ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 18, № 2/3 (2014) 2997 (4 с.)

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 18, No. 2/3 (2014) 2997 (4 p.)

# ЕЛЕКТРИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ В ГРАВІТАЦІЙНОМУ ПОЛІ

А. В. Раабе
*Кафедра механіки Львівського університету*

Пропонуємо увазі читачів статтю Антоні Раабе, асистента кафедри механіки Львівського університету, яка мала бути опублікована в “Наукових записках Львівського університету” 1940 року, однак сам журнал друком так і не вийшов. Авторські тексти на підставі рукописів українською та французькою мовами подано зі збереженням правопису і стилю. Стаття може бути цікавою як з історичного, так і з методичного погляду.

PACS number(s): 04.40.Nr, 01.65.+g

Відомо. що існує взаємний вплив електромагнітного і гравітаційного поля. З теорії Максвеля–Ейнштайна випливають залежності цих піль, з одної сторони електромагнітне поле є жерелом гравітаційного, з другої сторони метрика простору зміняє форму рівнянь електромагнітного поля. В дальшому будемо досліджувати останню залежність та вплив метрики простору на власну енергію пунктової електричної особливості.

Виходимо з рівнянь Максвеля в просторі Рімана

## SINGULARITÉS ÉLECTRIQUES DANS LES CHAMPS GRAVITIQUES

*Antoine Raabe*

Dans la note suivande nous allons examiner l’influence du champs gravitiques sur le champ électromagnétique d’après la théorie de Maxwell–Einstein. Nous partons des équations de Maxwell

$$\partial_\alpha \sqrt{-g}\, F^{\alpha\beta} = 0, \qquad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3. \tag{1}$$

де $g$ — детермінант $|g_{\alpha\beta}|$ коефіцієнтів метричної форми простору. Розглядаємо статичний випадок з сферичною симетрією, це значить коли коефіцієнти $g_{\alpha\beta}$ не залежні від часу, та єдиною не рівною нулеві складовою тензора електромагнітного поля є $F^{10}$, теж незалежне від часу.

Тому що існує сферична симетрія, приймаємо наступну метричну форму простору

et considérons le cas statique ayant la symmétrie sphérique, c. t. a. quand les coéfficients $g_{\alpha\beta}$ sont independants du temps et tous les composants du tenseur électromagnétique $F^{\alpha\beta}$ sont nuls, excepté $F^{10}$, qui est aussi independent du temps.

Nous employons la métrique suivante

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 + g_{11}dr^2 - r^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \tag{2}$$

таким чином

et nous avons par conséquent

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-g_{00}g_{11}}\, r^2 \sin\theta.$$

Рівняння Максвеля приводяться тоді до одного рівняння

Les équations de Maxwell se réduisent dans le cas examiner à une seule équation

$$\partial_1 \sqrt{-g}\, F^{10} = 0$$

якого розв’язком є функція

dont la solution générale est

$$F^{10} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{-g}}, \tag{3}$$

де $\varepsilon$ є сталою інтегрування, яка означає снаряд пунктової особливості. Інакше можемо написати

ou, dans une autre forme

$$F^{10} = \frac{\varepsilon}{r^2\sqrt{-g_{00}g_{11}}}. \tag{4}$$

З огляду на приняту форму (2), обниження індексів тензора $F^{\alpha\beta}$ виглядатиме

$$F_{10} = g_{00}g_{11}F^{10}$$

на основі (4), маємо звідце

$$F_{10} = \frac{\varepsilon}{r^2}\sqrt{-g_{00}g_{11}}. \tag{5}$$

З переходом в нескінченість гравітаційне поле прямує до нуля, тобто $g_{00} \to 1$, $g_{11} \to -1$, і тому електричне поле $F_{10}$ асимптотично наближається до Куломбовського.

Потенціал поля (5) можемо визначити з помочію інтегралу

Le composant covariant du champ électrique á la forme

$$F_{10} = g_{00}g_{11}F^{10} \tag{5}$$

Quand la distance entre le point examiner et la singularité tend vers l'infini le champ gravitique devient zéro, c. t. a. $g_{00} \to 1$, $g_{11} \to -1$, et par conséquent le champ électrique tend asymptotiquement vers le champ Coulombien.

Le potential électrostatique est donné par l'intégrale

$$\Phi(r) = \int_r^\infty F_{10}\,dr = \varepsilon\int_r^\infty \frac{\sqrt{-g_{00}g_{11}}}{r^2}\,dr. \tag{6}$$

Прямування гравітаційного поля до нуля при переході в нескінченість дає нам збіжність того інтегралу.

Перейдімо тепер до повної енергії електромагнітного поля

Le fait que le champ gravitique tend vers zéro dans l'infini, nous donne la condition suffisante de la convergence de cette l'intégrale.

Nous considérons, maintenant, l'énergie totale du champ électrique

$$W = \frac{1}{4\pi}\int \sqrt{-g}\,T^0{}_0\,d\tau,$$

де інтегрування розтягається по цілому просторі, $T^\alpha{}_\beta$ є тензор густоти енергії електромагнітного поля:

où $T^\alpha{}_\beta$ est tenseur de densité de l'énergie-impuls du champ électromagnétique

$$T^\alpha{}_\beta = F^{\alpha\mu}F_{\beta\mu} - \frac{1}{4}\,\delta^\alpha{}_\beta F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}.$$

В статичному випадку маємо

Dans le cas statique nous avons

$$T^0{}_0 = \frac{1}{2}F^{10}F_{10}.$$

На основі (4) і (5), одержимо

et d'après (4) et (5)

$$W_0 = \frac{1}{8\pi}\sqrt{-g}\,F^{10}\,d\tau = \frac{1}{8}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\sqrt{-g_{00}g_{11}}\,F^{10}F_{10}\,dr\,d\theta\,d\varphi = \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{-g_{00}g_{11}}}{r^2}\,dr. \tag{7}$$

На основі (6) можемо написати

Nous avons donc d'après (6)

$$W_0 = \frac{\varepsilon}{2}\Phi(0). \tag{8}$$

З попереднього бачимо, що всі простори схарактеризовані матричною формою (2), в яких для коефіцієнтів маємо $g_{00} = -\frac{1}{g_{11}}$, не можуть мати впливу на структуру електромагнітного поля і тому і на його повну енергію, яка стається тоді нескінчено велика, подібно енергії Куломбовского поля в просторі Мінковского. Коли метрика вибрана так, що потенціял $\Phi(r)$ для $r = 0$ не буде нескінчений, одержуємо скінчену повну енергію електричної точкової особливості. Ця метода полягає в тому, що шість добавочних сил в просторі Мінковского вибираємо відповідно простору Рімана.

Les résultats obtenus nous conduit a de considerations suivante. Toutes les éspaces caractérises par les formes métriques (2), oú les coéfficients satisfont à la condition $g_{00} = -\frac{1}{g_{11}}$, ne peuvent pas influencer la structure du champ. L'énergie est infini, analogiquement à l'énergie Coulombienne dans l'éspace de Minkowski.

Dans le cas où la métrique est telle que le potentiel $\Phi(r)$ est fini dans l'origine $r = 0$, nous obtenons l'énergie finie du champ de singularité ponctuelle. Par conséquent, nous voyons qu'il est possible d'obtenir l'énergie finie de l'électron ponctuel choisissant une métrique adéquate de l'éspace Riemanienne. Ceci vient du fait, qu'on peut substituer les forces agissantes dans l'éspace de Minkowski par une métrique dûment choisie de l'éspace de Riemann, dans lequel nous considérons les phénomène physiques.

## ELECTRIC SINGULARITIES IN THE GRAVITATIONAL FIELD

Antoni Raabe
*Chair for Mechanics, University of Lviv*

We offer to the readers an article by Antoni Raabe, an Assistant of the Chair for Mechanics of the University of Lviv, which was to be published in the *Scientific Notes...* of the Lviv University in 1940, however, the journal never appeared in print (see below). The author's texts based on the manuscripts in Ukrainian and French are reproduced with the spelling and style preserved. The article may be of interest from both historical and methodological point of view.

---

## ANTONI RAABE (1915–1942)

L. Maligranda[1], Ya. G. Prytula[2]
[1] *Department of Engineering Sciences and Mathematics, Luleå University of Technology, Sweden, lech.maligranda@ltu.se*
[2] *Faculty of Mechanics and Mathematics, Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine, ya.g.prytula@gmail.com*

Antoni Raabe (1915–1942) was a Polish theoretical physicist. He studied at the University of Warsaw (1932–1938) and worked at the Jagiellonian University in Cracow and the Ivan Franko State University of Lviv. He was killed on 7 September 1942 in Auschwitz. His three papers were published after the Second World War.

Antoni Raabe was born on 2 May 1915 in Warsaw. In the years 1924–1932 he attended private Władysław Giżycki's Gimnazjum for boys in Warsaw and graduated on 28 May 1932. From the autumn 1932 to 1938 he studied at the Faculty of Mathematics and Natural Sciences of the University of Warsaw. During the first two years he studied mathematics and then physics. On 27 September 1937 he finished his studies with a master's degree in physics. His master thesis described new theories of light.

In the academic year 1938/39 Raabe worked as a volunteer at the Chair of Theoretical Physics of the Jagiellonian University in Cracow. During the first semester he conducted research on new mechanics of material systems together with Myron Mathisson (1847–1940) and the second semester he dedicated to the theory of mesons with Jan Weyssenhoff (1889–1972).