ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 17, № 2 (2013) 2001(15 с.)

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 17, No. 2 (2013) 2001(15 p.)

ДРОБОВІ СТАТИСТИКИ: ПОГЛЯД З БОКУ СТАТИСТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Андрій Ровенчак
Кафедра теоретичної фізики,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005
(Отримано 03 квітня 2013 р.)

У статті зроблено огляд основних способів уведення дробової (проміжної) квантової статистики тотожних частинок поза традиційними розподілами Бозе–Айнштайна та Фермі–Дірака. Розглянуто квантовомеханічні узагальнення — еніони і q-деформовані алґебри операторів породження–знищення. Детально проаналізовано статистико-механічний підхід до цього питання на прикладі статистик Джентіле, Голдейна–Ву та Поліхронакоса. Окремо описано неекстенсивні статистики. Обговорено зв'язок між різними типами дробових статистик.

Ключові слова: квантові статистики, статистика Бозе–Айнштайна, статистика Фермі–Дірака, еніони, q-деформація, статистика Джентіле, статистика Голдейна–Ву, статистика Поліхронакоса, статистика Цалліса.

PACS number(s): 05.30.−d, 05.30.Ch, 05.30.Pr, 05.20.−y

ЗМІСТ

I. ВСТУП

Основи сучасної статистичної фізики закладено переважно у другій половині XIX століття у працях Рудольфа Клаузіуса, Джеймса Клерка Максвелла, Людвіґа Больцмана, Джосаї Вілларда Ґіббса та ін. Протягом 1850-х–1860-х рр. Клаузіус сформулював поняття ентропії, увівши сам термін 1865 р. [1]. Розподіл молекул за швидкостями в ідеальному газі отримав Максвелл [2, 3], результати якого узагальнив Больцман [4]. Згодом Больцман запропонував спосіб розрахунку кількості мікростанів [5], фактично пов'язавши з ним ентропію, проте відомий вираз $S = k \log W$ уперше явно з'явився у праці Макса Планка 1901 р. [6]. На парадокс, який пов'язаний із пізнішим квантовомеханічним принципом тотожності частинок, уперше увагу звернув, мабуть, Ґіббс [7], йому ж належать уведення поняття статистико-механічних ансамблів і виведення формули для розподілу ймовірностей [8], що становить основу класичної статистики Больцмана–Ґіббса.

Історія квантових розподілів бере початок у працях Сат'єндраната Бозе [9] й Альберта Айнштайна [10,11], що з'явилися в 1924–25 роках. Бозе застосував комбінаторний підхід до квантів світла й за його допомогою вивів розподіл Планка. Цю ідею Айнштайн узагальнив на частинки з ненульовою масою, унаслідок чого передбачив явище накопичення макроскопічної кількості частинок у стані з нульовим імпульсом — явище, яке називають конденсацією Бозе–Айнштайна.

1925 року Вольфґанґ Паулі, щоб пояснити правила заповнення електронних оболонок атомів хімічних елементів, увів правило [12], відоме тепер як принцип заборони, названий його іменем. Роком пізніше Енріко Фермі [13] та Поль Дірак [14] отримали функцію розподілу для частинок, які підкоряються принципові заборони Паулі, що відповідає антисиметричним хвильовим функціям.

Ідея Паулі спонукала до введення нового квантового числа, яке назвали спіном [15]. Маркус Фірц [16] сформулював у 1939 р. твердження, знане як теорема про зв'язок спіну зі статистикою. Систематичніший підхід до цього питання дано у працях Паулі [17] і Юліана Швінґера [18]. У спрощеному вигляді теорема звучить так: хвильова функція системи тотожних частинок із цілим спіном симетрична щодо їх перестановок, а для частинок із півцілим спіном є антисиметричною щодо перестановок. Частинки із цілим спіном описує статистика Бозе–Айнштайна, відповідно їх називають *бозонами*; для частинок із півцілим спіном справедлива статистика Фермі–Дірака, тому їх називають *ферміонами*.

Згадані два типи частинок вичерпують можливі варіанти як значень спіну, так і статистики квантових частинок. Дихотомія між бозонами та ферміонами, як буде сказано нижче, порушується лише в разі переходу від три- до двовимірного простору. Не позбавленим сенсу є й припущення про те, що в реальних багаточастинкових системах відхилення від цієї дихотомії можливе як ефективний наслідок взаємодії. Такі міркування дають підстави розглядати певні узагальнення квантових статистик Бозе і Фермі.

Спрощено можна виділити два підходи до таких узагальнень: перший ґрунтується переважно на квантовомеханічному розгляді, тобто аналізі властивостей хвильової функції, комутаційних співвідношень тощо, а другий — пов'язаний із методами статистичної фізики, тобто підрахунком кількості мікростанів, узагальненням поняття ентропії та ін. Треба відзначити, що такий поділ є досить умовним, оскільки між обома підходами існує доволі тісний зв'язок.

Першу відому спробу[1] узагальнення статистики зробив Джованні Джентіле (мол.) у 1940 р. [21]. Він запропонував проміжну статистику, у якій максимально дозволене заповнення рівня було обмежене деяким числом d. Також Джентіле та його колеги зробили спробу застосувати цю статистику для пояснення деяких властивостей рідкого гелію [22], див. також [23] і поклики там. Аналіз труднощів, які виникають із квантовомеханічним підходом до статистики Джентіле, можна знайти у праці Борселліно [24].

Герберт Сидні Ґрін запропонував 1953 р. узагальнення, відоме як парастатистика [25]. Певні модифікації комутаційних співвідношень між операторами породження–знищення дозволяють розглядати ситуації, коли хвильові функції $k > 1$ парабозонів є антисиметричними при перестановці не більше k частинок, і відповідно k параферміонів залишаються симетричними за таких перестановок [26, Гл. 4]

Ціла низка модифікацій алґебри операторів породження–знищення приводить до різноманітних проміжних статистик, див. [27] і поклики там. Часто використовують так звані q-деформовані комутатори або q-мутатори $[a, a^\dagger]_q = aa^\dagger - qa^\dagger a$, порівн. [28–30]. При цьому для роботи необхідний відповідний математичний апарат, який називають *q-численням* або *квантовим аналізом* [31]. Варто відзначити також вивчення термодинаміки у просторах із деформованими комутаційними співвідношеннями для операторів координати та імпульсу, що приводять до існування мінімальної довжини [32].

1977 року Йон Манне Лайнос і Ян Міргайм [33] показали, що у двовимірній системі фаза хвильової функції при перестановці двох частинок може набувати довільних значень, на відміну від тривимірного випадку. Френк Вілчек у 1982 р. [34] запропонував для таких частинок назву *еніони* (англ. 'anyon', від 'any' — 'будь-який'). У 1975 р. було теоретично передбачено [35], а 1980 експериментально відкрито [36] квантовий ефект Голла — явище квантування за низьких температур у двовимірному електронному газі голлівської провідності $\sigma_{\mathrm{H}} = \nu e^2/h$, де ν — ціле число. Після відкриття у 1982 р. дробового квантового ефекту Голла (ν — раціональний дріб) [37] було запропоновано кілька теорій цього явища, які ґрунтувалися на моделях збуджень із дробовим зарядом [38–41]. Виявилося, що відповідні квазічастинки можуть бути еніонами [39, 41].

Данкан Голдейн у 1991 р. ввів узагальнення принципу заборони Паулі, запропонувавши інтерполяційний між бозонною й ферміонною границями вираз для підрахунку кількості мікростанів [42]. Йон-Ші Ву в 1994 р. отримав функцію розподілу в цій статистиці [43], що отримала назву *дробової виключної статистики* (англ. *fractional exclusion statistics*). Виявилося, що такі ж вирази для термодинамічного потенціалу й рівняння стану відповідають задачі про еніони на найнижчому рівні Ландау [44]. Однак, незважаючи на цей результат і на те, що підхід Голдейна є альтернативною моделлю для опису дробового квантового ефекту Голла, безпосереднього зв'язку між еніонною і дробовою виключною статистикою немає [45, Chap. 5]. Є також інші способи запису кількості мікростанів систем із дробовою статистикою [20, 46], один із яких буде проаналізовано докладніше.

В окрему галузь можна виділити підходи, пов'язані з узагальненнями означення ентропії, започатковане у працях, присвячених поняттю інформаційної ентропії, зокрема Альфреда Реньї [47] та Золтана Дароці [48]. Константіно Цалліс у 1988 р. запропонував неекстенсивну статистику [49], яка, за задумом, може стосуватися систем із неадитивною ентропією, тобто таких, де суттєво проявляється далекодія, спостерігаються ефекти "пам'яті", суттєво немарківські процеси тощо [50]. Розвиток цих ідей відображено у працях Курадо і Цалліса [51], Цалліса *та ін.* [52], Башкірова [53], Олємского *та ін.* [54, 55].

Зрозуміло, що навіть у досить об'ємному огляді неможливо розглянути всі способи узагальнення квантової статистики. У наступному розділі коротко проаналізовано деякі найпопулярніші квантовомеханічні підходи до цього питання. Розділ III присвячено детальному аналізові кількох статистико-механічних варіантів уведення дробової статистики. Окремо в розділі IV розглянуто неекстенсивну статистику Цалліса та пов'язані з нею аналоги квантових розподілів. Розділ V присвячено встановленню зв'язків між параметрами деяких дробових статистик. Короткі підсумки містить розділ VI.

---

[1]Цікаво, що Леон Бріллюен у своїй книзі [19, див. особливо розділ VI] наводить загальний вираз для кількості мікростанів у різних квантових статистиках, обмежуючись, однак, аналізом лише традиційних значень певного параметра, що відповідають статистикам Бозе, Фермі й Больцмана (з урахуванням тотожності частинок; у термінології Бріллюена — статистика Планка). Значно пізніше довільне значення параметра статистики в такому ж виразі для кількості мікростанів допустив Алєксіос Поліхронакос [20].

II. КВАНТОВОМЕХАНІЧНИЙ ПІДХІД

A. Еніони

Існування лише двох можливостей для хвильової функції системи багатьох частинок — симетричної або антисиметричної — пов'язане з властивістю оператора перестановки P. Розгляньмо для простоти хвильову функцію двох (тотожних!) частинок $\psi(1,2)$, яка при заміні їх місцями внаслідок дії оператора P_{12} набуває додаткової фази:

$$P_{12}\psi(1,2) = \psi(2,1) = e^{i\pi\alpha}\psi(1,2). \qquad \text{(II.1)}$$

Повторна дія оператора P_{12} дає

$$P_{12}^2\psi(1,2) = e^{2i\pi\alpha}\psi(1,2) = \psi(1,2), \qquad \text{(II.2)}$$

звідки отримуємо $\alpha = 0$ або 1, що відповідає симетричній (бозони) або антисиметричній (ферміони) хвильовій функції. Цей факт пов'язаний із тим, що подвійна перестановка зводиться до тотожної (одиничної) операції, $P_{12}^2 = I$. Виявляється, однак, що така властивість характерна для тривимірного простору, але порушується у двовимірних задачах [45, 56]. Справді, якщо уявити операцію перестановки як переміщення однієї частинки навколо іншої, то замкнений шлях можна неперервно стиснути в точку лише у просторі з розмірністю 3, а на площині цього зробити не можна, зважаючи на тверду серцевину (частинки не можуть просто проникати одна через одну), див. рис. 1.

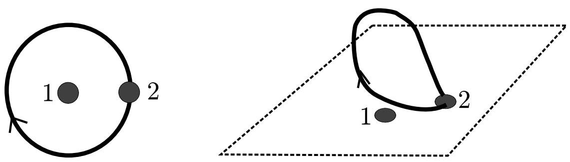

Рис. 1. Подвійна перестановка у двовимірному просторі (ліворуч) не зводиться до одиничної операції, як у тривимірному просторі (праворуч). Ілюстрацію класичних траєкторій можна переформулювати на квантовий випадок шляхом переходу до інтеґралів за траєкторіями.

Отже, у двовимірному випадку подвійна перестановка $P_{12}^2 \neq I$ і не існує обмеження на фазу хвильової функції $\pi\alpha$. Звідси, як уже було згадано у Вступі, і походить назва таких частинок – еніони.

Якщо у тривимірному просторі маємо справу із групою перестановок S_N, то відповідником у двовимірному буде так звана *група кіс* (англ. 'braid group') B_N [45, 56]. Деякі її властивості, які виявляються багатшими порівняно зі звичайною групою перестановок, можна проілюструвати за допомогою такого графічного зображення. Ґенераторами групи кіс є оператори σ_i. Поставивши у відповідність i-тій частинці *струну*, що з'єднує i-ті точки, розташовані на двох впорядкованих множинах (прямих), зобразимо дію оператора σ_i, як показано на рис. 2. Такий оператор відповідає перестановці частинок 1 і 2 (узагалі кажучи, у визначеному напрямку — наприклад, проти годинникової стрілки).

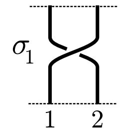

Рис. 2. Дія оператора σ_1. Струна, що виходить із нижньої точки 1 до верхньої точки 2, пролягає *над* іншою [45, 57].

Як далі показано на рис. 3, повторна дія σ_1 не дає початкової конфіґурації — коса "заплітається", тобто топологічно $\sigma_1^2 \neq \sigma_1^{-1}\sigma_1 = I$.

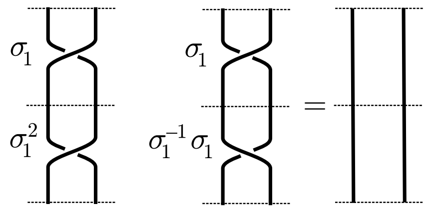

Рис. 3. Подвійна перестановка не зводиться до одиничної операції — дія оператора $\sigma_1^2 \neq \sigma_1^{-1}\sigma_1 = I$.

Ґенератори групи кіс σ_i задовольняють такі властивості (співвідношення Артіна, Artin relations) [45, 57, 58]:

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \qquad \text{(II.3)}$$

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \qquad \text{якщо} \quad |i-j| \geq 2. \qquad \text{(II.4)}$$

Відповідні графічні зображення показано на рис. 4 і 5.

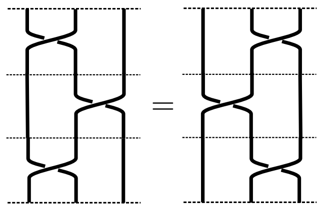

Рис. 4. Графічне зображення властивості операторів групи кіс $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ [45, 58].

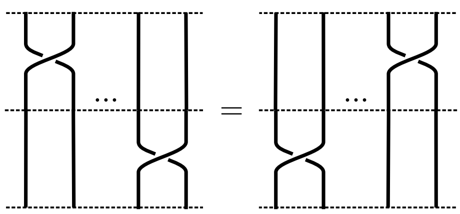

Рис. 5. Графічне зображення властивості операторів групи кіс $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$, $|i-j| \geq 2$.

Можна також навести міркування про те, що спін у двовимірній задачі може набувати довільних значень, а не лише цілих або півцілих (в одиницях $\hbar$). Квантування спіну у тривимірному просторі пов'язане з некомутативною алґеброю спінових операторів

$$[S_j, S_k] = i\hbar\varepsilon_{jkl}S_l, \qquad j,k,l = 1,2,3, \tag{II.5}$$

де ε_{jkl} — символ Леві-Чівіти [45, Chap. 2], див. також [59, Розд. VI]. У двовимірному просторі відповідна алґебра стає тривіальною, оскільки зводиться до лише одного оператора (наприклад, S_3, який відповідає обертанню навколо осі z). Очевидно, що один оператор комутує сам із собою, отже, із самих його комутаційних властивостей не випливає квантування його власних значень — для їх знаходження потрібно врахувати граничні умови, які задовольняє хвильова функція. При перестановці двох частинок, що відповідає дії оператора повороту, вона набуває фази $e^{2\pi is}$, де цілі значення $s = 0, \pm1, \ldots$ визначають симетричну хвильову функцію (бозони), а півцілі $s = \pm1/2, \pm3/2, \ldots$ — антисиметричну (ферміони). Оскільки у двовимірному просторі фаза $2\pi s$, яка пов'язана із власними значеннями оператора повороту, може бути довільною, то її можна ототожнити з довільним спіном.

Хвильову функцію N еніонів можна записати у вигляді [60, Chap. 4]:

$$\psi(z_1, \ldots, z_N) = \prod_{i<j}(z_i - z_j)^\alpha \phi(z_1, \ldots, z_N), \tag{II.6}$$

де положення k-ої частинки на площині з координатами x_k, y_k зручно описувати комплексною координатою $z_k = x_k + iy_k$, а ϕ — однозначна певним чином симетризована функція. Сама функція ψ вже буде багатозначною, її не вдається записати як добуток одночастинкових хвильових функцій: навіть для ідеального газу еніонів характерна своєрідна далекосяжна взаємодія, пов'язана з топологією траєкторій взаємного руху частинок [34]. Це, зокрема, показує, що розв'язування задачі N ідеальних еніонів не зводиться до відповідної одночастинкової задачі [61, 62]. Також не є простим перехід до вторинного квантування для еніонів: з цією метою застосовують, наприклад, формалізм так званих визначників Слетера [63] або вершинні оператори моделі Калоджеро [64].

Першу фізичну модель, яка відповідає еніонам, запропонував Вілчек у вигляді композитів магнітного потоку й зарядженої частинки [65]. Про спостереження інтерференційної картини, яка відповідала лафлінівським квазічастинкам (елементарним збудженням із дробовим зарядом, характерним для дробового квантового ефекту Голла, які вважають одними з кандидатів на еніони), повідомили у 2005 р. Каміно *та ін.* [66]. Також експериментальні реалізації еніонів у системі, що складається з надпровідної плівки, вирощеної на напівпровідниковому гетеропереході, запропонували Вікс *та ін.* [67], а в одновимірних оптичних ґратках — Кайльманн *та ін.* [68].

B. q-деформації

Як було зазначено у Вступі, комутаційні співвідношення між операторами породження–знищення $a^\dagger, a$ можна інтерполювати між ферміонами (антикомутатор) і бозонами (звичайний комутатор), увівши q-деформовані комутатори або q-мутатори. Найпростішим узагальненням буде так звана куонна (англ. ‘quon’) алґебра [69–71]:

$$[a_j, a_k^\dagger]_q = a_j a_k^\dagger - q a_k^\dagger a_j = \delta_{jk}, \tag{II.7}$$

де $-1 \le q \le 1$ забезпечує неперервну інтерполяцію між $q = -1$, що відповідає ферміонам, і $q = 1$ — бозонам.

Якщо ввести оператор “кількості частинок” N, доповнюючи q-мутатор відповідними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} &aa^\dagger - qa^\dagger a = 1, \\ &[N, a] = -a, \qquad [N, a^\dagger] = a^\dagger, \end{aligned} \tag{II.8}$$

то можна перейти до модифікованої алґебри для нових операторів [72]

$$c = q^{-\lambda N/2}a, \qquad c^\dagger = a^\dagger q^{-\lambda N/2}, \tag{II.9}$$

де λ — дійсне число. У цій новій алґебрі комутаційне співвідношення має вигляд:

$$cc^\dagger - q^{1-\lambda}c^\dagger c = q^{-\lambda N}, \tag{II.10}$$

причому зазвичай розглядають $\lambda = 1$ або $\lambda = 1/2$ [72].

Розгляньмо алґебру q-бозонних операторів [28, 73]:

$$aa^\dagger - qa^\dagger a = 1, \qquad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0, \tag{II.11}$$

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger, \qquad [N, a] = -a. \tag{II.12}$$

Ортонормовану систему власних станів можна записати так:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{[n]_q!}}(a^\dagger)^n|0\rangle, \qquad a|0\rangle = 0, \tag{II.13}$$

де q-факторіал

$$\begin{aligned} &[n]_q! = [n]_q[n-1]_q \ldots [1]_q = (q^{n-1} + \ldots q + 1)(q^{n-2} + \ldots q + 1) \ldots (q^2 + q + 1)(q + 1)1; \\ &[0]_q! = 1 \end{aligned} \tag{II.14}$$

означено через так звані q-числа, які переходять у звичайні числа в бозонній границі $q=1$:

$$[n]_q = \frac{q^n-1}{q-1}, \qquad [n]_1 = n. \tag{II.15}$$

Діють ці операторів на власні стани так:

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{[n+1]_q}|n+1\rangle, \tag{II.16}$$

$$a|n\rangle = \sqrt{[n]_q}|n-1\rangle, \tag{II.17}$$

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \tag{II.18}$$

причому

$$a^\dagger a = [N], \qquad aa^\dagger = [N+1], \tag{II.19}$$

а для оператора N формально запишемо:

$$N = \frac{1}{\ln q}\ln\Big(1+(q-1)a^\dagger a\Big). \tag{II.20}$$

Можна також показати, що у великому канонічному ансамблі для чисел заповнення i-го рівня з енерґією ε_i матимемо [73]:

$$n_i = \frac{1}{\ln q}\left(\frac{z^{-1}e^{\beta\varepsilon_i}-1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon_i}-q}\right), \tag{II.21}$$

де, як звичайно, $z=e^{\beta\mu}$ — активність, μ — хімічний потенціал, а $\beta=1/T$ — обернена температура. Варто звернути увагу, що тут і далі стала Больцмана дорівнює одиниці, $k_{\mathrm{B}}=1$.

Подібно до описаного вище, декілька різних алґебр для q-ферміонних операторів розглянули Алґін [74,75], Алґін і Сенай [76].

Р.-Монтейро *та ін* [77] розглянули таку q-бозонну алґебру:

$$\begin{aligned} &aa^\dagger - qa^\dagger a = q^{-N},\\ &[N,a^\dagger]=a^\dagger, \qquad [N,a]=-a, \end{aligned} \tag{II.22}$$

і для гамільтоніана

$$H=\hbar\omega A^\dagger A, \qquad A^\dagger = a^\dagger q^{N/2},\ A=q^{N/2}a, \tag{II.23}$$

у границі $q\to\infty$ отримали ферміоноподібний вираз для чисел заповнення:

$$\langle N\rangle \simeq \frac{1+2e^{-\hbar\omega\beta q^2}}{1+e^{\hbar\omega\beta}+e^{-\hbar\omega\beta q^2}}. \tag{II.24}$$

Чан і Чень [78] у межах алґебри (II.22) для q-деформованих бозе-осциляторів із гамільтоніаном

$$H=\sum_k \frac{\hbar\omega_k}{2}\left(a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k\right) \tag{II.25}$$

за допомогою функцій Ґріна одержали такий формальний результат для функції розподілу:

$$n(\varepsilon)=\left\{\exp\frac{\hbar\omega\beta(q^{N+1}+q^{-(N+1)})}{2}-1\right\}^{-1}. \tag{II.26}$$

На завершення цього розділу відзначу ще дві алґебри, у яких автори розглядали комплексний параметр q на одиничному колі $|q|=1$. У праці Дутта *та ін.* [79] аналізували співвідношення між операторами породження–знищення q-ферміонів у вигляді:

$$f_q f_q^\dagger + q^{\frac12} f_q^\dagger f_q = q^{-\frac12 N_f}, \tag{II.27}$$

$$[N_f, f_q] = -f_q, \qquad [N_f, f_q^\dagger] = f_q^\dagger. \tag{II.28}$$

В іншій праці Ян *та ін.* [80] запропонували такий варіант:

$$\begin{aligned} a_q a_q^\dagger - q a_q^\dagger a_q = 1, \qquad a_{q^*}a_{q^*}^\dagger - q^* a_{q^*}^\dagger a_{q^*} = 1.\\ a_q = (a_{q^*}^\dagger)^\dagger, \end{aligned} \tag{II.29}$$

де $q=e^{2\pi i/(s+1)}$ — $(s+1)$-ий корінь із одиниці, а зірочка позначає комплексне спряження.

Подібно до операторів f_q із [79], можна показати, що ці оператори мають таку властивість нільпотентності:

$$\begin{aligned} &(a_q)^n = (a_{q^*})^n = \left(a_q^\dagger\right)^n = (a_{q^*}^\dagger)^n = 0,\\ &\text{якщо } n\geq s+1. \end{aligned} \tag{II.30}$$

Отже, така алґебра відповідає обмеженню на заповнення одного квантового стану не більше за s, тобто статистиці Джентіле [21], про яку йтиметься в наступному розділі.

III. СТАТИСТИКО-МЕХАНІЧНІ УЗАГАЛЬНЕННЯ

У межах статистичної фізики дробові (проміжні) статистики можна отримати, ґрунтуючись на виразах для кількості мікростанів W_i, що забезпечуватимуть інтерполяцію між бозонами (B) і ферміонами (F):

$$W_i^{\mathrm{B}} = \frac{(G_i+N_i-1)!}{N_i!\,(G_i-1)!}, \quad W_i^{\mathrm{F}} = \frac{G_i!}{N_i!\,(G_i-N_i)!}, \tag{III.1}$$

де G_i — ступінь виродження i-того рівня, а N_i — кількість частинок на цьому рівні.

Для знаходження чисел заповнення $n_i = N_i/G_i$ (функції розподілу), що відповідають певній статистиці, можна скористатися таким методом. Ентропія системи S пов'язана з кількістю мікростанів W відомим співвідношенням:

$$S=\ln W, \qquad \text{де} \qquad W=\prod_i W_i(N_i). \tag{III.2}$$

Вираз для n_i отримуємо внаслідок знаходження екстремуму цього функціонала за додаткових умов, що фіксують кількість частинок у системі

$$N=\sum_i N_i, \tag{III.3}$$

та повну енерґію

$$E=\sum_i \varepsilon_i N_i, \tag{III.4}$$

де ε_i — енерґія i-того рівня.

Таким чином, потрібно розв'язати задачу на умовний екстремум:

$$\delta S+\alpha\delta N-\beta\delta E=0, \tag{III.5}$$

де варіацію беремо за N_i, а множники Лаґранжа пов'язані з температурою T і хімічним потенціалом μ: $\alpha=\mu/T$, $\beta=1/T$, у чому легко переконатися на підставі стандартних термодинамічних співвідношень.

A. Статистика Джентіле

Можна постулювати певний проміжний розподіл, у якому максимальна заселеність рівня буде обмежена якимось числом d. Відповідну статистику називають статистикою Джентіле [21]. Зрозуміло, що при $d=1$ матимемо граничний випадок розподілу Фермі, а $d=\infty$ відповідає розподілові Бозе.

Вираз для чисел заповнення у статистиці Джентіле можна отримати, виходячи з виразу для кількості способів розподілу частинок за всіма можливими енерґетичними рівнями:

$$W=\prod_i \frac{G_i!}{n_i(0)!n_i(1)!\dots n_i(d)!},$$

де

$$G_i=\sum_{j=0}^{d} n_i(j) \tag{III.6}$$

— ваговий множник i-того стану, кількість частинок на i-тому рівні буде

$$N_i=\sum_{j=0}^{d} jn_i(j). \tag{III.7}$$

Унаслідок цього отримуємо варіаційну задачу (III.5), де кількість частинок та енерґію задано виразами (III.3) і (III.4), див., наприклад, [26, Гл. 3, 4]. З її розв'язків матимемо числа заповнення:

$$n_i^{\mathrm{G}}=\frac{1}{z^{-1}e^{\varepsilon_i/T}-1}-\frac{d+1}{z^{-(d+1)}e^{(d+1)\varepsilon_i/T}-1}, \tag{III.8}$$

де $z=e^{\mu/T}$ — активність. Нескладно переконатися, що справді $d=1$ дає розподіл Фермі, а $d=\infty$ — розподіл Бозе.

Цікавою рисою статистики Джентіле є те, що високотемпературна поведінка системи в ній наближається до результатів статистики Бозе, тоді як у низькотемпературній границі спостерігають прояви, характерні для статистики Фермі. Зокрема, із самого означення статистики випливає існування аналога рівня Фермі ε_{G}: при $T=0$ функція n_i^{G} має сходинкоподібну форму, тобто всі частинки перебувають у станах з енерґією, меншою за ε_{G}.

Рівняння стану ідеального D-вимірного газу N частинок із дисперсією $\varepsilon_p=ap^s$, які підкоряються статистиці Джентіле, можна записати так [45, p. 160–161]:

$$\frac{pV}{NT}=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{N}{A_{D,s}VT^{D/s}}\right)^{j-1} b_j^{\mathrm{G}}, \tag{III.9}$$

де стала

$$A_{D,s}=\frac{2a^{-D/s}}{(4\pi\hbar^2)^{D/2}}\frac{\Gamma(D/s)}{s\Gamma(D/2)}, \tag{III.10}$$

а віріальні коефіцієнти b_j^{G} визначаються відповідними віріальними коефіцієнтами такої ж системи зі статистикою Бозе b_j^{B}:

$$\begin{aligned} &b_j^{\mathrm{G}}=b_j^{\mathrm{B}}, \quad \text{якщо} \quad j\le d,\\ &b_{d+1}^{\mathrm{G}}=b_{d+1}^{\mathrm{B}}+\frac{d}{(d+1)^{D/s}}, \end{aligned} \tag{III.11}$$

див. також [79].

У високотемпературній границі теплоємність такої системи C_V також пов'язана з теплоємністю відповідного бозе-газу C_V^{B} [45, 79]:

$$\begin{aligned} \frac{C_V}{N}=\frac{C_V^{\mathrm{B}}}{N}-\frac{1}{(d+1)^{D/s}}\\ \times\frac{Dd}{s}\left(\frac{Dd}{s}-1\right)\left(\frac{N}{A_{D,s}VT^{D/s}}\right)^{d}+\dots . \end{aligned} \tag{III.12}$$

Хоча фізична реалізація статистики Джентіле в реальних системах є досить сумнівною, ця модель становить не лише академічний інтерес [81]. Зважаючи на відносну простоту виразу для чисел заповнення і прозорість інтерпретації параметра d, статистику Джентіле зручно використовувати як певне узагальнення з подальшим переходом до бозонної й ферміонної границь [82, 83]. Цю статистику було застосовано до розв'язування задачі про обмежені розбиття в теорії чисел [84]. Можна також показати, що відповідний добір параметра статистики d дозволяє моделювати скінченну бозе-систему [85].

Як показали Дай і Сє [86], для отримання розподілу Бозе–Айнштайна граничний перехід за параметром статистики Джентіле $d\to\infty$ потрібно виконувати перед термодинамічним граничним переходом за кількістю частинок $N\to\infty$. Особливості термодинаміки, зокрема температурну поведінку теплоємності та хімічного потенціалу, системи слабковзаємодіючих одновимірних осциляторів з цією статистикою проаналізовано у праці [87]. Шень *та ін.* [88] досліджували зв'язок між статистикою Джентіле й еніонною статистикою та визначили, за яких умов між ними можна встановити певну (неповну) еквівалентність. Також межі застосовності статистики Джентіле до задач, пов'язаних зі статистикою Голдейна–Ву, обговорювали Ван *та ін.* [89], відзначаючи математичну простоту виразу для функції розподілу в першій.

B. Статистика Голдейна–Ву

Голдейн [42] запропонував поняття параметра *статистичної взаємодії*

$$g = -\frac{d_{N+\Delta N} - d_N}{\Delta N}, \tag{III.13}$$

де d_N — розмірність простору одночастинкових станів системи N частинок за умови, що координати решти $N-1$ частинок фіксовані. Зрозуміло, що $g = 1$ для ферміонів (додавання однієї частинки забирає один стан відповідно до принципу Паулі) і $g = 0$ для бозонів (через відсутність обмеження на заповнення станів). На параметр g накладено лише очевидне обмеження $g > 0$, натомість статистики з $g > 1$, що виходять за межі інтерполяційного інтервалу $g \in [0; 1]$, цілком можна розглядати. Фактично, пропозиція Голдейна полягає в постулюванні деякого узагальненого принципу Паулі, який може стосуватися не одного, а декількох станів.

Для кількості мікростанів станів W_i, у яких можуть перебувати N_i ідентичних частинок, що займають G_i станів, можна використати таку комбінаторну інтерполяційну формулу [43]:

$$W_i = \frac{[G_i + (N_i - 1)(1-g)]!}{N_i!\,[G_i - gN_i - (1-g)]!}, \tag{III.14}$$

яка у границях $g = 0$ і $g = 1$ переходить у стандартні вирази для бозонів W_i^{B} і ферміонів W_i^{F} відповідно (III.1).

Середні числа заповнення $n_i = N_i/G_i$ виражаються так:

$$n_i = \frac{1}{w\left(e^{(\varepsilon_i-\mu)/T}\right) + g}, \tag{III.15}$$

де функція $w(x)$ задовольняє трансцендентне рівняння

$$w^g(x)\,[1 + w(x)]^{1-g} = x \equiv e^{(\varepsilon_i-\mu)/T}. \tag{III.16}$$

Легко переконатися, що при $g = 0$ отримаємо $w(x) = x - 1$ — тобто розподіл Бозе, а при $g = 1$ будемо мати $w(x) = x$, тобто розподіл Фермі. Зазначу, що такий вираз для чисел заповнення у проміжній статистиці було отримано й раніше, зокрема його можна знайти у праці Капура [90].

У границі $x \to \infty$ розв'язком рівняння (III.16) буде $w(x) \simeq x$, що дає

$$n_i = e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T} \tag{III.17}$$

— розподіл Больцмана, який, як бачимо, не залежить від параметра статистики g, чого й треба було очікувати.

Із того, що x у рівнянні (III.16) завжди додатне, випливає, що також $w > 0$, отже

$$n_i \le 1/g. \tag{III.18}$$

Як нескладно переконатися, при $T = 0$ поведінка чисел заповнення нагадуватиме статистику Фермі:

$$n_i = \begin{cases} 1/g, & \text{якщо } \varepsilon_i < \mu_0, \\ 0, & \text{якщо } \varepsilon_i > \mu_0, \end{cases} \tag{III.19}$$

де μ_0 — аналог енерґії Фермі.

Рівняння (III.16) можна розв'язати аналітично для деяких значень g, що відрізняються від ферміонної та бозонної границь, а саме: $g = \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4$. Найпростіший результат отримаємо для так званих *семіонів* (англ. ‘semion’) із $g = 1/2$:

$$n_i = \frac{1}{\sqrt{1/4 + e^{2(\varepsilon_i-\mu)/T}}}. \tag{III.20}$$

Загалом, для частинок, що підкоряються статистиці Голдейна–Ву, використовують назви ‘ексклюзон’ (англ. ‘excluson’) або g-он.

Як згадувалося у Вступі, дробова статистика може виникати ефективно в системах із взаємодією. Виявляється, що взаємодіючі ферміони в моделі Калоджеро–Сазерленда [91, 92] з гамільтоніаном ($\hbar = m = 1$)

$$H = \sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2}\omega^2 x_i^2\right) + \sum_{1\le i<j\le N}\frac{\lambda}{(x_i - x_j)^2}, \tag{III.21}$$

$$\lambda = \frac{g(g-1)}{2},$$

відповідають ідеальному газові ексклюзонів (III.15) [93]. Також цією статистикою можна описувати двовимірний електронний газ із короткосяжними взаємодіями [94], хоча тут ідентифікація параметра статистики через значення рівня Фермі допускає й інші варіанти (статистика Джентіле, Поліхронакоса). Цікаво, що тричастинкова модель Калоджеро з $-1/4 < \lambda < 0$ дозволяє емулювати еніонну статистику [95].

Розрахувати термодинамічні функції системи частинок зі статистикою Голдейна–Ву можна стандартним способом. Нижче наведено результат для рівняння стану двовимірного ідеального газу N частинок з дисперсією $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2/2m$ у границі $e^{\mu/T} \ll 1$, коли функція $w(x) = x + g - 1$ [43]:

$$\frac{p}{T} = \rho_2\left(1 + \frac{2g-1}{4}\rho_2\lambda^2\right), \tag{III.22}$$

де p — тиск, T — температура, $\rho_2 = N/V_2$ — двовимірна густина. Цей вираз, який фактично є віріальним розкладом, буде використано в розділі V для встановлення зв'язку між різними типами статистик. Як легко зауважити, “статистична взаємодія” є відштовхувальною при $g > 1/2$ і притягальною при $g < 1/2$ [43].

Нескладно отримати високотемпературний розклад теплоємності D-вимірного ідеального газу ексклюзонів із дисперсією $\varepsilon_p = ap^s$ [45, p. 154]:

$$\frac{C_V}{N} = \frac{D}{s}\left[1 + \frac{g-1/2}{2^{D/s}}\frac{\rho_D}{A_{D,s}T^{D/s}}\left(1 - \frac{D}{s}\right) + \ldots\right], \tag{III.23}$$

де ρ_D — D-вимірна густина, $A_{D,s}$ — константа (III.10).

Термодинаміку ідеального газу зі статистикою Голдейна–Ву вивчали різні групи, зокрема Ісаков *та ін.* [96], Джойс *та ін.* [97]. Аояма [98], розглядаючи модель сильного зв'язку на ґратці (tight-binding model), показав, що теплоємність відповідного двовимірного газу характеризується певними особливостями, на відміну від звичайної системи, у якій не проявляється залежність від параметра статистики. Цінь і Чень [99] аналізували швидкість звуку і стисливість газу ексклюзонів у гармонічній пастці. Анґель *та ін.* [100] застосували дробову виключну статистику для розрахунку термодинамічних характеристик релятивістської ядерної матерії.

Статистика Голдейна–Ву також виявилася корисною в математичних задачах: зокрема за її допомогою отримано деякі співвідношення для так званого дилогарифма Роджерса [101].

C. Статистика Поліхронакоса

У 1996 році Поліхронакос [20] запропонував таку реалізацію дробової статистики: нехай перша частинка в системі може зайняти один із G станів, друга вже має на вибір $(G-\gamma)$ станів, третя — $(G-2\gamma)$ станів і т. д. Повну кількість мікростанів, що комбінаторно відповідає кількості способів розміщення N_i частинок по G_i станах, можна записати так:

$$W=\prod_i \frac{G_i(G_i-\gamma)(G_i-2\gamma)\ldots(G_i-(N_i-1)\gamma)}{N_i!}. \tag{III.24}$$

Переписавши кількість мікростанів у вигляді [20]

$$W_i=\gamma^N\frac{(G_i/\gamma)!}{N!(G_i/\gamma-N_i)!}, \tag{III.25}$$

де під факторіалом нецілого числа мають на увазі узагальнення через гамма-функцію $x!=\Gamma(x+1)$, можна стандартним способом показати, що середні числа заповнення $n_i=N_i/G_i$ у цій статистиці виражаються простим співвідношенням:

$$n_i=\frac{1}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/T}+\gamma}. \tag{III.26}$$

Зокрема, Ачар'я і Нараяна Свамі [102] розглядали цей вираз як простий варіант статистико-механічного опису еніонів із коректною граничною поведінкою в бозонній і ферміонній границях. Легко бачити, що граничні значення $\gamma=\pm1$ виразу для кількості мікростанів (III.24) відповідають розподілам Фермі та Бозе (III.1).

Зважаючи на математичну подібність виразу (III.26) до функцій розподілу у статистиках Бозе–Айнштайна і Ферма–Дірака, нескладно отримати рівняння стану та результати для віріальних коефіцієнтів ідеального D-вимірного газу з дисперсією $\varepsilon_p=ap^s$ у статистиці Поліхронакоса [45, p. 163]:

$$\begin{aligned} b_j^{\mathrm{P}}(\gamma)&=|\gamma|^{j-1}b_j^{\mathrm{B}}, \qquad \text{якщо}\quad \gamma<0,\\ b_j^{\mathrm{P}}(\gamma)&=\gamma^{j-1}b_j^{\mathrm{F}}, \qquad \text{якщо}\quad \gamma>0, \end{aligned} \tag{III.27}$$

де $b_j^{\mathrm{B,F}}$ — j-ий віріальний коефіцієнт бозе- або фермі-системи відповідно, див. також [102].

Як і у статистиці Джентіле, функція розподілу (III.26) може виникати в контексті q-деформованих алґебр [103]. Статистику Поліхронакоса також неодноразово аналізували одночасно з деякими іншими видами дробових статистик, насамперед це стосується узагальнень Джентіле й Голдейна–Ву [45, 104, 105].

Мірза і Могаммадзаде [105] вивчали так звану термодинамічну геометрію [106] кількох типів дробової статистики. Зокрема, було виявлено явище, подібне до бозе-конденсації в ідеальному газі зі статистикою Поліхронакоса. Заре *та ін.* [107] розглядали бозе-газ на розтягнутому горизонті чорних дір Шварцшільда і Керра, використовуючи статистику Поліхронакоса для моделювання взаємодії в газі ґравітонів.

Плавний перехід у рівнянні (III.26) між фермі- і бозе-статистикою, минаючи так звану квантову статистику Больцмана ($\alpha=0$), можна забезпечити вибором параметра γ у вигляді комплексного числа $\gamma=e^{i\pi\nu}$, $\nu=0\div1$. Виявляється, що зокрема в бозонній границі така система відповідатиме бозе-газові з енерґетичним спектром ϵ_p, який містить малу розсіювальну (уявну) частину $\epsilon_p=\varepsilon_p+i\varkappa_p$, що пов'язана з параметром статистики ν: $\varkappa_p\simeq\pi\nu T\varepsilon_p$ [108]. Особливості одновимірної системи осциляторів із такою статистикою проаналізовано в [109].

IV. НЕЕКСТЕНСИВНА СТАТИСТИКА

Традиційно ентропію вводять як логарифм кількості мікростанів:

$$S=\ln W, \tag{IV.1}$$

причому звідси майже автоматично випливає адитивність ентропії:

$$S(A+B)=S(A)+S(B), \tag{IV.2}$$

де A і B позначають підсистеми, а логарифм добутку їхніх імовірностей (що відповідає системі $A+B$) зводиться до суми логарифмів.

Цю ентропію, відому як ентропія Больцмана–Ґіббса, можна переписати через імовірності p_j реалізації j-го стану відомим способом:

$$S=-\sum_j p_j\ln p_j. \tag{IV.3}$$

Виявляється, що адитивність ентропії, яка є майже інтуїтивною, може порушуватися для різноманітних систем, що мають певні особливості. Зокрема, до таких особливих належать фрактальні структури та системи, у яких наявна далекодійна взаємодія (у більшості “традиційних” об’єктів у взаємодіях беруть безпосередню участь лише близькі сусіди). Іншим прикладом можуть бути суттєво немарківські процеси (системи з “пам’яттю”). Окрім суто фізичних явищ, викладений нижче підхід [50, Chap. 1] можна застосувати й у суспільних дисциплінах (моделі фінансових ринків, лінгвістичні закони тощо).

Так звана неекстенсивна статистика, описана в цьому розділі, стоїть дещо осібно порівняно з наведеними в попередніх. Узагалі кажучи, існує щонайменше зо два десятки способів узагальнити означення ентропії Больцмана–Ґіббса (IV.3). Один із них, який запропонував Цалліс [49], розглянемо нижче.

Можна ввести узагальнену ентропію співвідношенням

$$S_q = \frac{1}{q-1}\left(1-\sum_{n=1}^{W} p_n^q\right), \quad \sum_{n=1}^{W} p_n = 1. \quad q \in \mathbb{R}. \tag{IV.4}$$

Нескладно переконатися, що в границі $q \to 1$ отримаємо звичну ентропію Больцмана–Ґіббса (IV.3). Справді,

$$p_n^{q-1} = e^{(q-1)\ln p_n} \simeq 1 + (q-1)\ln p_n$$

й ентропія набуває вигляду

$$S_q = \frac{1}{q-1}\left(1-\sum_{n=1}^{W} p_n^q\right) = \ldots = -\sum_{n=1}^{W} p_n \ln p_n,$$

що збігається з очікуваним виразом (IV.3).

Замість умови адитивності (екстенсивності), заданої формулою (IV.2), ентропія (IV.4) задовольняє співвідношення

$$\begin{aligned} S_q(A+B) &= S_q(A) + S_q(B) \\ &\quad + (1-q)S_q(A)S_q(B), \end{aligned} \tag{IV.5}$$

тобто є неекстенсивною величиною. При цьому індекс q є фактично мірою неекстенсивності.

Як і звичайна ентропія, S_q досягає максимуму за умови рівних імовірностей $p_n = 1/W$ $\forall n$ (т. зв. принцип Лапласа):

$$S_q = \frac{W^{1-q}-1}{1-q}. \tag{IV.6}$$

У границі $q \to 1$ звідси отримаємо відоме співвідношення Больцмана $S = \ln W$.

Уводячи q-логарифм

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q}-1}{1-q}, \qquad \ln_1 x = \ln x, \tag{IV.7}$$

можна записати ентропію Цалліса в больцманоподібній формі

$$S_q = \ln_q W. \tag{IV.8}$$

Легко показати, що оберненою до q-логарифма буде така q-експонента:

$$\exp_q(x) = [1+(1-q)x]^{1/(1-q)}, \tag{IV.9}$$

яка у границі $q \to 1$ переходить у звичайну експоненту.

Варто звернути увагу, що q-експонента Цалліса відрізняється від q-експонент, що виникають у деяких інших задачах, зокрема пов’язаних із q-деформованими комутаторами:

$$\begin{aligned} \exp_q x \equiv e_q^x &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]_q!}, \\ \mathrm{Exp}_q x \equiv E_q^x &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2}\,\frac{x^j}{[j]_q!}, \end{aligned} \tag{IV.10}$$

де q-факторіал задано формулою (II.14). Зрозуміло, що

$$e_1^x = E_1^x = e^x. \tag{IV.11}$$

Для знаходження ймовірностей p_n скористаймося стандартним методом множників Лаґранжа. Екстремум ентропії S_q визначимо з умови

$$\delta\left\{\frac{1}{q-1}\sum_{n=1}^{W}(p_n - p_n^q) - \alpha\sum_{n=1}^{W} p_n - \beta\sum_{n=1}^{W}\varepsilon_n p_n\right\} = 0,$$

де одиницю в означенні S_q розписано як $1 = \sum_{n=1}^{W} p_n$. Отримаємо остаточно

$$p_n = \left\{\frac{1-(q-1)(\alpha+\beta\varepsilon_n)}{q}\right\}^{\frac{1}{q-1}}. \tag{IV.12}$$

За допомогою узагальненої статистичної суми

$$Z_q = \left\{\frac{1-(q-1)\alpha}{q}\right\}^{-\frac{1}{q-1}}, \tag{IV.13}$$

з якою вільна енерґія пов’язана співвідношенням

$$F = -\frac{q}{\beta}\ln_q Z_q = -(1+\alpha)\frac{1}{\beta}, \tag{IV.14}$$

визначимо температуру як

$$T = \frac{1-(q-1)\alpha}{\beta} = \frac{1}{Z_q^{q-1}}\,\frac{1}{\beta}. \tag{IV.15}$$

Тепер імовірність p_n набуває звичного “ґіббсівського” вигляду:

$$p_n = \frac{1}{Z_q}\exp_q\left(-\frac{\varepsilon_n}{T}\right). \tag{IV.16}$$

Додатковий коефіцієнт у зв’язок (IV.15) між T і β насправді ускладнює опис систем за допомогою ентропії Цалліса. Щоб уникнути відповідних проблем, було запропоновано низку модифікацій описаного підходу, відомих як статистики (Цалліса–)Мендеса–Пластіно [52], Курадо(–Цалліса) [51], Башкірова [53] та ін.

Існують також q-узагальнення розподілів Фермі–Дірака й Бозе–Айнштайна [110–112]:

$$n_i = \frac{1}{\{1+(q-1)\beta(\varepsilon_i-\mu)\}^{\frac{1}{q-1}} \pm 1} = \frac{1}{\exp_q[\beta(\varepsilon_i-\mu)] \pm 1}. \tag{IV.17}$$

Модифікацію виразу для ентропії застосував Ван зі співавторами [112–114] для побудови статистико-механічних узагальнень на підставі так званої неповної інформаційної теорії. Наприклад, неповна умова нормування

$$\sum_{i=1}^{W} p_i^q = 1 \tag{IV.18}$$

і відповідно утворена узагальнена ентропія

$$S_q = -\sum_{i=1}^{W} p_i^q \ln p_i \tag{IV.19}$$

дають змогу отримати вираз для чисел заповнення бозе- або ферміподібних збуджень у так званій екстенсивній неповній статистиці (extensive incomplete statistics) [113]:

$$n_i = \frac{1}{e^{q(\varepsilon_i-\mu)/T} \pm 1}. \tag{IV.20}$$

Неекстенсивні аналоги [112, 114] можна утворити подібно до розподілів Фермі та Бозе у статистиці Цалліса (IV.17):

$$n_i = \frac{1}{\{1+(q-1)\beta(\varepsilon_i-\mu)\}^{\frac{q}{q-1}} \pm 1} = \frac{1}{\exp_q[q\beta(\varepsilon_i-\mu)] \pm 1}. \tag{IV.21}$$

Загалом, неекстенсивна статистика допускає й багато інших узагальнень квантових розподілів, а їх детальний аналіз потребує окремого розширеного огляду, що виходить далеко за межі тематики цієї праці.

V. УСТАНОВЛЕННЯ ЗВ'ЯЗКУ МІЖ РІЗНИМИ ТИПАМИ СТАТИСТИК

A. Віріальний розклад

Віріальний розклад для рівняння стану двовимірної системи можна записати у вигляді:

$$\frac{p}{T} = \rho_2\left[1 + b_2\,\rho_2\lambda^2 + b_3\,(\rho_2\lambda^2)^2 + \ldots\right], \tag{V.1}$$

де p — тиск, T — абсолютна температура, $\rho_2 = N/V_2$ — двовимірна густина (концентрація) системи, а

$$\lambda = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mT}\right)^{1/2} \tag{V.2}$$

— довжина теплової хвилі де Бройля. Множники b_j — знерозмірені j-ті віріальні коефіцієнти. Для подальшого викладу корисно пригадати віріальний розклад ідеального двовимірного газу зі статистикою Фермі або Бозе:

$$\frac{p}{T} = \rho_2\left(1 \pm \frac{1}{4}\,\rho_2\lambda^2 + \ldots\right), \tag{V.3}$$

де верхній знак відповідає ферміонам, а нижній — бозонам, тобто другі віріальні коефіцієнти будуть відповідно:

$$b_2^{\mathrm{F}} = +\frac{1}{4}, \qquad b_2^{\mathrm{B}} = -\frac{1}{4}. \tag{V.4}$$

Для знаходження віріальних коефіцієнтів можна скористатися кластерним розвиненням [45, Ch. 4]. Перепишімо рівняння стану через велику статистичну суму Ξ:

$$\frac{pV_2}{T} = \ln\Xi(z, V_2, T), \tag{V.5}$$

де z — активність. Густина дорівнює

$$\rho_2 = z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{V_2}\ln\Xi\right)_{V_2,T}. \tag{V.6}$$

Застосовуючи кластерне розвинення

$$\frac{1}{V_2}\ln\Xi = \sum_{\ell=1}^{\infty}\mathcal{B}_\ell z^\ell \tag{V.7}$$

до рівняння стану (V.5), отримаємо:

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\mathcal{B}_\ell z^\ell = \left(\sum_{\ell=1}^{\infty}\ell\mathcal{B}_\ell z^\ell\right) \times\left[1 + b_2\,\lambda^2\left(\sum_{\ell=1}^{\infty}\ell\mathcal{B}_\ell z^\ell\right) + \ldots\right]. \tag{V.8}$$

Звідси відразу маємо зв'язок:

$$b_2 = -\frac{1}{\lambda^2}\,\frac{\mathcal{B}_2}{\mathcal{B}_1^2}, \tag{V.9}$$

і для вищих віріальних коефіцієнтів можна аналогічно одержати результати, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях z.

Зобразивши велику статистичну суму через статистичні суми Z_N системи N частинок

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_N, \qquad Z_0 \equiv 1, \tag{V.10}$$

із кластерного розвинення (V.7) матимемо:

$$\mathcal{B}_1 = \frac{Z_1}{V_2}, \qquad \mathcal{B}_2 = \frac{2Z_2 - Z_1^2}{2V_2}, \qquad \ldots, \tag{V.11}$$

де враховано розклад логарифма $\ln(1+x) = x - x^2/2 \pm \ldots$, або для другого віріального коефіцієнта:

$$b_2 = -\frac{V_2}{\lambda^2}\frac{2Z_2 - Z_1^2}{2Z_1^2}. \tag{V.12}$$

Ідеальний еніонний газ можна розглядати як взаємодіючий бозе-газ. Зважаючи на те, що одночастинкова статистична сума Z_1 не залежить від статистики, перепишімо b_2 у вигляді:

$$b_2(\alpha) = b_2(0) - \frac{V_2}{\lambda^2}\frac{Z_2(\alpha) - Z_2(0)}{Z_1^2}, \tag{V.13}$$

де $b_2(0)$, $Z_2(0)$ відповідають ідеальному бозе-газові, а параметр $\alpha \in [0;1]$. Варто зазначити, що всі ці вирази мають сенс лише в термодинамічній границі $V_2 \to \infty$.

Задачу далі зручно розглядати, помістивши систему в осциляторний потенціал із частотою ω як реґулятор. Одночастинкову статистичну суму легко обчислюємо, зважаючи на спектр $E_n = (n+1)\hbar\omega$, причому виродження n-го рівня дорівнює $n+1$:

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)e^{-(n+1)\beta\hbar\omega} = \frac{1}{4\sinh^2\frac{\beta\hbar\omega}{2}}. \tag{V.14}$$

У двочастинковій задачі перейдімо до системи центра мас, записавши зовнішній потенціал як

$$\omega^2(\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2) = 2\omega^2\mathbf{R}^2 + \frac{\omega^2}{2}\mathbf{r}^2, \tag{V.15}$$

де радіус-вектор центра мас $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1)/2$, а $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ — відносна віддаль.

У двочастинковій статистичні сумі можна виділити внесок центра мас:

$$Z_2 = Z_1\tilde{Z}_2, \tag{V.16}$$

причому Z_1 тут уже відповідає одночастинковій задачі з частотою $\omega_{\text{c.m.}}^2 = 2\omega^2$, див. (V.15). Зважаючи на те, що енерґетичний спектр задачі двох еніонів має дві гілки,

$$\begin{aligned} &E_n^{(1)} = (2n+1+\alpha)\hbar\omega \quad \text{з виродженням } n+1, \\ &E_n^{(2)} = (2n+1-\alpha)\hbar\omega \quad \text{з виродженням } n, \\ &\text{де } n = 0,1,2,3\ldots, \end{aligned} \tag{V.17}$$

отримаємо статистичну суму:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_2 &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)e^{-(2n+1+\alpha)\beta\hbar\omega} + ne^{-(2n+1-\alpha)\beta\hbar\omega}\right] \\ &= \frac{\cosh(1-\alpha)\beta\hbar\omega}{2\sinh^2\beta\hbar\omega}. \end{aligned} \tag{V.18}$$

Вираз (V.13) можна тепер переписати так:

$$b_2(\alpha) = b_2(0) - \frac{V_2}{\lambda^2}\frac{\tilde{Z}_2(\alpha) - \tilde{Z}_2(0)}{Z_1}. \tag{V.19}$$

Далі для спрощення перейдемо до термодинамічної границі, що відповідає $\omega \to 0$. Враховуючи, що з одночастинкової задачі можна встановити зв'язок між статистичною сумою $Z_1 = V_2/\lambda^2$ і частотою зовнішнього потенціалу, матимемо з (V.14):

$$\frac{V_2}{\lambda^2} = \frac{1}{\beta^2\hbar^2\omega^2} = \frac{2}{\beta^2\hbar^2 2\omega^2} = 2Z_1, \tag{V.20}$$

де через Z_1 вже позначено відповідник у двочастинковій задачі. Узагалі кажучи, такі не зовсім очевидні міркування є наслідком реґуляризації осциляторним потенціалом, унаслідок якої у кластерних коефіцієнтах потрібно робити перехід $\mathcal{B}_\ell \to \ell\mathcal{B}_\ell$.

Після елементарних перетворень, беручи до уваги другий віріальний коефіцієнт ідеального бозе-газу (V.4) $b_2(0) = -1/4$, остаточно матимемо для ідеального еніонного газу:

$$b_2(\alpha) = -\frac{1}{4}(1 - 4\alpha + 2\alpha^2). \tag{V.21}$$

Цікаво, що для $\alpha = 1$ отримуємо правильну ферміонну границю (V.4) $b_2(1) = +1/4$.

Для вищих віріальних коефіцієнтів аналітичні результати не відомі через складність задачі $N \geq 3$ еніонів [115]. Варто відзначити, наприклад, таке точне співвідношення симетрії для третього віріального коефіцієнта [45, 116]:

$$b_3(\alpha) = b_3(1-\alpha). \tag{V.22}$$

Отримані вирази для віріальних коефіцієнтів можна використати, щоб установити відповідність між еніонною статистикою та іншими видами дробових статистик. Виявляється, що жодне з описаних узагальнень квантової статистики не дає точної відповідності [45] і вдається зіставити лише деякі види статистик із певною точністю.

Наприклад, ідеальний двовимірний газ, що підкоряється статистиці Джентіле з $d \geq 2$, має другий віріальний коефіцієнт (III.11), (V.4)

$$b_2^{\mathrm{G}} = b_2^{\mathrm{B}} = -\frac{1}{4}, \tag{V.23}$$

що ніяк не вдається зіставити з віріальним коефіцієнтом еніонів (V.21) $b_2(\alpha) = -\frac{1}{4}(1 - 4\alpha + 2\alpha^2)$, за винятком хіба що тривіального значення $\alpha = 0$.

Із рівняння (III.22) другий віріальний коефіцієнт ідеального двовимірного газу зі статистикою Голдейна–Ву дорівнює:

$$b_2^{\mathrm{HW}} = \frac{1}{4}(2g - 1). \tag{V.24}$$

Порівнюючи його з другим віріальним коефіцієнтом еніонів (V.21), отримаємо зв'язок між параметрами статистик g та α:

$$g = 2\alpha - \alpha^2. \tag{V.25}$$

Подібно до цього, зіставляючи віріальний розклад еніонів із результатом для статистики Поліхронакоса (III.27)

$$b_2^{\mathrm{P}} = -\frac{1}{4}|\gamma|, \tag{V.26}$$

де взято до уваги бозоноподібний тип статистики з $\gamma < 0$, отримаємо зв'язок між параметрами γ й α:

$$\gamma = 4\alpha - 2\alpha^2 - 1. \tag{V.27}$$

Проте наведені результати не дають змоги повністю ототожнити статистику еніонів ні зі статистикою Голдейна–Ву, ні зі статистикою Поліхронакоса: уже третій віріальний коефіцієнт у них не буде збігатися [45, Chap. 5].

Також не вдається знайти повної аналогії статистик, описаних у розділі III. Так, у високотемпературній границі рівняння стану у статистиці Джентіле має лише бозоноподібну поправку, на відміну від статистик Голдейна–Ву чи Поліхронакоса [104]. Наближено можна зіставляти статистики на підставі значень аналога рівня Фермі, що не забезпечує відповідності в усьому температурному інтервалі. Цікаво, що в певному наближенні все ж можна знайти відповідність статистики Голдейна–Ву і статистики Джентіле на підставі поведінки чисел заповнення [89].

B. Розклади за параметром статистики

Зв'язок між різними типами дробової статистики можна встановити, досліджуючи малі відхилення від певної традиційної статистики (Бозе або Фермі). Для визначеності далі відштовхуватимемося від статистики Бозе. Нехай аналізована система характеризується одночастинковим спектром ε_j, а G_j означає виродження j-го рівня. Хімічний потенціал відповідної бозе-системи μ_{B} пов'язаний з кількістю частинок N і температурою T так:

$$N = \sum_j \frac{G_j}{e^{(\varepsilon_j-\mu_{\mathrm{B}})/T} - 1}. \tag{V.28}$$

Розгляньмо далі систему, що підкоряється статистиці Поліхронакоса (III.26), у якій параметр $\gamma = a-1$, де $a \to 0$. Хімічний потенціал такої системи μ_{P} визначає рівняння

$$N = \sum_j \frac{G_j}{e^{(\varepsilon_j-\mu_{\mathrm{P}})/T} - 1 + a}, \tag{V.29}$$

і його можна записати, увівши мале відхилення від хімічного потенціалу бозе-системи:

$$\mu_{\mathrm{P}} = \mu_{\mathrm{B}} + \Delta\mu_{\mathrm{P}}. \tag{V.30}$$

Розкладаючи далі вираз під сумою в рівнянні (V.29) в ряд за малими величинами a та $\Delta\mu_{\mathrm{P}}$ з точністю до лінійних поправок, отримаємо:

$$N = \sum_j \frac{G_j}{e^{(\varepsilon_j-\mu_{\mathrm{P}})/T} - 1 + a} = \sum_j \frac{G_j}{e^{(\varepsilon_j-\mu_{\mathrm{B}})/T} - 1} + \sum_j \frac{G_j}{\left[e^{(\varepsilon_j-\mu_{\mathrm{B}})/T} - 1\right]^2} \left\{ \frac{\Delta\mu_{\mathrm{P}}}{T}\, e^{(\varepsilon_j-\mu_{\mathrm{B}})/T} - a \right\}. \tag{V.31}$$

Звідси, з урахуванням (V.28), матимемо:

$$\frac{\Delta\mu_{\mathrm{P}}}{T} = a\frac{P}{N+P}, \qquad \text{де} \quad P = \frac{G_j}{\left[e^{(\varepsilon_j-\mu_{\mathrm{B}})/T} - 1\right]^2}, \tag{V.32}$$

див. також [108].

Подібно можна встановити поправку до хімічного потенціалу системи з аналогом бозе-статистики в підході Цалліса (IV.17):

$$N = \sum_j \frac{G_j}{e_q^{(\varepsilon_j-\mu_{\mathrm{Ts}})/T} - 1} = \sum_j \frac{G_j}{e^{(\varepsilon_j-\mu_{\mathrm{B}})/T} - 1} + \sum_j \frac{G_j e^{(\varepsilon_j-\mu_{\mathrm{B}})/T}}{\left[e^{(\varepsilon_j-\mu_{\mathrm{B}})/T} - 1\right]^2} \left\{ \frac{\Delta\mu_{\mathrm{Ts}}}{T} - \left(\frac{\varepsilon_j - \mu_{\mathrm{B}}}{T}\right)^2 \frac{q-1}{2} \right\}, \tag{V.33}$$

де $q \to 1$, а хімічний потенціал

$$\mu_{\mathrm{Ts}} = \mu_{\mathrm{B}} + \Delta\mu_{\mathrm{Ts}}. \tag{V.34}$$

Такі самі розклади можна записати для бозе-системи зі спектром $\varepsilon_j + \Delta\varepsilon_j$, де мала поправка $\Delta\varepsilon_j$ може бути, наприклад, спричинена взаємодією. Відповідний хімічний потенціал μ мало відрізнятиметься від μ_{B}:

$$\mu = \mu_{\mathrm{B}} + \Delta\mu, \tag{V.35}$$

причому

$$N = \sum_j \frac{G_j}{e^{(\varepsilon_j+\Delta\varepsilon_j-\mu)/T} - 1} = \sum_j \frac{G_j}{e^{(\varepsilon_j-\mu_{\mathrm{B}})/T} - 1} + \sum_j \frac{G_j e^{(\varepsilon_j-\mu_{\mathrm{B}})/T}}{\left[e^{(\varepsilon_j-\mu_{\mathrm{B}})/T} - 1\right]^2} \frac{\Delta\mu - \Delta\varepsilon_j}{T}. \tag{V.36}$$

Беручи до уваги останній результат і порівнюючи його з виразами (V.31) і (V.33), можна говорити про те, що взаємодіючій бозе-системі з певною точністю вдається поставити у відповідність системи із дробовими статистиками, параметри яких пов'язані з поправкою до спектра $\Delta\varepsilon_j$. Для отримання цього зв'язку вимагатимемо, наприклад, щоб енерґії різних систем, розраховані через числа заповнення n_j у відповідних статистиках, збігалися:

$$E = \sum_j \epsilon_j G_j n_j = E_{\mathrm{B}} + \Delta E, \tag{V.37}$$

де E_{B} — енерґія бозе-системи зі спектром ε_j:

$$E_{\mathrm{B}} = \sum_j \frac{\varepsilon_j G_j}{e^{(\varepsilon_j - \mu_{\mathrm{B}})/T} - 1}, \tag{V.38}$$

ϵ_j — одночастинковий спектр (у розглянутих випадках він дорівнює просто ε_j або $\varepsilon_j + \Delta\varepsilon_j$), а ΔE — це й буде поправка, вирази для якої потрібно зіставляти. Через громіздкість остаточних результатів тут не наведено, однак описаний ланцюжок міркувань є достатнім для їх отримання, а також для поширення на деякі інші типи статистик.

VI. ПІДСУМКИ

У статті проаналізовано основні підходи до дробової (проміжної) статистики, які узагальнюють квантові розподіли Бозе–Айнштайна і Фермі–Дірака. Після ознайомчої інформації про еніони й побіжного огляду декількох q-деформованих алґебр операторів породження–знищення увагу зосереджено на статистико-механічних способах уведення таких статистик. Для трьох із них, а саме, статистик Джентіле, Голдейна–Ву і Поліхронакоса, подано досить докладну характеристику, включно із необхідною інформацією про виведення виразів для чисел заповнення та про рівняння стану й термодинамічні функції. Також описано застосування цих статистик до фізичних систем, а подекуди і зв'язок із чисто математичними задачами. Для повнішого розкриття теми окремий розділ присвячено неекстенсивним узагальненням ентропії Больцмана–Ґіббса, у межах яких також уводять різні дробові статистики.

В описаному розмаїтті підходів можна би було сподіватися на те, що між певними типами статистик існує простий зв'язок. Однак виявляється, що знайти відповідність можна в переважній більшості випадків лише наближено, а то й узагалі неможливо. Лише поодинокими є ситуації, коли різні підходи — квантово- і статистико-механічний — виступають різними проявами одної статистики. Нарешті, з певною точністю вдається показати, як деякі дробові статистики можна застосувати до задачі про системи зі слабкою взаємодією.

ПОДЯКИ

За обговорення низки висвітлених тут питань висловлюю подяку Юрію Криницькому та Володимирові Ткачуку.

Це дослідження частково підтримане в межах науково-дослідної роботи ФФ-110Ф (№ держреєстрації 0112U001275).

[1] R. Clausius, Ann. Phys. Chem. **125**, 353 (1865).
[2] J. C. Maxwell, Phil. Trans. R. Soc. London **157**, 49 (1867).
[3] J. C. Maxwell, Phil. Mag. Ser. 4, **35**, 129; 185 (1868).
[4] L. Boltzmann, Sitzungsber. Kaiserl. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Cl. (Abt. 2) **63**, 397; 679 (1871).
[5] L. Boltzmann, Sitzungsber. Kaiserl. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Cl. (Abt. 2) **76**, 373 (1877); цит. за: *Wissenschaftliche Abhandlungen von Ludwig Boltzmann, II. Band*, herausg. von F. Hasenöhrl (Barth, Leipzig, 1909), S. 164.
[6] M. Planck, Ann. Phys. **309**, 553 (1901).
[7] J. W. Gibbs, Trans. Connecticut Acad. Arts Sci. **3**, 108; 343 (1874–1878).
[8] J. W. Gibbs, *Elementary Principles in Statistical Mechanics* (C. Scribner, New York, 1902).
[9] Bose, Zs. Phys. **26**, 178 (1924).
[10] A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Königl. Akad. Wiss.: Phys.-Math. Kl., 261 (1924).
[11] A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Königl. Akad. Wiss.: Phys.-Math. Kl., 3 (1925).
[12] W. Pauli jr., Zs. Phys. **31**, 765 (1925).
[13] E. Fermi, Zs. Phys. **36**, 902 (1926); італійською мовою відповідний матеріал опубліковано в недоступному виданні Rend. Lincei **3**, 145; англійський переклад див. A. Zannoni, preprint arXiv:cond-mat/9912229 (1999).
[14] P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. London Ser. A, **112**, 661 (1926).
[15] G. E. Uhlenbeck, S. Goudsmit, Naturwiss. **13**, 953 (1925); Nature **117**, 264 (1926).
[16] M. Fierz, Helv. Phys. Acta **12**, 3 (1939).
[17] W. Pauli, Phys. Rev. **58**, 716 (1940).
[18] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 914 (1951).
[19] L. Brillouin, *Les statistiques quantiques et leurs applications* (Les Presses Universitaire de France, Paris, 1930); *Die Quantenstatistik und ihre Anwendung auf die Elektronentheorie der Metalle* (Springer, Berlin, 1931); Л. Бриллюен, *Квантовая статистика* (Гос. научно-тех. изд-во Украины, Харьков–Киев, 1934), стереотипне видання вийшло 2004 (Едиториал УРСС, Москва).
[20] A. P. Polychronakos, Phys. Lett. B **365**, 202 (1996).
[21] G. Gentile j., Nuovo Cim. Nuova Ser. **17**, 493 (1940).

[22] G. Gentile j., Nuovo Cim. Nuova Ser. **19**, 109 (1942).
[23] H. Einbinder, Phys. Rev. **74**, 805 (1948).
[24] A. Borsellino, Nuovo Cim. Ser. IX **4**, 52 (1947).
[25] H. S. Green, Phys. Rev. **90**, 270 (1953).
[26] А. Исихара, *Статистическая физика* (Мир, Москва, 1973).
[27] С. А. Балашова, В. В. Курышкин, Э. Э. Энтральго, Физ. эл. част. ат. яд. **20**, 965 (1989).
[28] L. C. Biedenharn, J. Phys. A **22**, L873 (1989).
[29] D. Zagier, Commun. Math. Phys. **147**, 199 (1992).
[30] P. V. Nešković, B. V. Urošević, Int. J. Mod. Phys. A **7**, 3379 (1992).
[31] В. Г. Кац, П. Чен, *Квантовый анализ* (Изд-во МЦНМО, Москва, 2005).
[32] T. V. Fityo, Phys. Lett. A **372**, 5872 (2008).
[33] J. M. Leinaas, J. Myrheim, Nuovo Cim. **37B**, 1 (1977).
[34] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **49**, 957 (1982).
[35] T. Ando, Y. Matsumoto, Y. Uemura, J. Phys. Soc. Jpn **39**, 279 (1975).
[36] K. v. Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).
[37] D. C. Tsui, H. L. Stormer, A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982).
[38] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983).
[39] B. I. Halperin, Phys. Rev. Lett. **52**, 1583 (1984).
[40] J. Jain, Phys. Rev. Lett. **63**, 199 (1989).
[41] D. Arovas, J. R. Schrieffer, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **53**, 722 (1984).
[42] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett **67**, 937 (1991).
[43] Y.-S. Wu, Phys. Rev. Lett. **73**, 922 (1994).
[44] A. Dasniéres de Veigy, S. Ouvry, Phys. Rev. Lett. **72**, 600 (1994).
[45] A. Khare, *Fractional Statistics and Quantum Theory, 2nd edition* (World Scientific, 2005).
[46] M. V. Medvedev, Phys. Rev. Lett. **78**, 4147 (1997).
[47] A. Rényi, in *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability 1960* (University of California Press, Berkeley, CA, USA, 1961), p. 547.
[48] Z. Daróczy, Information and Control **16**, 36 (1970).
[49] C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988).
[50] *Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications*, edited by *S. Abe and Y. Okamoto* (Springer, 2001).
[51] E. M. F. Curado, C. Tsallis, J. Phys. A**24**, L69 (1991).
[52] C. Tsallis, R. S. Mendes, A. R. Plastino, Physica A **261**, 534 (1998).
[53] А. Г. Башкиров, Теор. мат. физ. **149**, 299 (2006).
[54] A. I. Olemskoi, V. O. Kharchenko, V. N. Borisyuk, Physica A **387**, 1895 (2008).
[55] A. Olemskoi, I. Shuda, V. Borisyuk, Europhys. Lett. **89**, 50007 (2010)
[56] С. В. Машкевич, Дисс...д-ра физ.-мат. наук (Киев, 2005).
[57] V. F. R. Jones, Ann. Math. **126**, 335 (1987).
[58] K. Fredenhagen, K. H. Rehren, B. Schroer, Commun. Math. Phys. **125**, 201 (1989).
[59] І. О. Вакарчук, *Квантова механіка*, 4-те вид. (ЛНУ імені Івана Франка, Львів, 2012).
[60] A. Lerda, *Anyons: Quantum Mechanics of Particles with Fractional Statistics* (Springer, 1992).
[61] Y.-S. Wu, Phys. Rev. Lett. **53**, 111 (1984).
[62] S. V. Mashkevich, Int. J. Mod. Phys. A **7**, 7931 (1992).
[63] P. Mitra, Phys. Lett. B **345**, 473 (1995).
[64] K. Sogo, J. Phys. Soc. Jpn **64**, 2249 (1995).
[65] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **48**, 1144 (1982).
[66] F. E. Camino, W. Zhou, V. J. Goldman, Phys. Rev. B **72** 075342 (2005).
[67] C. Weeks, G. Rosenberg, B. Seradjeh, M. Franz, Nature Phys. **3** 797 (2007).
[68] T. Keilmann, S. Lanzmich, I. McCulloch, M. Roncaglia, Nature Commun. **2**, 361 (2011).
[69] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **64**, 705 (1990).
[70] R. N. Mohapatra, Phys. Lett. B. **242**, 407 (1990).
[71] O. W. Greenberg, Phys. Rev. D **43**, 4111 (1991).
[72] S. Chaturvedi, V. Srinivasan, Phys. Rev. A **44**, 8020 (1991).
[73] A. Lavagno, A. M. Scarfone, P. Narayana Swamy, Rep. Math. Phys. **55**, 423 (2005).
[74] A. Algin, J. Stat. Mech. P04007 (2009).
[75] A. Algin, Int. J. Theor. Phys. **50**, 1554 (2011).
[76] A. Algin, M. Senay, Phys. Rev. E **85**, 041123 (2012).
[77] M. A. R.-Monteiro, I. Roditi, L. M. C. S. Rodrigues, Mod. Phys. Lett. B **7**, 1897 (1993).
[78] Z. Chang, S.-X. Chen, J. Phys. A **35**, 9731 (2002).
[79] R. Dutt, A. Gangopadhyaya, A. Khare, U. P. Sukhatme, Int. J. Mod. Phys. A **9**, 2687 (1994).
[80] Y. Yang, S. Xie, W. Feng, X. Wu, Mod. Phys. Lett. A **13**, 879 (1998).
[81] H. Müller, Ann. Phys. (Berlin) **442**, 420 (1950).
[82] A. M. Guénault, D. K. C. MacDonald, Mol. Phys. **5**, 525 (1962).
[83] E. S. Sokolova, S. S. Sokolov, N. Studart, J. Phys.: Condens. Matter **22**, 465304 (2010).
[84] C. S. Srivatsan, M. V. N. Murthy, R. K. Bhaduri, Pramana – J. Phys. **66**, 485 (2006).
[85] A. Rovenchak, Fiz. Nizk. Temp. **35**, 510 (2009); Low Temp. Phys. **35**, 400 (2009).
[86] W.-S. Dai, M. Xie, Phys. Lett. A **373**, 1524 (2009).
[87] М. І. Топілко, А. А. Ровенчак, Журн. фіз. досл. **13**, 2004 (2009).
[88] Y. Shen, Q. Ai, G. L. Long, Physica A **389** 1565 (2010).
[89] Q. A. Wang, L. Nivanen, A. Le Méhauté, M. Pezeril, Nuovo Cim. **118B**, 635 (2003).
[90] J. N. Kapur, Indian J. Pure Appl. Math. **14**, 1433 (1983).
[91] F. Calogero, J. Math. Phys. **10**, 2191 (1969); **10**, 2197 (1969).
[92] B. Sutherland, J. Math. Phys. **12**, 246 (1971); **12**, 251 (1971).
[93] M. V. N. Murthy, R. Shankar, Phys. Rev. Lett. **73**, 3331 (1994); M. V. N. Murthy, R. Shankar, Phys. Rev. Lett. **75**, 353 (1995).
[94] R. K. Bhaduri, M. V. N. Murthy, M. K. Srivastava, Phys. Rev. Lett. **76**, 165 (1996).
[95] S. Sree Ranjani, P. K. Panigrahi, A. K. Kapoor, A. Khare, Ann. Phys. **324**, 1176 (2009).
[96] S. B. Isakov, D. P. Arovas, J. Myrheim, A. P. Polychronakos, Phys. Lett. A **212**, 299 (1996).
[97] G. S. Joyce, S. Sarkar, J. Spałek, K. Byczuk, Phys. Rev. B **53**, 990 (1996).
[98] T. Aoyama, Eur. Phys. J. B **20**, 123 (2001).
[99] F, Qin, J.-s. Chen, Phys. Lett. A **376**, 1191 (2012).
[100] D. V. Anghel, A. S. Parvan, A. S. Khvorostukhin, Physica A **391**, 2313 (2012).
[101] А. Г. Быцко, Зап. науч. сем. ПОМИ **291**, 64 (2002);

A. G. Bytsko, J. Math. Sci. **125**, 136 (2005).

[102] R. Acharya, P. Narayana Swamy, J. Phys. A **27**, 7247 (1994).

[103] M. Chaichian, R. Gonzalez Felipe, C. Montonen, J. Phys. A **26**, 4017 (1993).

[104] K. Byczuk, J. Spałek, G. S. Joyce, S. Sarkar, Acta Phys. Polon. B **26**, 2167 (1995).

[105] B. Mirza, H. Mohammadzadeh, Phys. Rev. E **82**, 031137 (2010).

[106] G. Ruppeiner, Rev. Mod. Phys. **67**, 605 (1995); erratum: Rev. Mod. Phys. **67**, 313 (1996).

[107] S. Zare, Z. Raissi, H. Mohammadzadeh, B. Mirza, Eur. Phys. J. C **72**, 2152 (2012).

[108] A. Rovenchak, J. Phys.: Conf. Ser. **400**, 012064 (2012).

[109] A. Rovenchak, Fiz. Nizk. Temp. **39**, 1141 (2013); Low Temp. Phys. **39**, in press (2013).

[110] F. Büyükkılıç, D. Demirhan, Phys. Lett. A **181** 24 (1993).

[111] J. Chen, Z. Zhang, G. Su, L. Chen, Y. Shu, Phys. Lett. A **300** 65 (2002).

[112] Q. A. Wang, Chaos Solitons Fractals **14**, 765 (2002).

[113] Q. A. Wang, Entropy **5**, 220 (2003).

[114] Y. Kaupp *et al.*, J. Low Temp. Phys. **150**, 660 (2008).

[115] S. Mashkevich, J. Myrheim, K. Olaussen, Phys. Lett. B **382**, 124 (1996).

[116] D. Sen, Phys. Rev. Lett **68**, 2977 (1992); Phys. Rev. D **46**, 1846 (1992).

FRACTIONAL STATISTICS: LOOKING FROM THE STATISTICAL MECHANICS POINT OF VIEW

Andrij Rovenchak

Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv, 12, Drahomanov St., Lviv, UA–79005, Ukraine

The paper contains a review of some principal methods to introduce fractional (intermediate) statistics of identical particles beyond traditional Bose–Einstein and Fermi–Dirac distributions. Anyons and q-deformed algebras of creation–annihilation operators are considered as quantum mechanical generalizations. The statistical mechanics approach is analyzed in detail, namely Gentile statistics, Haldane–Wu statistics, and Polychronakos statistics. Nonextensive statistics is described separately. Some relations between different types of fractional statistics are discussed.