ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 18, № 1 (2014) 1005(7 с.)

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 18, No. 1 (2014) 1005(7 p.)

РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ ЦІНИ ОПЦІОНУ ТА МОДЕЛІ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

В. С. Янішевський
Національний університет "Львівська політехніка",
вул. Степана Бандери 12, Львів, 79013, Україна

(Отримано 10 лютого 2014 р.; в остаточному вигляді — 05 травня 2014 р.)

Проаналізовано часткові випадки рівняння Мертона–Ґармана динаміки ціни опціону на основі модельних задач квантової механіки. Показано, що модель Гестона еквівалентна задачі одновимірного радіального осцилятора квантової механіки, отримано формулу ціни опціону на основі ядра оператора еволюції (пропагатора) радіального осцилятора. Із використанням аналогії з одновимірним рівнянням Шредингера для частинки в зовнішньому полі продемонстровано складність інших часткових випадків рівняння Мертона–Ґармана, установлено значення параметрів, для яких є точні розв'язки.

Ключові слова: модель Мертона–Ґармана, формула Блека–Шоулза, ціноутворення опціонів, модель Гестона, рівняння Шредингера.

PACS number(s): 03.65.−w, 89.65.Gh, 89.65.−s, 02.50.−r, 02.50.Cw

ВСТУП

Броунівський рух застосовують для опису багатьох фізичних явищ відтоді як була запропонована його теорія [1]. Дещо раніше ідеї броунівського руху використано для опису динаміки цін фінансових активів [2,3]. Подібно до того, як положення броунівської частинки змінюється хаотично, ціна фінансового активу (акції, облігації та інші) зазнає таких же змін у часі. Використавши цю ідею, уперше запропонували формулу для ціни опціону [2], одного із похідних фінансових інструментів. Бурхливий розвиток фінансового ринку, а також праця [4] спонукали інтенсивні дослідження в цій галузі. У роботі [4] обґрунтовано поняття економічно раціональної ціни опціону й наведено формулу Блека–Шоулза ціни опціону. Завдяки цій праці зрозумілішими стали механізми ціноутворення на фінансовому ринку, а також фінансові аналітики отримали зручну формулу для практичних розрахунків.

Відтоді тематиці ціноутворення опціонів присвячено значну кількість робіт, де уточнено й узагальнено формули Блека–Шоулза [3, 5]. Оскільки у формулі Блека–Шоулза волантильність базового фінансового активу вважається сталою величиною, у багатьох пропонованих моделях волантильність розглядали як змінну випадкову величину. Зокрема, у працях [3,5–7] вивчали рівняння динаміки ціни опціону в моделі, яка отримала також назву моделі Мертона–Ґармана. За аналогією із квантовою механікою, у працях [6–8] для розв'язку рівняння динаміки застосовано метод континуального інтеґрування, що дозволяє записати розв'язок рівняння в замкнутій формі. Проте функціональні квадратури є досить складними і формула ціни опціону важка для практичного застосування. Відомо, що простіші формули для ціни опціону отримують у моделі Гестона [9], яка є частковим випадком моделі Мертона–Ґармана. Формулу ціни опціону в моделі Гестона вперше отримано в [9], де враховано структуру формули Блека–Шоулза і ряд підстановок у рівняння динаміки. У працях [5, 10] формулу ціни опціону в моделі Гестона одержано також іншими способами.

В цій праці ми проаналізуємо часткові випадки рівняння Мертона–Ґармана на основі відомих модельних задач квантової механіки. Зокрема, такий підхід використовували, досліджуючи рівняння Фоккера–Планка [11]. Відомо, що перелік одновимірних потенціалів, для яких є точні розв'язки нестаціонарного рівняння Шредингера, достатньо вивчений [12,13]. Як буде показано далі, модель Гестона еквівалентна одновимірній точно розв'язуваній моделі квантової механіки. Використовуючи відомі розв'язки, ми отримали формулу ціни опціону. Розгляд інших часткових випадків моделі Мертона–Ґармана дає змогу проаналізувати їх порівняльну складність і з'ясувати випадки, для яких є точні розв'язки.

I. МОДЕЛЬ МЕРТОНА–ҐАРМАНА

Розглянуто два фінансові активи — банківський рахунок і акції. Банківський рахунок $\Pi(t) > 0$ вважається безризиковим, і його зміна в часі визначається рівнянням

$$d\Pi(t) = r\Pi(t)\,dt, \tag{1}$$

де $r \geqslant 0$ позначає процентну ставку. Акції є ризиковим активом, і зміна ціни акцій $S(t) \geqslant 0$ задається стохастичним рівнянням

$$dS(t) = \phi\, S(t)\,dt + \sqrt{V(t)}\,S(t)\,dW_1(t), \tag{2}$$

де $\phi \geqslant 0$ — процентна ставка акцій, $\sqrt{V(t)}$ — волантильність ціни акцій, $W_1(t)$ — вінерівський процес (броунівський рух).

Рівняння (2) можна вважати узагальненням рівняння геометричного (економічного) броунівського руху, для якого волантильність — стала величина:

$\sqrt{V(t)} = \sigma = \mathrm{const}$ [2, 4]. У цьому випадку σ має зміст середньоквадратичного відхилення випадкової величини $x(t) = \ln(S(t))$. У фінансовій літературі зазвичай σ називають волантильністю (мінливістю) випадкової величини.

Отже, волантильність у рівнянні (2) є випадковою величиною, динаміка якої в моделі Мертона–Ґармана описується таким стохастичним рівнянням:

$$dV(t) = (\lambda + \mu V(t))\, dt + \xi V(t)^{\alpha} dW_2(t). \tag{3}$$

Вінерівські процеси $W_1(t)$ і $W_2(t)$ у рівняннях (2) і (3) корельовані й визначаються моментами [2]:

$$\begin{aligned} &\langle W_1(t)\rangle = \langle W_2(t')\rangle = 0, \\ &\langle W_1(t)W_1(t')\rangle = \langle W_2(t)W_2(t')\rangle = \min(t,t'), \\ &\langle W_1(t)W_2(t')\rangle = \rho \min(t,t')\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Тут дужки $\langle \ldots \rangle$ позначають усереднення за вінерівськими процесами $W_1(t)\,, W_2(t)$; $\alpha \geqslant 0$; параметр кореляції $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$. Інші параметри моделі $\lambda,\, \mu\,, \xi$ задовольняють також додаткові обмеження, які забезпечують $V(t) > 0$.

Таким чином, динаміка фінансового активу $S(t)$ (наприклад акції) у зазначеній моделі задається стохастичними рівняннями (2) і (3). Із ціною базового активу $S(t)$ пов'язана ціна похідного фінансового інструмента — опціону $C(t)$ [2, 3, 5, 7]. Нагадаємо, що опціоном називається контракт, який дає право купити або продати певний фінансовий актив у встановлений момент часу на зазначених умовах. Зокрема, у випадку європейського опціону колл, покупець отримує право купити фінансовий актив у момент часу T (час виконання опціону) за договірною ціною K (страйк-ціна). Очевидно, за можливість скористатись опціоном покупець повинен заплатити деяку ціну. Як було вже зазначено, поняття раціональної (економічно обґрунтованої) ціни опціону вперше сформулювали Блек і Шоулз [4], знайдено рівняння для її визначення і формулу Блека–Шоулза ціни європейського опціону колл. Узагальненням цього підходу для стохастичної волантильності (3) є рівняння динаміки ціни опціону $C(t)$, отримане в роботах [3, 6, 7]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial C(t)}{\partial t} + rS\frac{\partial C(t)}{\partial S} + \frac{1}{2}VS^2\frac{\partial^2 C(t)}{\partial S^2} + (\lambda+\mu V)\frac{\partial C(t)}{\partial V} \\ &+ \rho\xi V^{1/2+\alpha} S\frac{\partial^2 C(t)}{\partial S\partial V} + \frac{1}{2}\xi^2 V^{2\alpha}\frac{\partial^2 C(t)}{\partial V^2} = rC(t). \end{aligned} \tag{5}$$

Для сталої волантильності $V = \sigma^2 = \mathrm{const}$ відмінними від нуля в лівій частині (5) будуть перші три доданки й зазначене рівняння збігатиметься з рівнянням Блека–Шоулза [4].

Отже, ціна європейського опціону колл визначається розв'язком задачі Коші для рівняння (5) з початковою умовою (платіжною функцією) у момент часу T

$$C(T,S) = (S-K)^+ = \begin{cases} S-K, & S > K; \\ 0, & S \leqslant K, \end{cases} \tag{6}$$

де $S = S(T)$ — ринкова ціна акцій у момент T. Зміст умови (6) досить очевидний, опціон відбувається тоді, коли ринкова ціна акцій S буде більшою, ніж договірна K.

Оскільки платіжна функція $C(T,S)$ (6) задається в майбутній момент часу, то зручно ввести заміну змінної $\tau = T - t$ і розглядати динаміку, обернену в часі

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial C(\tau)}{\partial \tau} + rS\frac{\partial C(\tau)}{\partial S} + (\lambda+\mu V)\frac{\partial C(\tau)}{\partial V} \\ &+ \frac{1}{2}VS^2\frac{\partial^2 C(\tau)}{\partial S^2} + \rho\xi V^{\frac{1}{2}+\alpha} S\frac{\partial^2 C(\tau)}{\partial S\partial V} \\ &+ \frac{1}{2}\xi^2 V^{2\alpha}\frac{\partial^2 C(\tau)}{\partial V^2} = rC(\tau). \end{aligned} \tag{7}$$

Виконаємо також заміну змінної $S = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ і перейдімо до рівняння

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial C(\tau)}{\partial \tau} + \big(r - \frac{1}{2}V\big)\frac{\partial C(\tau)}{\partial x} \\ &+ (\lambda+\mu V)\frac{\partial C(\tau)}{\partial V} + \frac{1}{2}V\frac{\partial^2 C(\tau)}{\partial x^2} \\ &+ \rho\xi V^{\frac{1}{2}+\alpha}\frac{\partial^2 C(\tau)}{\partial V\partial x} + \frac{1}{2}\xi^2 V^{2\alpha}\frac{\partial^2 C(\tau)}{\partial V^2} = rC(\tau). \end{aligned} \tag{8}$$

Рівняння (8) запишімо також у вигляді

$$\frac{\partial C(\tau)}{\partial \tau} = -H_{\mathrm{MG}}C(\tau), \tag{9}$$

де величина H_{MG}, згідно з роботами [6, 7], позначає гамільтоніан Мертона–Ґармана

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{MG}} = &-\frac{1}{2}V\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \big(\frac{1}{2}V - r\big)\frac{\partial}{\partial x} + r - \frac{1}{2}\xi^2 V^{2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial V^2} \\ &- \rho\xi V^{\frac{1}{2}+\alpha}\frac{\partial^2}{\partial V\partial x} - (\lambda+\mu V)\frac{\partial}{\partial V}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

II. РІВНЯННЯ ДЛЯ ЯДРА ОПЕРАТОРА ЕВОЛЮЦІЇ

Розв'язок рівняння (8) запишімо так:

$$C(\tau) = e^{-\tau H_{\mathrm{MG}}}C(0), \tag{11}$$

де $C(0)$ – значення ціни опціону в момент часу $\tau = 0$ (або $t = T$) задається платіжною функцією (6).

Оператору еволюції $e^{-\tau H_{\mathrm{MG}}}$ в (11) поставимо у відповідність ядро $g(\tau, x - x_0, V, V_0)$

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} g(\tau, x-x_0, V, V_0)C(0,x_0)\, dx_0 dV_0\,. \tag{12}$$

У формулі (12) для $C(0)$ вказана залежність від змінної x_0. Ядро $g(\tau, x - x_0, V, V_0)$ запишімо також в операторній формі

$$g(\tau, x-x_0, V, V_0) = e^{-\tau H_{\mathrm{MG}}}\delta(x-x_0)\delta(V-V_0). \tag{13}$$

Оскільки платіжна функція (6) не залежить від змінної V_0, то інтеґрування за V_0 стосується лише ядра $g(\tau, x-x_0, V, V_0)$, тому зручно розглядати ядро $g(\tau, x-x_0, V)$

$$g(\tau, x-x_0, V) = \int_0^\infty g(\tau, x-x_0, V, V_0)\, dV_0. \qquad (14)$$

Тоді розв'язок (12) запишемо у вигляді

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau, x-x_0, V) C(0, x_0)\, dx_0\,. \qquad (15)$$

Оскільки коефіцієнти гамільтоніана H_{MG} (10) не залежать від змінної x, то зручно перейти до Фур'є-зображень за формулою

$$g(\tau, x, V) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau, k, V)\exp(ikx)\, dk. \qquad (16)$$

Із урахуванням формул (13), (16) для Фур'є-зображення ядра $g(\tau, k, V)$ (16) отримаємо вираз

$$g(\tau, k, V) = \int_0^\infty e^{-\tau H_{\mathrm{MG}}(k)}\delta(V-V_0)\, dV_0\,, \qquad (17)$$

де позначено Фур'є-зображення гамільтоніана $H_{\mathrm{MG}}(k)$ (10)

$$H_{\mathrm{MG}}(k) = -\frac{1}{2}\xi^2 V^{2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial V^2} - (\lambda + \mu V + ik\xi\rho V^{\frac{1}{2}+\alpha})\frac{\partial}{\partial V} + \frac{1}{2}(k^2+ik)V + r(1-ik). \qquad (18)$$

Очевидно, Фур'є-зображення ядра $g(\tau, k, V)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial g(\tau, k, V)}{\partial \tau} = -H_{\mathrm{MG}}(k) g(\tau, k, V) \qquad (19)$$

з початковою умовою $g(0, k, V) = 1$.

Отже, необхідно знайти розв'язок рівняння (19) $g(\tau, k, V)$, відтак визначити ядро $g(\tau, x-x_0, V)$ і за формулою (15) — ціну опціону.

III. МОДЕЛЬ ГЕСТОНА

Модель Гестона відповідає значенню параметра $\alpha = \frac{1}{2}$. Гамільтоніан (18) у цьому випадку дорівнює:

$$H_{\mathrm{MG}}(k) = -\frac{1}{2}\xi^2 V\frac{\partial^2}{\partial V^2} - (\lambda + \Gamma V)\frac{\partial}{\partial V} + \frac{1}{2}(k^2+ik)V + r(1-ik). \qquad (20)$$

Тут уведено позначення $\Gamma = \mu + ik\xi\rho$. Рівняння (19) можна розглядати як одновимірне рівняння Шредингера для уявного часу, або рівняння для матриці густини у квантовій статистиці [13]. Наша мета — за допомогою ряду перетворень звести рівняння (19) до простішого, властивості якого відомі. Цього досягнемо, застосовуючи необхідні заміни змінної й перетворення для функцій. У результаті ми отримаємо рівняння, еквівалентне нестаціонарному одновимірному рівнянню Шредингера для частинки в деякому потенціальному полі.

Спершу виконаємо таку заміну:

$$g(\tau, k, V) = \exp\big(-r(1-ik)\tau\big) g_1(\tau, k, V). \qquad (21)$$

Очевидно, динаміка функції $g_1(\tau, k, V)$ задається рівнянням (19) з гамільтоніаном (20) без останнього доданка. Наступним кроком виконаємо заміну змінної з метою, щоб доданок із другою похідною в гамільтоніані мав вигляд оператора "кінетичної енергії" в декартових координатах. Цього досягнемо за допомогою такої підстановки:

$$g_1(\tau, k, V) = g_2\Big(\tau, z\Big), \quad z = \frac{2}{\xi}\sqrt{V}. \qquad (22)$$

Функція $g_2(\tau, z)$ задовольняє рівняння (19) із гамільтоніаном

$$H_{\mathrm{MG}}(k) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Big[\frac{1}{2z}\Big(1 - \frac{4\lambda}{\xi^2}\Big) - \frac{1}{2}z\Gamma\Big]\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{8}(k^2+ik)\xi^2 z^2. \qquad (23)$$

За допомогою наступного перетворення перейдемо до рівняння для $g_0(\tau, z)$, яке не містить доданка з першою похідною:

$$g_2(\tau, z) = \exp\Big(\int\Big[\frac{1}{2z}\Big(1-\frac{4\lambda}{\xi^2}\Big) - \frac{1}{2}z\Gamma\Big]dz\Big) g_0(\tau, z) = \exp\Big(-\frac{1}{4}z^2\Gamma\Big) z^{\frac{1}{2}-\frac{2\lambda}{\xi^2}} g_0(\tau, z). \qquad (24)$$

Функція $g_0(\tau, z)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial g_0(\tau, z)}{\partial \tau} = -H_0(z) g_0(\tau, z) \qquad (25)$$

з гамільтоніаном $H_0(z)$

$$H_0(z) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\Lambda^2 - 1/4}{2\,z^2} + \frac{\Omega^2 z^2}{2}. \qquad (26)$$

Тут використано позначення:

$$\Lambda^2 = (1 - 2\lambda/\xi^2)^2,\ \Omega^2 = \frac{1}{4}(\Gamma^2 + (k^2+ik)\xi^2).$$

Гамільтоніан $H_0(z)$ збігається з гамільтоніаном радіального гармонічного осцилятора квантової механіки. Отже, розв'язок задачі Коші для рівняння (25) визначимо через ядро оператора еволюції

$$g_0(\tau, z) = \int_0^\infty K(\tau, z, z_0) g_0(0, z_0)\, dz_0\,. \qquad (27)$$

Тут $K(\tau, z, z_0)$ — ядро оператора еволюції рівняння (25), $g_0(0, z_0)$ — значення функції в момент часу $\tau = 0$. Ядро радіального осцилятора $K(\tau, z, z_0)$ знайдено за допомогою фейнманівського інтеґрала за траєкторіями [12, 13], а також операторними методами [14] і задається формулою

$$K(\tau, z, z_0) = \frac{\sqrt{zz_0}\,\Omega}{\sinh(\Omega\tau)} \exp\Big(- \Omega(z^2 + z_0^2)\cot(\Omega\tau)/2\Big) \times I_\Lambda\Big(\frac{zz_0\Omega}{\sinh(\Omega\tau)}\Big). \quad (28)$$

Тут $I_\nu(x)$ позначає модифіковану функцію Бесселя. Для отримання кінцевої формули необхідно підставити $g_0(0, z_0)$ у формулу (27) і виконати інтеґрування. Значення $g_0(0, z_0)$ встановимо на основі зв'язку з $g(\tau, k, V)$

$$g(\tau, k, V) = e^{-(1-ik)r\tau} e^{-\frac{\lambda\Gamma}{\xi^2}\tau} e^{-\frac{1}{4}\Gamma z^2} z^{\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2\xi^2}} g_0(\tau, z).$$

У результаті для $g_0(0, z_0)$ ($g(0, k, V) = 1$) отримаємо

$$g_0(0, z_0) = e^{\frac{1}{2}z_0^2\Gamma} z_0^{-\frac{1}{2}+\frac{2\lambda}{\xi^2}}. \quad (29)$$

Виконавши інтеґрування у формулі (27), одержимо

$$g_0(\tau, z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \exp\Big[\frac{z^2\Omega(\Omega - \Gamma\cot(\Omega\tau))}{2(\Gamma - \Omega\cot(\Omega\tau))}\Big]\Big(\frac{z\Omega}{\Omega\cosh(\Omega\tau) - \Gamma\sinh(\Omega\tau)}\Big)^{\frac{2\lambda}{\xi^2}}. \quad (30)$$

Повертаючись до змінної V, для $g(\tau, k, V)$ маємо вираз

$$g(\tau, k, V) = \frac{e^{\left(b_1 - \frac{\lambda\Gamma}{\xi^2}\right)\tau}\,\Omega_0^{\frac{2\lambda}{\xi^2}}}{\big[\Omega_0\cosh(\frac{\Omega_0\tau}{2}) - \Gamma\sinh(\frac{\Omega_0\tau}{2})\big]^{\frac{2\lambda}{\xi^2}}} \exp\Bigg(- \frac{V(k^2 + ik)\sinh(\frac{\Omega_0\tau}{2})}{\Omega_0\cosh(\frac{\Omega_0\tau}{2}) - \Gamma\sinh(\frac{\Omega_0\tau}{2})}\Bigg). \quad (31)$$

У формулі введено також позначення: $\Omega_0 = 2\Omega$, $b_1 = r(ik - 1)$. Вираз для $g(\tau, k, V)$ збігається з отриманим у [10], де для розв'язання рівняння (19) з гамільтоніаном (20) застосовано перетворення Лапласа за змінною V.

Для ціни європейського опціону типу колл (15) запишімо формулу

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau, x - x_0, V)(e^{x_0} - K)^+\, dx_0\,. \quad (32)$$

Підінтеґральний вираз у формулі (32) містить ядро $g(\tau, x - x_0, V)$, для визначення якого необхідно виконати інтеґрування за k у (16). Однак через складну залежність $g(\tau, k, V)$ (31) від k виконати інтеґрування в замкнутому вигляді неможливо. Подальших спрощень можна досягнути, якщо в інтеґралі (32) спочатку виконати інтеґрування за змінною x_0. З цією метою перепишімо вираз для $C(t)$ у вигляді

$$C(t) = \int\limits_{\ln(K)}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\tau, k, V) e^{ik(x - x_0)} dk (e^{x_0} - K)\, dx_0\,. \quad (33)$$

Для перестановки місцями інтеґралів за k і x_0 виконаймо зсув змінної $k \to k + (1+\epsilon)i$ в першому доданку і $k \to k + \epsilon i$ — в другому ($\epsilon > 0$). Таке перетворення є обґрунтованим, якщо функція $g(\tau, k, V)$ не має особливостей у смузі $\Im(k) \in [-(1 + \epsilon), 0]$ комплексної площини k. Після інтеґрування за x_0 отримаємо

$$C(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S\,g(\tau, k - i(1 + \epsilon), V) - K g(\tau, k - i\epsilon, V)}{ik + \epsilon} e^{(ik+\epsilon)\ln(S/K)}\, dk\,. \quad (34)$$

У границі $\epsilon \to 0$ використаймо формулу Сохоцького [15]

$$\frac{1}{k - i\epsilon} = \mathcal{P}\frac{1}{k} + i\pi\delta(k)\,,$$

де символ $\mathcal{P}$ вказує, що інтеґрал за k визначається в сенсі головного значення, а $\delta(k)$ – дельта-функція Дірака. У кінцевому підсумку одержимо

$$C(t) = \frac{1}{2}(S - e^{-r\tau}K) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S\,g(\tau, k - i, V) - K g(\tau, k, V)}{ik} e^{ik\ln(S/K)}\, dk\,. \quad (35)$$

При отриманні формули (35) враховано значення:

$$g(\tau,-i,V)=1, \qquad g(\tau,0,V)=e^{-r\tau}.$$

Праву частину (35) можна записати також вигляді, що відповідає відомій формулі Гестона

$$C(t)=SP_1-e^{-r\tau}KP_2\,, \tag{36}$$

де позначено:

$$P_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Re\Big[\frac{e^{ik\ln(S/K)}g(\tau,k-i,V)}{ik}\Big]dk\,, \tag{37}$$

$$P_2=\frac{1}{2}+\frac{e^{r\tau}}{\pi}\int_0^\infty \Re\Big[\frac{e^{ik\ln(S/K)}g(\tau,k,V)}{ik}\Big]dk\,. \tag{38}$$

Якщо виконати зсув $k\to k+(1+\epsilon)i$ в обох доданках формули (33), то після переходу до границі $\epsilon\to 0$ отримаємо еквівалентний запис формули для ціни опціону

$$C(t)=S\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Re\Big[\frac{e^{ik\ln(S/K)}g(\tau,k-i,V)}{k^2-ik}\Big]dk\Big). \tag{39}$$

Зазначимо, що одержані формули для опціонів досить зручні для чисельних розрахунків, які можна виконати, зокрема, за допомогою математичного пакета *Mathematica*.

IV. ЧАСТКОВІ ВИПАДКИ СТОХАСТИЧНОЇ ВОЛАНТИЛЬНОСТІ

Проаналізуймо деякі часткові випадки рівняння стохастичної волантильності (3) залежно від α. У літературі вивчались моделі з $\alpha=\{0,1,\frac{3}{2}\}$, для яких стохастичне рівняння для волантильності (3) відоме як модель Орнштайна–Уленбека, GARCH-модель і 3/2-модель відповідно. Ці моделі застосовували у фінансових розрахунках [2, 5, 16], окрім того, модель Орнштайна–Уленбека відома у статистичній механіці [1].

a. 3/2 – модель. Для $\alpha=\frac{3}{2}$ гамільтоніан (18) запишімо у вигляді

$$H_{\rm MG}(k)=-\frac{1}{2}\xi^2V^3\frac{\partial^2}{\partial V^2}-(\lambda+\mu V+ik\xi\rho V^2)\frac{\partial}{\partial V}+\frac{1}{2}(k^2+ik)V+r(1-ik). \tag{40}$$

Після наступної заміни:

$$g_1(\tau,k,V)=g_2\Big(\tau,z\Big),\; z=\frac{2}{\xi\sqrt{V}}, \tag{41}$$

доданок у гамільтоніані з другою похідною не міститиме множників, залежних від змінної. Зміст наступних перетворень полягає в усуненні в гамільтоніані доданка з першою похідною та сталих доданків, що детально продемонстровано на прикладі моделі Гестона. Пропускаючи зазначені перетворення, випишімо лише кінцеві вирази для рівняння типу (25) для перетвореної функції $g_0(\tau,z)$

$$\frac{\partial g_0(\tau,z)}{\partial\tau}=-H_0(z)g_0(\tau,z), \tag{42}$$

де гамільтоніан $H_0(z)$ має вигляд

$$H_0(z)=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\Phi(z). \tag{43}$$

Тут потенціал $\Phi(z)$ задається виразом

$$\Phi(z)=\frac{a_0}{z^2}+a_1z^2+a_2z^4+a_3z^6 \tag{44}$$

з параметрами:

$$a_0=\frac{3}{8}+\frac{2}{\xi^2}\Big((1-\rho^2)k^2+(1-\xi\rho)ik\Big),$$
$$a_1=\frac{1}{8}(\mu^2-3\lambda\xi^2+2\lambda\xi\rho ik),$$
$$a_2=\frac{1}{16}\lambda\mu\xi^2,\; a_3=\frac{1}{128}\lambda^2\xi^4.$$

Гамільтоніан $H_0(z)$ має структуру радіального ангармонічного осцилятора. Відомо, що така задача не має точного розв’язку, що свідчить про складність цієї моделі порівняно з моделлю Гестона. Можна зауважити, що задача суттєво спрощується у випадку $\lambda=0$. Тоді параметри $a_2=a_3=0$ і ми отримуємо гамільтоніан радіального осцилятора, для якого є точний розв’язок.

b. Модель Орнштайна–Уленбека. У випадку $\alpha=0$ стохастичне рівняння (3) має також назву процесу Орнштайна–Уленбека [2, 16]. Гамільтоніан (18) у цьому разі дорівнює

$$H_{\rm MG}(k)=-\frac{1}{2}\xi^2\frac{\partial^2}{\partial V^2}-(\lambda+\mu V+ik\xi\rho V^{\frac{1}{2}})\frac{\partial}{\partial V}+\frac{1}{2}(k^2+ik)V+r(1-ik). \tag{45}$$

Оскільки доданок із другою похідною не містить множника, залежного від V, то заміна змінної зведеться до масштабного перетворення

$$V=\xi z.$$

Усуваючи доданок із похідною першого порядку, після ряду перетворень, які ми пропускаємо, перейдімо до рівняння з гамільтоніаном

$$H_0(z)=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\Phi(z). \tag{46}$$

Тут потенціал $\Phi(z)$ має вигляд

$$\Phi(z)=\frac{a_1}{\sqrt{z}}+a_2\sqrt{z}+a_3z+a_4z^{\frac{3}{2}}+a_5z^2. \tag{47}$$

Параметри потенціалу задаються виразами:

$$a_1 = \frac{\rho}{4\sqrt{\xi}}\,ik,\; a_2 = \frac{\lambda\rho}{\sqrt{\xi}}\,ik,$$
$$a_3 = \frac{\lambda\mu}{\xi} + \frac{1}{2}(1-\rho^2)k^2 + \frac{\xi}{2}\,ik,$$
$$a_4 = \mu\rho\sqrt{\xi}\,ik,\; a_5 = \frac{1}{2}\mu^2.$$

Очевидно, динамічна задача (25) з гамільтоніаном (46) не має точного розв'язку. Потенціали вигляду (47), наскільки нам відомо, не вивчали в задачах квантової механіки. Доданок $\frac{a_1}{\sqrt{z}}$, зокрема, розглядали в деяких модельних задачах квантової механіки [17]. Задача суттєво спрощується у випадку $\rho = 0$, де параметри $a_1 = a_2 = a_4 = 0$, і ми отримуємо модель гармонічного осцилятора з лінійним доданком, яка має точний розв'язок [12]. Нагадаємо, що для $\rho = 0$ відсутня кореляція вінерівських процесів у рівняннях стохастичної динаміки ціни активу (2) і волантильності (3).

c. GARCH-модель. Стохастичне рівняння (3) для $\alpha = 1$ є неперервним випадком моделей GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) [2, 5, 16]. Для гамільтоніана (18) отримаємо

$$H_{\mathrm{MG}}(k) = -\frac{1}{2}\xi^2 V^2 \frac{\partial^2}{\partial V^2} - (\lambda + \mu V + ik\xi\rho V^{\frac{3}{2}})\frac{\partial}{\partial V} + \frac{1}{2}(k^2 + ik)V + r(1-ik). \tag{48}$$

Спершу в рівнянні (19) виконаймо заміну змінної:

$$g_1(\tau,k,V) = g_2\Big(\tau, z\Big), \qquad z = \frac{\ln(V)}{\xi}.$$

Усуваючи також доданки з першою похідною в рівнянні для $g_2(\tau,z)$, після перетворень, які пропускаємо, одержимо рівняння (42) з гамільтоніаном

$$H_0(z) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Phi(z), \tag{49}$$

де потенціал $\Phi(z)$ має вигляд

$$\Phi(z) = a_1 e^{-2\xi z} + a_2 e^{-\xi z} + a_3 e^{-\frac{\xi}{2}z} + a_4 e^{\frac{\xi}{2}z} + a_5 e^{\xi z} \tag{50}$$

з параметрами:

$$a_1 = \frac{\lambda^2}{2\xi^2},\; a_2 = \lambda\Big(\frac{\mu}{\xi^2} - 1\Big),\; a_3 = \frac{\lambda\rho}{\xi}ik,$$
$$a_4 = \frac{(\xi^2 - 4\mu)\rho}{4\xi}ik,\; a_5 = \frac{1}{2}\big((1-\rho^2)k^2 + ik\big).$$

Очевидно, задача для цього гамільтоніана не має точного розв'язку. Отриманий гамільтоніан можна розглядати як деяке розширення гамільтоніана Морзе [12]. Задача суттєво спрощується для $\lambda = 0$, оскільки коефіцієнти потенціалу $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ і ми одержуємо потенціал Морзе, для якого відомий точний розв'язок. Зазначимо також, що стохастичне рівняння для волантильності (3) у випадку $\lambda = 0$ ($\alpha = 1$) має вигляд геометричного броунівського руху. Якщо додатково покласти також параметр $\rho = 0$, то $a_4 = 0$ і відмінним від нуля є лише доданок з a_5 у (50), що відповідає потенціалу Ліувілля [12]. Замкнута форма розв'язку для $g(\tau,k,V)$ (19) для геометричного броунівського руху волантильності наведена в [5]. При цьому використано спектральний розклад для $g(\tau,k,V)$ на основі власних значень і власних функції гамільтоніана (48) (для $\lambda = 0$, $\alpha = 1$). Очевидно, цей розв'язок можна отримати, також використовуючи відому формулу для ядра потенціалу Морзе в рівнянні (27). Зауважимо також, що для потенціалів Морзе і Ліувілля формули наведені для функції Ґріна нестаціонарного рівняння Шредингера [12]. Для уявного часу функції Ґріна відповідатиме перетворення Лапласа $G(E,z,z0)$ для ядра $K(\tau,z,z0)$

$$G(E,z,z_0) = \int_0^\infty \exp(-E\tau)K(\tau,z,z_0)\,d\tau,\; (E>0).$$

Очевидно, для визначення $K(\tau,z,z_0)$ виникає проблема знаходження оберненого перетворення Лапласа.

ВИСНОВКИ

Цінова динаміка на фінансовому ринку моделюється за допомогою стохастичних процесів. У моделі Мертона–Ґармана використовують два стохастичні процеси — один моделює динаміку цінового активу $S(t)$, другий — зміну волантильності $V(t)$ ціни активу в часі. Із динамікою ціни активу пов'язана зміна ціни похідного фінансового інструмента опціону. Для визначення ціни опціону відоме рівняння Мертона–Ґармана, яке є еволюційним диференціальним рівнянням двох змінних. Після переходу до Фур'є-зображення за змінною x ($x = \ln(S)$) отримуємо одновимірне рівняння, коефіцієнти якого залежать від змінної Фур'є k. Одержане рівняння можна розглядати як рівняння Шредингера для уявного часу (або еквівалентне матриці густини статистичної механіки). Тому для аналізу розв'язків цього рівняння можна використати відомі результати, отримані в задачах квантової механіки. Для цього за допомогою перетворення змінної та шуканої функції рівняння перетворено до стандартного вигляду одновимірного рівняння Шредингера частинки в зовнішньому полі, яке містить оператор кінетичної енергії в декартових координатах і потенціал зовнішнього поля. Таким чином, показано, що модель Гестона для ціни опціону еквівалентна задачі радіального осцилятора і формулу Гестона отримано з використанням ядра для нестаціонарного рівняння Шредингера радіального осцилятора. Слід зауважити, що розв'язок задачі для радіального осцилятора був відомий задовго до одержання формули Гестона ціни опціону [9]. В інших часткових випадках моделі Мертона–Ґармана показано, що модель 3/2 еквівалентна моделі ангармонічного радіального осцилятора; модель Орнштайна–Уленбека зводиться до задачі, де потенціал є сумою потенціалу гармонічного осцилятора і складнішої залежності; потенціал для GARCH-моделі дорівнює сумі потенціалу Морзе та ряду інших подібних доданків. Відомо, що для таких задач немає точних розв'язків. Однак можна вказати нульові значення деяких параметрів для кожної з моделей, для яких потенціал суттєво спрощується і задача має точний розв'язок. Ненульові значення параметрів можна врахувати, зокрема, за теорією збурень, використовуючи відомі модельні розв'язки, що буде предметом окремої роботи.

---

[1] K Lindenberg, B. J. West, *The Nonequilibrium Statistical Mechanics of Open and Closed Systems* (VCH Publishers, New York, 1990).

[2] А. Н. Ширяев, *Основы стохастической финансовой математики. Т. 1,2* (ФАЗИС, Москва, 1998).

[3] J. C. Hull, *Options, Futures and Other Derivatives. 5th Edition* (Prentice Hall, 2003).

[4] F. Black, M. Scholes, J. Polit. Econ. **81**, 637 (1973).

[5] A. L. Lewis, *Option Valuation under Stochastic Volatility* (Finance Press, California, 2000).

[6] B. E. Baaquie, J Phys. I **7**, 1733 (1997).

[7] B. E. Baaquie, *Quantum finance. Path Integrals and Hamiltonians for Options and Interest Rates* (Cambridge University Press, New York, 2004).

[8] L. F. Blazhyevskyi, V. S. Yanishevsky, Condens. Matter Phys. **14**, 23001 (2011).

[9] S. L. Heston, Rev. Financ. Stud. **6**, 327 (1993).

[10] В. С. Янішевський, Р. В. Фещур, Прикл. пробл. мех. мат. **10**, 221 (2012).

[11] H. Risken, *The Fokker–Planck Equation* (Springer, 1996), p. 472.

[12] C. Grosche, F. Steiner, *Handbook of Feynman Integrals* (Springer-Verlag, Berlin, 1998).

[13] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics and Financial Markets. 3rd edition* (World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2004).

[14] Г. Г. Крылов, *Точно и квазиточно решаемые модели в квантовой механике и стохастической динамике* (БГУ, Минск, 2011).

[15] В. С. Владимиров, В. В. Жаринов, *Уравнения математической физики* (Москва, Физматлит, 2004).

[16] F. Slanina, Physica A **389**, 3230 (2010).

[17] J. Dereziński, M. Wrochna, Ann. Henri Poincaré **12**, 397 (2011).

OPTION PRICE DYNAMICS EQUATION AND MODELS OF QUANTUM MECHANICS

V. Yanishevsky

National University "Lvivska polytechnika",

12, Bandery St., Lviv, UA–79013, Ukraine

On the basis of model problems of quantum mechanics partial cases of Merton–Garman equations for the option price dynamics were analyzed. It was shown that the Heston model is equivalent with the one-dimensional problem of quantum-mechanical oscillator. A formula for the option price was derived basing on the evolution operator's kernel (propagator) of radial oscillator. By analogy with one dimensional Schrödinger equation for a particle in external field, a complexity of other partial cases of the Merton–Garman equation was shown and the parameter values, for which its exact solution exists, were defined.