60] T. Kamae, T. Abe, T. Koi, *Astrophys. J.* **620**, 244 (2005).
- [61] A. M. Hillas, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **31**, R95 (2005).
- [62] F. A. Aharonian, *Very High Energy Cosmic Gamma Radiation* (World Scientific Publishing, London, 2004).

## INTERACTIONS OF PARTICLES ACCELERATED IN SUPERNOVA REMNANTS. GAMMA-RAY EMISSION

O. Petruk, V. Beshley

*Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics,  
3b, Naukova St., Lviv, UA-79060, Ukraine*

A systematic review of the main processes and methods of calculation of gamma-ray emission caused by charged relativistic particles in supernova remnants is presented: the inverse Compton effect, non-thermal bremsstrahlung and emission due to inelastic proton-proton collisions.