ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 18, № 4 (2014) 4001(7 с.)

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 18, No. 4 (2014) 4001(7 p.)

ПОПРАВКИ ДО ЕНЕРҐЕТИЧНОГО СПЕКТРА АТОМА ВОДНЮ У ПРОСТОРІ ЗІ СПІНОВОЮ НЕКОМУТАТИВНІСТЮ КООРДИНАТ

В. М. Васюта
Львівський національний університет імені Івана Франка, кафедра теоретичної фізики, вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005, Україна, e-mail: waswasiuta@gmail.com

(Отримано 29 вересня 2014 р.; в остаточному вигляді — 21 жовтня 2014 р.)

Розглянуто атом водню у просторі зі спіновою некомутативністю координат. У межах звичайної теорії збурень за параметром некомутативності знайдено поправки до енерґетичних рівнів атома з $l \neq 0$, спричинені некомутативністю. Для одержання поправки до s-рівнів використано модифіковану теорію збурень. Унаслідок порівняння отриманих результатів з експериментальними даними знайдено обмеження зверху на параметр некомутативності.

Ключові слова: спінова некомутативність, атом водню, параметр некомутативності.

PACS number(s): 02.40.Gh, 03.65.−w

I. ВСТУП

Ідею, що оператори координат не комутують між собою, активно почали розвивати після публікації [1], у якій показано, що за наявності зовнішнього калібрувального поля координати на брані є некомутативними

$$[X_i, X_j] = i\theta_{ij}, \tag{1}$$

де θ_{ij} — сталий антисиметричний тензор. Некомутативність (1) зі сталою правою частиною координатного комутатора називають канонічною некомутативністю. Вона виникає також під час розгляду руху частинки малої маси в сильному магнітному полі [2, 3].

Зауважимо, що гіпотеза про некомутативні координати з'явилася в літературі ще задовго до [1]. Уважається, що сама ідея некомутативності належить Гайзенберґові. Її використав Паєрлс у згаданій вище праці [2], а через Паулі та Оппенгаймера ідея некомутативності дійшла до Снайдера, який наприкінці 1940-х років запропонував релятивістську некомутативну алґебру вигляду

$$[X_\mu, X_\nu] = il^2 L_{\mu\nu}, \tag{2}$$

де $L_{\mu\nu}$ — ґенератори поворотів Лоренца, l — малий параметр [4]. Але, за винятком кількох праць, фізики ідею некомутативності майже не розвивали. Лише в 70-х роках закладено основи некомутативної геометрії як математичної теорії.

Основною проблемою канонічної некомутативності (1) зі сталою правою частиною координатного комутатора є її неінваріантність відносно поворотів системи координат, а як наслідок існування виділеного в координатному просторі напряму.

Інваріантності щодо поворотів у некомутативних алґебрах можна досягнути, використовуючи у правій частині координатного комутатора складніші, ніж (1), конструкції. Зокрема, підставляючи ґенератори поворотів, отримуємо алґебру Снайдера (2). Замінюючи в (1) констант $\theta_{\mu\nu}$ на комутуючі між собою оператори $\widehat{\theta}_{\mu\nu}$, які перетворюються як компоненти тензора й разом з X_μ є координатами розширеного релятивістського 10-вимірного простору, одержуємо так звану DFR-алґебру [5].

Забезпечити інваріантність щодо поворотів у некомутативних алґебрах можна, сконструювавши θ_{ij} з векторів координат, які описують рух частинки у внутрішньому просторі. Таку алґебру, в припущенні, що внутрішні координати є координатами квантового гармонічного осцилятора, подано в [6].

Останнім часом запропоновано ряд некомутативних алґебр, у яких інваріантність системи стосовно поворотів досягається введенням у координатний комутатор (1) оператора спіну. Алґебри, в яких комутатори операторів координат рівні функціям спінових операторів, називають алґебрами зі спіновою некомутативністю (spin noncommutativity, noncommutativity due to spin).

Так, у [7] запропоновано таку алґебру зі спіновою некомутативністю

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta^2\varepsilon_{ijk}s_k, \quad [X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [P_i, P_j] = 0,$$

$$[s_i, s_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}s_k, \quad [X_i, s_j] = i\hbar\theta\varepsilon_{ijk}s_k, \tag{3}$$

де θ — параметр спінової некомутативності, s_k — k-та компонента оператора спіну, δ_{ij} — символ Кронекера. Таку алґебру отримуємо додаванням до координат оператора спіну

$$X_i = x_i + \theta s_i, \qquad P_i = p_i. \tag{4}$$

Легко бачити, що оскільки оператор спіну є вектором (псевдовектором), то така алґебра є інваріантною щодо поворотів.

Зауважимо, що в різних алґебрах, узагалі кажучи, різні параметри позначають однаковою літерою θ. Щоб уникнути непорозуміння, позначатимемо літерою θ з двома індексами параметр канонічної некомутативності, а θ без індексів — параметр спінової некомутативності в (3). Зазначимо, що ці два параметри мають також різну розмірність: параметр θ_{ij} — розмірність м^2, а θ — $\frac{\text{м}}{\text{Дж}\cdot\text{с}}$.

У [7] розглянуто суперсиметричну версію гармонічного осцилятора в просторі з алґеброю (3) і отримано точно хвильову функцію основного стану такого осцилятора. Показано, що основний стан осцилятора є безмежно кратно вироджений зі спонтанно порушеною симетрією щодо поворотів системи. Передбачено існування нової фази в системах із домінуючою диполь-дипольною взаємодією (наприклад, бозе-конденсат ^{52}Cr), які можуть бути змодельовані таким гамільтоніаном.

Розглянуто топологію ефекту Ааронова–Бома в просторі (3), показано, що основний внесок від некомутативності визначається комутативною задачею [8], тобто топологія не деформується, хоча поле на малих відстанях ($r \sim \theta$) має сильну асиметрію.

За допомогою цієї алґебри (з точністю до заміни $\theta \to i\theta$) можна пояснити триплетний куперівський механізм спарювання, знайдений у деяких екзотичних надпровідниках: для якого завгодно ненульового θ існують триплети з нижчою енерґією, ніж у синґлетах [9].

Пізніше (3) була узагальнена додаванням до операторів імпульсу операторів спіну: $P_i = p_i + \kappa s_i$ [10]

$$\begin{aligned} &[X_i, X_j] = i\hbar\theta^2\varepsilon_{ijk}s_k, \quad [P_i, P_j] = i\hbar\kappa^2\varepsilon_{ijk}s_k, \\ &[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \kappa\theta\varepsilon_{ijk}s_k), \quad [s_i, s_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}s_k, \\ &[X_i, s_j] = i\hbar\theta\varepsilon_{ijk}s_k, \quad [P_i, s_j] = i\hbar\kappa\varepsilon_{ijk}s_k. \end{aligned} \tag{5}$$

Для цієї алґебри, як і для (3), у [10] точно знайдено основний стан суперсиметричного розширення тривимірного гармонічного осцилятора. Також проаналізовано в межах теорії збурень рух частинки в однорідному магнітному полі в (2+1)-вимірному просторі з некомутативністю (5) [11]. Для цієї ж (2+1)-вимірної алґебри знайдено поправки до спектра класичного гармонічного осцилятора, а також показано, що осцилятор Дірака для такої алґебри зводиться до задачі Ландау в цьому ж просторі [12].

Побудовано також дещо іншу спінову некомутативність [13] із уведенням таких некомутативних координат: $X^\mu = x^\mu + \theta' W^\mu$, де $W^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}S_{\nu\rho}p_\sigma$ — псевдовектор Паулі–Любанського, $S_{\nu\rho} = \frac{i}{4}[\gamma_\nu, \gamma_\rho]$. Відповідна алґебра має вигляд

$$[X^\mu, X^\nu] = i\theta'\hbar\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}S_{\rho\sigma} - i\theta'^2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}W_\rho P_\sigma,$$

$$\begin{aligned} &[X^\mu, P^\nu] = -i\hbar g^{\mu\nu}, \quad [P^\mu, P^\nu] = 0, \\ &[X^\mu, \gamma^\nu] = -\frac{i\theta'}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\rho\gamma_\sigma. \end{aligned} \tag{6}$$

Однією з головних переваг цієї алґебри є її релятивістська інваріантність.

У [14] для такої алґебри розглянуто рівняння Дірака, показано існування закону збереження модифікованого електричного струму, а також, що для електрона в постійному магнітному полі некомутативність знімає виродження збуджених рівнів у другому порядку теорії збурень за параметром некомутативності. Незважаючи на лоренц-інваріантність (7), ця алґебра порушує мікропричинність [15].

Побудовано нерелятивістський аналог (7) уведенням нових координат $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \theta'\mathbf{W}$, де $W_i = \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\sigma_j p_k$ — тривимірний аналог вектора Паулі–Любанського [16]. Отримана алґебра має вигляд

$$\begin{aligned} &[X_i, X_j] = i\theta'\varepsilon_{ijk}s_k + i\frac{\theta'^2}{4\hbar}\varepsilon_{ijk}P_k(\mathbf{s}, \mathbf{P}), \ [X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \\ &[P_i, P_j] = 0, \quad [s_i, s_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}s_k, \\ &[X_i, s_j] = i\frac{\theta'}{2}(P_j s_i - \delta_{ij}(\mathbf{s}, \mathbf{P})). \end{aligned} \tag{7}$$

Показано, що в такій алґебрі є мінімальна довжина, а також знайдено точний розв'язок тривимірного гармонічного осцилятора [16].

У цій статті досліджено атом водню у просторі з алґеброю (3). З одного боку, атом водню є простою квантовомеханічною задачею, спектр і власні стани якого добре відомі. З іншого — атом водню — реальна фізична система з характеристиками, виміряними з високою точністю.

Атом водню вже вивчали в просторі з некомутативністю. Так у праці [17] показано, що у просторі з алґеброю (1) поправки до гамільтоніана є такими:

$$\Delta H = \frac{e^2}{4\hbar}\frac{\theta^k L_k}{r^3}, \tag{8}$$

де введено $\theta_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\theta^k$, а $L_k = \varepsilon_{klm}x^l p^m$ — вектор моменту імпульсу.

Атом водню у просторі зі спіновою некомутативністю досліджено у [18]. Використовуючи відомий результат (8) та позначивши $\theta^k = \Theta S^k$, автори знайшли таку поправку до гамільтоніана атома водню:

$$\Delta H = \frac{e^2\Theta}{4\hbar}\frac{S^k L_k}{r^3} \tag{9}$$

у просторі з представленням операторів координати $X_i = x_i - \frac{\Theta}{4\hbar}\varepsilon_{ijk}p^j S^k$, що відповідає алґебрі (7).

Структура цієї статті така. У розділі II знайдено поправки до спектра атома водню, спричинені некомутативністю (3). Для розрахунку поправок до рівнів з $l \neq 0$ у пункті II.A використано звичайну теорію збурень за параметром некомутативності θ, яка виявилася незастосовною для s-рівнів. Для визначення поправки до рівнів з $l = 0$ в пункті II.B розвинено модифіковану теорію збурень. У розділі III, порівнюючи отримані вирази й результати експериментальних вимірювань, ми знайшли верхню межу для чисельного значення параметра некомутативності θ.

II. АТОМ ВОДНЮ

A. Теорія збурень

Оператор Гамільтона атома водню у просторі зі спіновою некомутативністю (3) в представленні (4) має такий вигляд:

$$H = \frac{P^2}{2m} - \frac{e^2}{R}, \tag{10}$$

де $R^2 = r^2 + 2\theta(\mathbf{r}, \mathbf{s}) + \frac{3}{4}\hbar^2\theta^2$.

Зауважимо, що кулонівський потенціал у (10) є несинґулярним. Справді, власні значення R^2 рівні

$$r^2 \pm \hbar\theta r + \frac{3}{4}\hbar^2\theta^2 = \left(r \pm \frac{\hbar\theta}{2}\right)^2 + \frac{\hbar^2\theta^2}{2} \geq \frac{\hbar^2\theta^2}{2}.$$

Розкладаючи потенціальну енерґію в ряд за параметром некомутативності та зберігаючи лише перший член розкладу, отримаємо такий гамільтоніан:

$$H_0 = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + \frac{L^2 + 2m\theta e^2(\mathbf{n},\mathbf{s})}{2mr^2}, \tag{11}$$

де $p_r^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r$ — радіальна частина оператора Лапласа у сферичних координатах, L^2 — квадрат моменту імпульсу, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$.

Гамільтоніан (11) дозволяє розділити радіальні та кутові змінні. Справді, маючи власні значення оператора $L^2 + 2m\theta e^2(\mathbf{n},\mathbf{s})$, отримаємо радіальне рівняння Шрединґера. Для знаходження спектра цього оператора зауважимо, що

$$\left[J_i, L^2 + 2m\theta e^2(\mathbf{n},\mathbf{s})\right] = 0, \ \left[J^2, L^2 + 2m\theta e^2(\mathbf{n},\mathbf{s})\right] = 0,$$

де $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ — оператор повного моменту. Тобто як повний набір операторів для опису кутового руху частинки можемо взяти J^2 та J_z з відповідними власними значеннями $j(j+1)$ та m, а кутову частину хвильової функції вибрати як лінійну комбінацію власних функцій цих операторів, тобто сферичних спінорів Ω_{jlm}. Тому для заданих $j(j+1)$ та m кутова частина хвильових функцій матиме такий вигляд:

$$A_{jm}(\vartheta,\varphi) = C_-\Omega_{j,j-1/2,m} + C_+\Omega_{j,j+1/2,m}. \tag{12}$$

Враховуючи дію оператора $(\mathbf{n},\mathbf{s})$ на сферичні спінори [19]:

$$\begin{aligned}(\mathbf{n},\mathbf{s})\Omega_{j,j-1/2,m} &= \frac{i\hbar}{2}\Omega_{j,j+1/2,m},\\ (\mathbf{n},\mathbf{s})\Omega_{j,j+1/2,m} &= -\frac{i\hbar}{2}\Omega_{j,j-1/2,m},\end{aligned} \tag{13}$$

знайдемо власні значення оператора $L^2 + 2m\theta e^2(\mathbf{n},\mathbf{s})$ як розв'язки такого рівняння

$$\begin{vmatrix} \hbar^2\left(j-\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right) - \lambda & ime^2\hbar\theta \\ -ime^2\hbar\theta & \hbar^2\left(j+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{3}{2}\right) - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

Розв'язками цього рівняння є

$$\lambda_\pm = \hbar^2\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 \pm \sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 + m^2e^4\theta^2/\hbar^2}\right]. \tag{15}$$

Тоді перепишімо гамільтоніан (11) так:

$$H_0 = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + \frac{\lambda_\pm}{2mr^2}. \tag{16}$$

Розв'язком радіального рівняння Шрединґера для цього гамільтоніана є

$$\begin{aligned}E_{n,s_\pm} &= -\frac{R_{\mathrm{H}}}{(n+s_\pm)^2},\\ \mathcal{R}_{n,s_\pm} &= \rho^{s_\pm}e^{-\rho/2}F(-n, 2s_\pm+2, \rho),\end{aligned} \tag{17}$$

де R_{H} — стала Рідберга, $\rho = 2\sqrt{-2mE_{n,s_\pm}}r$, $F(-n, 2s+2, \rho) = {}_1F_1(-n; 2s+2; \rho)$ — вироджена гіпергеометрична функція. Квантове число набуває значень $n = 1, 2, \ldots$, а $s_\pm$ є додатним розв'язком рівняння

$$\hbar^2 s_\pm(s_\pm+1) = \lambda_\pm. \tag{18}$$

Як видно вже з (15), головні поправки до спектра є другого порядку за θ. Із точністю до θ^2 маємо

$$s_\pm = j \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\hbar^2\theta^2}{a^2(2j+1)(2j+1\pm1)}, \tag{19}$$

$$\begin{aligned}E^0_{nj} = &-\frac{R_{\mathrm{H}}}{\left(n+j\pm\frac{1}{2}\right)^2}\\ &\pm \frac{2\hbar^2\theta^2 R_{\mathrm{H}}}{a^2(2j+1)(2j+1\pm1)\left(n+j\pm\frac{1}{2}\right)^3},\end{aligned} \tag{20}$$

де $a = \frac{\hbar^2}{me^2}$ — радіус Бора.

Для врахування всіх поправок другого порядку необхідно при переході від (10) до (11) зберегти в гамільтоніані доданки, пропорційні до θ^2. Гамільтоніан набуде вигляду

$$H = H_0 + V, \quad V = \frac{9\hbar^2\theta^2 R_{\mathrm{H}}}{32r^3}. \tag{21}$$

Середнє від V на функціях (17)

$$\begin{aligned}\langle V\rangle &= \left\langle\frac{9\hbar^2\theta^2 R_{\mathrm{H}}}{32r^3}\right\rangle\\ &= \frac{9\hbar^2\theta^2 R_{\mathrm{H}}}{32a^2n^3 s_\pm(s_\pm+1)(s_\pm+1/2)}.\end{aligned} \tag{22}$$

Таким чином, поправки до енерґії рівнів атома водню з $l \neq 0$ у просторі з алґеброю (3) відносно комутативної задачі є такими:

$$\Delta E_{nj} = \frac{\hbar^2\theta^2 R_{\mathrm{H}}}{a^2(2j+1\pm 1)\left(n+j\pm\frac{1}{2}\right)^3} \times \left(\frac{9}{4(2j\pm 1)(2j\pm 1+2)} \pm \frac{2}{2j+1}\right). \quad (23)$$

Як видно з (19), при $j = 1/2$ квантове число s_-, що відповідає λ_- і станам з $l = 0$, є пропорційним θ^2, що означає, що поправка (22) до спектра є порядку 1, а звичайна теорія збурень незастосовна в цьому випадку.

B. Модифікована теорія збурень для s-рівнів

Для отримання поправок до енерґії s-рівнів запишімо гамільтоніан (10) у вигляді

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2 + 2m\theta e^2(\mathbf{n},\mathbf{s})}{2mr^2} - \frac{e^2}{r} + V, \quad (24)$$

де оператор збурення

$$V = -\frac{e^2}{\sqrt{r^2+\frac{3}{4}\hbar^2\theta^2+2\theta r(\mathbf{n},\mathbf{s})}} + \frac{e^2}{r} - \frac{\theta e^2(\mathbf{n},\mathbf{s})}{r^2}. \quad (25)$$

Ураховуючи відому тотожність $f(c+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{\sigma})) = \frac{1}{2}(f(c+b)+f(c-b)) + \frac{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{\sigma})}{2b}(f(c+b)-f(c-b))$, перепишімо оператор збурення так:

$$V = -\frac{e^2}{2}\left[S_+ + S_-\right] - \frac{e^2}{2}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\sigma})\left[S_+ - S_-\right] + \frac{e^2}{r} - \frac{\hbar\theta e^2(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\sigma})}{2r^2}, \quad (26)$$

де введено позначення $S_\pm = \frac{1}{\sqrt{r^2+3\hbar^2\theta^2/4\pm\hbar\theta r}}$.

У межах теорії збурень шукатимемо перші поправки до енерґій s-рівнів як середні оператора збурення (26) на наступних хвильових функціях s-рівнів

$$\psi_{ns} = B_n \exp\left(-\frac{\alpha_n r}{2}\right) L^1_{n-1}(\alpha_n r) A_{1/2,m}(\vartheta,\varphi), \quad (27)$$

де стала нормування $B_n = 2/\sqrt{n^5a^3}$, $\alpha_n = 2/na$, $L^1_n(x)$ — поліноми Лаґерра

$$L^1_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} C^{n-i}_{n+1} x^i,$$

а кутова частина хвильової функції має вигляд

$$A_{1/2,m}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\hbar^2\theta^2}{4a^2}}}\left(\Omega_{1/2,0,m} - i\frac{\hbar\theta}{2a}\Omega_{1/2,1,m}\right).$$

Зауважимо, що (27) із точністю до першого порядку за θ є власною функцією гамільтоніана (11). Цього наближення достатньо для того, щоб отримати перші поправки до енерґії s-рівнів.

Усереднимо (26) за кутовими змінними

$$V^* = \langle A_{1/2,m}|V|A_{1/2,m}\rangle = -\frac{e^2}{2}\left[S_+ + S_-\right] + \frac{e^2}{2}\kappa\theta\left[S_+ - S_-\right] + \frac{e^2}{r} + \frac{\hbar^2\theta^2e^2}{4ar^2} + \mathcal{O}(\theta^3). \quad (28)$$

Розрахунок середнього від (28) на (27) непертурбативними методами здійснити не вдається. Тому для обчислення поправок розкладімо $S_\pm$ у ряд Тейлора. Відмінність в обчисленні поправок запропонованим методом від звичайної теорії збурень полягає в тому, що розклад у ряд Тейлора проводимо не в околі точки силового центра, а в околі зміщеної щодо силового центра точці. Критерієм вибору зміщеної точки є додатність знаменників членів розкладу, що забезпечує відсутність розбіжностей. Таких точок є багато, але зручно позбутися ірраціональностей і виділити в $S_\pm$ повний квадрат $S_\pm = \frac{1}{\sqrt{(r+\sqrt{3}\theta/2)^2\pm\theta r-\sqrt{3}\theta^2 r}}$ і розкладати вираз у ряд Тейлора в околі $(r+\frac{\sqrt{3}}{2}\theta)^2$:

$$S_\pm = \frac{1}{r+\sqrt{3}\theta/2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\frac{\theta^k(\sqrt{3}\mp 1)^k r^k}{(r+\sqrt{3}\theta/2)^{2k+1}}, \quad (29)$$

як буде видно далі, для виділення перших поправок (принаймні для s-рівнів) необхідно зберігати всі члени розкладу. Таким чином,

$$\langle V\rangle_{ns} = -\frac{e^2}{2}B_n^2\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1}A_n(p,q)\alpha_n^{p+q}\int_0^\infty dr\, e^{-\alpha_n r}r^{2+p+q} \times\left[\frac{2}{r+\sqrt{3}\theta/2} - \frac{2}{r} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta^k Q_k^+ r^k}{(r+\sqrt{3}\theta/2)^{2k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta^{k+1} Q_k^- r^k}{(r+\sqrt{3}\theta/2)^{2k+1}} - \frac{\hbar^2\theta^2}{2ar^2}\right], \quad (30)$$

де позначено $A_n(i,j) = \frac{(-1)^{i+j}}{i!j!}C_n^{n-1-i}C_n^{n-1-j}$, $Q_k^\pm = \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\left[(\sqrt{3}+1)^k \pm (\sqrt{3}-1)^k\right]$.

Інтеґрали, які виникають при розрахунку, можна обчислити так:

$$\int_0^\infty dr\,\frac{r^{2+k+i}e^{-\alpha x}}{(r+\beta)^{2k+1}} = \frac{(-1)^{k+i}}{(2k)!}\frac{\partial^{2k}}{\partial\beta^{2k}}\frac{\partial^{2+k+i}}{\partial\alpha^{2+k+i}}\int_0^\infty dr\,\frac{e^{-\alpha x}}{r+\beta} = \frac{(-1)^{k+i+1}}{(2k)!}\frac{\partial^{2k}}{\partial\beta^{2k}}\frac{\partial^{2+k+i}}{\partial\alpha^{2+k+i}}e^{\alpha\beta}\mathrm{Ei}(-\alpha\beta),$$

де $\mathrm{Ei}(-\alpha\beta)$ — інтеґральна показникова функція, $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}\theta$.

Після диференціювання отримаємо

$$I_k(i) = \theta^k \int_0^\infty dr\, \frac{r^{2+k+i}e^{-\alpha x}}{(r+\beta)^{2k+1}} = (-1)^{k+i}\theta^k \left[\sum_{j=0}^{2+k+i} C_{2+k+i}^j \frac{\alpha^{2k-j}}{(2k-j)!}\left(-\beta^{2+k+i-j}e^{\alpha\beta}\mathrm{Ei}(-\alpha\beta) + \sum_{l=1}^{2+k+i-j}(-1)^l(l-1)!\beta^{2+k+i-j-l}\alpha^{-l}\right) + \sum_{l=1}^{k-2-i}(-1)^l \frac{(l-1)!(2k-l)!}{(2k)!(k-2-i-l)!}\alpha^{k-2-i-l}\beta^{-l}\right].$$

Дослідимо одержаний вираз для різних k (порядок розкладу в ряд $S_\pm$). Виділімо перші поправки за θ з урахуванням розкладу інтеґральної показникової функції в ряд [21]

$$\mathrm{Ei}(x) = \gamma + \ln|x| + \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{nn!},$$

де $\gamma = 0.57721\ldots$ — стала Ейлера.

При $k=0$

$$I_0(i) = \int_0^\infty dr\, \frac{r^{i+2}e^{-\alpha r}}{r+\beta} = (-1)^{i+1}\beta^{i+2}e^{\alpha\beta}\mathrm{Ei}(-\alpha\beta) + \sum_{l=1}^{i+2}(-1)^{i+2-l}(l-1)!\beta^{i+2-l}\alpha^{-l},$$

що збігається з табличним значенням інтеґрала [20], як і повинно бути. Остаточно

$$I_0(i) = \frac{(i+1)!}{\alpha^{i+2}} - \frac{\sqrt{3}\theta}{2\alpha^{i+1}}i! + \frac{3\theta^2}{4\alpha^i}(1-\delta_{i,0})(i-1)! - \delta_{i,0}\theta^2\left(\gamma + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\theta\right)\right) + \mathcal{O}(\theta^3).$$

Вирази для $k=1$ та $k=2$ такі:

$$I_1(i) = \frac{\theta}{\alpha^{i+1}}\sum_{j=0}^{2}(-1)^j C_{3+i}^j \frac{(2+i-j)!}{(2-j)!} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\theta^2\delta_{i,0}\left(\gamma + \frac{5}{6} + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\theta\right)\right) - \frac{\sqrt{3}\theta^2}{2\alpha^i}(1-\delta_{i,0})\sum_{j=0}^{2}(-1)^j C_{3+i}^j \frac{(1+i-j)!}{(2-j)!} + \mathcal{O}(\theta^3),$$

$$I_2(i) = \theta^2\left[\delta_{i,0}\left(\gamma - \frac{25}{12} + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\theta\right)\right) + \frac{1-\delta_{i,0}}{\alpha^i}\sum_{j=0}^{4}(-1)^j C_{4+i}^j \frac{(3+i-j)!}{(4-j)!}\right] + \mathcal{O}(\theta^3).$$

Для $k>2$ доданки, пропорційні до θ^2, можна отримати лише з останньої суми за умови $i=0$, $l=k-2$

$$I_{k>0}(i) = \delta_{i,0}\theta^2 \frac{2^{k-2}(k-3)!(k+2)!}{3^{k/2-1}(2k)!} + \mathcal{O}(\theta^3).$$

Погрупуймо доданки у (30) за степенями θ з урахуванням здійсненого аналізу для $I_k(i)$. Безпосереднім обчисленням можна перевірити, що коефіцієнти біля θ^0 і θ^1 дорівнюють 0. Тоді

$$\langle V\rangle_{ns} = -\frac{e^2}{2}B_n^2\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1}A_n(p,q)\left[10\delta_{p+q,0}\hbar^2\theta^2\ln\frac{\sqrt{3}\hbar\theta}{na} + \hbar^2\theta^2\delta_{p+q,0}P_0 + \hbar^2\theta^2(1-\delta_{p+q,0})P_1(p+q)\right] + \frac{\hbar^2\theta^2}{a^2n^3}R_{\mathrm{H}},$$

де $P_0 = 10\gamma + \frac{9}{4} + \sum_{k=3}^{\infty} Q_k^+ \frac{(k-3)!(k+2)!}{(2k)!b^{k-2}} = 10.022\ldots$ і $P_1(i) = \frac{3}{2}(i-1)! + 3\sum_{j=0}^{4}(-1)^j C_{4+i}^j \frac{(3+i-j)!}{(4-j)!} + \sum_{j=0}^{2}(-1)^j C_{3+i}^j \frac{(1+i-j)!}{(2-j)!}(i-j-1)$ є числами. Значення $P_1(i)$ для перших i такі (точно): $P_1(1) = 3.5,\ P_1(2) = 2.5,\ P_1(3) = 3.0,\ P_1(4) = 3.0,\ P_1(5) = 12,\ P_1(6) = 180$.

З отриманого виразу видно, що поправки, пропорційні до $\theta^2 \ln \theta$, як і доданки зі всіх членів розкладу в ряд Тейлора ($k > 2$), виникають лише для хвильових функцій, у яких поліноми Лаґерра в радіальній частині містять доданки з r^0 (це випливає з наявності множника $\delta_{p+q,0}$). Така умова виконується лише для хвильових функцій s-рівнів.

Отже,

$$\langle V \rangle_{ns} = -10 R_{\mathrm{H}} \frac{\hbar^2\theta^2}{a^2 n^3}\left(\ln\frac{\hbar\theta}{a} + D(n)\right) + \frac{\hbar^2\theta^2}{a^2n^3} R_{\mathrm{H}}. \quad (31)$$

Остаточно поправки до s-рівнів комутативного атома водню, спричинені некомутативністю, з урахуванням поправок (19) дорівнюють

$$\Delta E_{ns} = -10 R_{\mathrm{H}} \frac{\hbar^2\theta^2}{a^2 n^3}\left(\ln\frac{\hbar\theta}{a} + D(n)\right), \quad (32)$$

де $D(1) = 1.552\ldots$, $D(2) = 1.146\ldots$, $D(3) = 0.911\ldots$, $D(4) = 0.746\ldots$, $D(5) = 0.620\ldots$, $D(6) = 0.516\ldots$.

Насамкінець зауважимо, що другий і вищі порядки теорії збурень дадуть поправки порядку θ^4 і вище.

III. ОЦІНКА ПАРАМЕТРА НЕКОМУТАТИВНОСТІ

Оцінімо верхню межу параметра некомутативності θ. Енерґія переходу між рівнями $2s - 1s$ атома водню виміряна з точністю до $\Delta f = 11$ Гц [22]

$$f_{2s-1s} = (2466\,061\,413\,187\,018 \pm 11)\ \text{Гц}. \quad (33)$$

Як було показано в попередньому розділі, некомутативність (3) зміщує енерґетичні рівні атома водню (32). Різниця між 2s та 1s рівнями при цьому змінюється на величину

$$\delta E_{2s-1s} \approx \frac{35}{4}\frac{\hbar^2\theta^2 R_{\mathrm{H}}}{a^2}\ln\left[C\frac{\hbar\theta}{a}\right], \quad (34)$$

де $(C - 5) < 10^{-3}$.

Але оскільки експериментальні результати добре пояснюються в межах комутативної квантової теорії, то зміна енерґії переходу через некомутативність (34) не може бути більшою, ніж похибка експерименту $\delta E_{2s-1s} \leq 11$ Гц. Звідси отримуємо для параметра некомутативності оцінку

$$\hbar\theta \leq 2.5 \cdot 10^{-19}\ \text{м}. \quad (35)$$

Зауважимо, що в середовищі, де взаємодія між частинками може бути ефективно врахована некомутативністю, можливі більші значення параметра некомутативності. Так, наприклад, для бозе-конденсату атомів ^{52}Cr отримано значення $\hbar\theta \sim 10^{-11}$ см [23].

Знайдене обмеження для параметра некомутативності досліджуваної алґебри (35) є жорсткішим, ніж знайдені, скажімо, для параметра канонічної некомутативності. Наприклад у [24] установлено верхню межу для двовимірної алґебри (1) на рівні $\theta_{xy} < 5.6 \cdot 10^{-15}$ м^2.

IV. ВИСНОВКИ

У статті проаналізовано атом водню у просторі зі спіновою некомутативністю (3). Показано, що в просторі з цією алґеброю кулонівський потенціал є несинґулярним у $r = 0$. Установлено, що квадрат моменту імпульсу не комутує з гамільтоніаном, а тому його власні значення не можуть входити до повного набору операторів, які описують стан. Натомість запропоновано характеризувати стани значеннями квадрата повного моменту і його проекції на вибрану вісь.

Знайдено поправки до спектра енерґій атома водню. Поправки до енерґії рівнів з $l \neq 0$ дорівнюють (23) і пропорційні до θ^2. Для знаходження поправок до енерґії s-рівнів розроблено модифіковану теорію збурень, згідно з якою розклад у ряд кулонівського потенціалу проведено не в околі точки $r = 0$, а в околі зміщеної щодо силового центра точки, що дозволило виділити поправки до спектра s-рівнів (32), які виявилися пропорційними до $\theta^2 \ln \theta$.

Виходячи з похибки вимірювання частоти переходу між рівнями $2s$–$1s$ атома водню, установлено верхню межу для параметра некомутативності $\hbar\theta < 2.5 \cdot 10^{-19}$ м.

V. ПОДЯКИ

Автор вдячний професорові В. М. Ткачуку за ідею цього дослідження та допомогу в розв'язанні проблем, які виникали під час роботи. Також автор хоче подякувати Христині Гнатенко за прочитання статті та цінні зауваження щодо її написання.

---

[1] N. Seiberg, E. Witten, J. High Energy Phys. **09**, 032 (1999).
[2] R. Peierls, Z. Phys. **80**, 763 (1933).
[3] G. Dunne, R. Jackiw, Nucl. Phys. B **33**, 114 (1993).
[4] H. S. Snyder, Phys. Rev. **71**, 38 (1947); Phys. Rev. **72**, 68 (1947).
[5] S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts, Comm. Math. Phys. **172**, 187 (1995).
[6] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A **378**, 3509 (2014).
[7] H. Falomir, J. Gamboa, J. López-Sarrión, F. Méndez, P. A. G. Pisani, Phys. Lett. B **680**, 384 (2009).
[8] Ashok Das, H. Falomir, M. Nieto, J. Gamboa, F. Méndez, Phys. Rev. D **84**, 045002 (2011).

[9] Ashok Das, J. Gamboa, F. Méndez, F. Torres, Phys. Lett. A **375**, 1756 (2011).
[10] H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe, F. Méndez, J. C. Rojas, Phys. Rev. D **85**, 025009 (2012).
[11] H. Falomir, F. Vega, J. Gamboa, F. Méndez, M. Loewe, Phys. Rev. D **86**, 105135 (2012).
[12] F. Vega, J. Math. Phys. **55**, 032105 (2014).
[13] M. Gomes, J. V. Kupriyanov, A. J. da Silva, Phys. Rev. D **81**, 085024 (2010).
[14] A. F. Ferrari, M. Gomes, V. G. Kupriyanov, C. A. Stechhahn, Phys. Lett. B **718**, 1475 (2013).
[15] J.-H. Huang, W. Wang, Mod. Phys. Lett. A **28**, 1250239 (2013).
[16] В. М. Васюта, Журн. фіз. досл. **17**, 3001 (2013).
[17] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, Phys. Rev. Lett. **86**, 2716 (2001).
[18] L. P. Colatto, A. L. A. Penna, W. C. Santos, Phys. Rev. D. **73**, 105007 (2006).
[19] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика* (Наука, Москва, 1989).
[20] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, 2007).
[21] М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям* (Наука, Москва, 1979).
[22] A. Matveev *et al.*, Phys. Rev. Lett. **110**, 230801 (2013).
[23] J. Gamboa, F. Méndez, preprint arXiv:0912.2645v1 [hep-th] (2009).
[24] Х. П. Гнатенко, Журн. фіз. досл. **17**, 4001 (2013).

CORRECTIONS TO THE ENERGY LEVELS OF HYDROGEN ATOM IN SPACE WITH SPIN NONCOMMUTATIVITY OF COORDINATES

V. M. Vasyuta
Ivan Franko National University of Lviv, Department for Theoretical Physics,
12, Drahomanov St., Lviv, UA–79005, Ukraine
e-mail: waswasiuta@gmail.com

The hydrogen atom was considered in space with spin noncommutativity of coordinates. Corrections to the energy levels with a nonzero orbital quantum number were calculated using perturbation theory. The modified perturbation theory was developed to find corrections to s-levels of hydrogen atom. The upper bound for parameter of noncommutativity was found by comparing obtained results with experimental data.