ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 19, № 1/2 (2015) 1005(14 с.)

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 19, No. 1/2 (2015) 1005(14 p.)

ВНУТРІШНЯ ЕНЕРҐІЯ БАГАТОБОЗОННОЇ СИСТЕМИ З УРАХУВАННЯМ ПРЯМИХ ТРИ- ТА ЧОТИРИЧАСТИНКОВИХ КОРЕЛЯЦІЙ

І. О. Вакарчук, О. І. Григорчак
Кафедра теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка, вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005, Україна

(Отримано 24 лютого 2015 р.; в остаточному вигляді — 12 червня 2015 р.)

На основі матриці густини взаємодіючих бозе-частинок у координатному зображенні [І. О. Вакарчук, О. І. Григорчак, Журн. фіз. досл. **13**, 3004 (2009)] розраховано кінетичну, потенціальну і повну внутрішню енергію багатобозонної системи для широкого інтервалу температур із урахуванням прямих три- і чотиричастинкових кореляцій. У границі низьких температур отриманий вираз для повної внутрішньої енергії збігається з виразом для енергії основного стану в наближенні "двох сум за хвильовим вектором" й узгоджується з тим, який був знайдений різними методами раніше. Результати роботи можна застосувати для чисельного розрахунку теплоємності рідкого ^{4}He і кількісної перевірки теоретичних й експериментальних даних, особливо в ділянці λ-переходу.

Ключові слова: рідкий ^{4}He, енергія багатобозонної системи, λ-перехід.

PACS number(s): 05.30.Jp, 67.25.bd, 67.25.de

I. ВСТУП

Розрахунок внутрішньої енергії такої багатобозонної системи, як рідкий ^{4}He, має доволі давню історію. Великою мірою це пов'язано із прагненням теоретично описати λ-подібний хід кривої теплоємності в околі точки фазового переходу. Перші кроки зробив у напрямі наближеного обчислення енергії основного стану й енергетичного спектра цієї системи ще Боголюбов [1] майже сімдесят років тому. Пізніше він разом із Зубарєвим у роботі [2] знайшли хвильову функцію основного стану, а також хвильові функції нижніх збуджених рівнів для слабонеідеального бозе-газу за допомогою методу колективних змінних.

У границі зникаюче малої взаємодії енергія основного стану бозе-системи була вперше коректно знайдена у праці [3]. Розрахунок проведено з використанням псевдотенціалу.

Дослідження термодинамічних функцій основного стану рідкого ^{4}He, зокрема внутрішньої енерґії, у наближенні вищому, ніж наближення Боголюбова, було проведено в низці праць [4–7]. Завдяки їм показано, що врахування три- та чотиричастинкових кореляцій поліпшує значення для енергії основного стану.

Трохи згодом у працях [8, 9] за допомогою двочасових температурних функцій Ґріна отримано вирази для термодинамічних функцій рідкого ^{4}He в ширкотемпературному діапазоні.

У підході колективних змінних термодинамічні функції багатобозонної системи в широкотемпературній області знайдено в роботі [10]. Обчислення зроблено за допомогою усереднення з матрицею густини взаємодіючих бозе-частинок у наближенні парних кореляцій. Узгодження з експериментальними даними отриманих результатів для кінетичної, потенціальної та повної внутрішньої енергії є досить добрим [11–14], однак неповним. Це великою мірою пов'язано з тим, що для матриці густини було взято лише наближення парних кореляції. Для точніших результатів потрібно врахувати три- та чотиричастинкові кореляції. Як відомо [15,16], їх внесок у значення термодинамічних функцій може виявитися досить значним. Урахування внесків три- і чотиричастинкових кореляцій у внутрішню енергію багатобозонної системи і є предметом цієї роботи.

Сьогодні вивчають термодинамічні властивості ^{4}He не тільки для рідкого [17–19] чи газоподібного стану [20], багато праць присвячені і твердому стану [21–25]. Активно вивчають термодинаміку плівок [26–28] та сумішей [29, 30], а також поведінку ^{4}He в різних середовищах [31–33].

Варто також зауважити, що важливе значення в дослідженні властивостей рідкого ^{4}He та вивченні його термодинамічних функцій мають чисельні методи розрахунку, зокрема такі, як: дифузійний метод Монте-Карло (дослідження основного стану) [34–36], метод Монте-Карло з використанням інтеґралів за траєкторіями [37–39] чи функцій Ґріна [40], "незміщений" метод Монте-Карло (unbiased Monte Carlo) [41]. При застосуванні згаданих чисельних методів постає проблема задання міжатомного потенціалу взаємодії в гелії. Для цього в різний час використовували потенціали Слетера–Кірквуда [42], Ленарда-Джонса [43, 44], Азіза–Сламана [45, 46]. Застосовують також потенціали, які враховують багаточастинкові кореляції, зокрема тричастинкові [47]. Корисним також є потенціал Аксильрода–Теллера [48], який враховує диполь-диполь-дипольні взаємодії та аналітичний потенціал Парішa–Дикстри [49]. Інший підхід до цієї проблеми запропоновано у працях [8, 50], де міжатомний потенціал взаємодії був відновлений за експериментальними даними. Результатами саме цього підходу ми скористаємося для чисельних розрахунків у цій роботі.

У наших попередніх статтях [51–53] були знайдені матриця густини, статистична сума, дво-, три- і чотиричастинкові структурні фактори в широкому інтервалі температур із урахуванням прямих три- та чотиричастинкових кореляцій. Отримані результати стали основою обчислення виразів для кінетичної, потенціальної й повної внутрішньої енерґії багатобозонної системи в наближенні "двох сум за хвильовим вектором". Чисельний розрахунок термодинамічних функцій проведено з урахуванням раніше знайденої ефективної маси [54]. Отриманий вираз для повної внутрішньої енерґії в границі низьких температур узгоджується з уже відомим результатом [4].

II. ЕНЕРҐІЯ, РОЗРАХОВАНА НА ОСНОВІ МАТРИЦІ ГУСТИНИ ВЗАЄМОДІЮЧИХ БОЗЕ-ЧАСТИНОК БЕЗ ВИДІЛЕННЯ МАТРИЦІ ГУСТИНИ ІДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗУ

У праці [52] знайдено статистичну суму багатобозонної системи в наближенні "двох сум за хвильовим вектором" із урахуванням прямих три- та чотиричастинкових кореляцій на основі матриці густини взаємодіючих бозе-частинок без виділення матриці густини ідеального бозе-газу в такому вигляді:

$$Z = e^{-\beta F_0} \exp\left[\frac{\overline{C}_0}{N}\right] \exp\left[2 \sum_{\mathbf{q_1}\neq 0} \frac{\overline{C}_2(\mathbf{q_1})}{\alpha_{q_1} \operatorname{th}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]} + \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{q_1}\neq 0}\sum_{\mathbf{q_2}\neq 0} \frac{\overline{C}_4(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2})}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2} \operatorname{th}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right] \operatorname{th}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]} \right.$$
$$\left. + \frac{12}{N} \sum_{\mathbf{q_1}\neq 0}\sum_{\mathbf{q_2}\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q_3}\neq 0 \\ \mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}=0}} \frac{{\overline{C}_3}^2(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2},\mathbf{q_3})}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3} \operatorname{th}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right] \operatorname{th}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right] \operatorname{th}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]}\right], \tag{2.1}$$

де

$$\alpha_q = \sqrt{1 + \frac{2N}{V}\nu_q \bigg/ \frac{\hbar^2 q^2}{2m}},$$
$$E_q = \varepsilon_q \alpha_q = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}\alpha_q, \tag{2.2}$$

$$F_0 = \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0 - \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{\hbar^2 q^2}{8m}(\alpha_q - 1)^2 + \frac{1}{\beta}\sum_{\mathbf{q}\neq 0} \ln\left(1 - e^{-\beta E_q}\right), \tag{2.3}$$

$\nu_q = \int e^{-i\mathbf{qr}}\Phi(r)d\mathbf{r}$ — це коефіцієнт Фур'є енерґії парної взаємодії між частинками, $\beta = 1/T$ — обернена температура. Явні вирази для величин $\overline{C}_2(\mathbf{q_1})$, $\overline{C}_3(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2},\mathbf{q_3})$, $\overline{C}_4(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2})$ наведені в роботах [51, 53].

Якщо скористатися виразом (2.1) для статистичної суми і згідно з формулою

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z \tag{2.4}$$

знайти внутрішню енерґію багатобозонної системи в наближенні "двох сум за хвильовим вектором", то виявиться, що в границі низьких температур вона поводиться правильно й переходить у вже відомий [4] вираз, натомість в границі високих температур дає некоректні результати. Це пов'язано з тим, що і статистична сума, якою ми скористалися для обчислення, не переходить у класичний вираз за високих температур, як це було показано раніше [52]. Для того, щоб отримати коректний вираз для енерґії, який би давав правильні результати як у границі низьких, так і в границі високих температур, потрібно розрахунок енерґії проводити з матрицею густини взаємодіючих бозе-частинок із виділеною матрицею густини ідеального бозе-газу.

III. ЕНЕРҐІЯ, РОЗРАХОВАНА НА ОСНОВІ МАТРИЦІ ГУСТИНИ ВЗАЄМОДІЮЧИХ БОЗЕ-ЧАСТИНОК ІЗ ВИДІЛЕНОЮ МАТРИЦЕЮ ГУСТИНИ ІДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗУ

Середню енерґію системи N безспінових бозе-частинок із координатами $(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$ можна записати так:

$$E = \langle\hat{H}\rangle = \langle\hat{K}\rangle + \langle\hat{\Phi}\rangle, \tag{3.5}$$

де $\hat{H}$ — гамільтоніан указаної системи, $\hat{K}$ — оператор кінетичної, а $\hat{\Phi}$ — потенціальної енерґії:

$$\hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{j=1}^{N}\nabla_j^2, \tag{3.6}$$

$$\hat{\Phi} = \sum_{1\leq i<j\leq N}\Phi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \tag{3.7}$$

Усереднення проводиться з матрицею густини взаємодіючих бозе-частинок із урахуванням прямих триі чотиричастинкових кореляцій із виділеною матрицею густини ідеального бозе-газу:

$$R(\rho|\rho') = R_N^0(r|r')P_{\text{pair}}(\rho|\rho')P(\rho|\rho') = R_N^0(r|r')\exp[U], \tag{3.8}$$

де $R_N^0(r|r')$ — матриця густини невзаємодіючих бозе-частинок, $P_{\text{pair}}(\rho|\rho')$ — фактор, який ураховує парні кореляції, а $P(\rho|\rho')$ — фактор, який ураховує прямі три- і чотиричастинкові кореляції.

$$R_N^0(r'|r) = \frac{1}{N!}\left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3N/2}\sum_Q \exp\left[-\frac{m}{2\beta\hbar^2}\sum_{j=1}^{N}(r'_j - r_{Q_j})^2\right],$$

де підсумовування за Q означає підсумовування за всіма перестановками координат частинок. Вираз для величини U має такий вигляд:

$$U = b_0 + \sum_{\mathbf{q}\neq 0} b_1(\mathbf{q})\rho_{\mathbf{q}}\rho'_{-\mathbf{q}_1} + \sum_{\mathbf{q}\neq 0} b_2(\mathbf{q})(\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}} + \rho'_{\mathbf{q}}\rho'_{-\mathbf{q}}) + c_0 + \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1} c_2(1^{j1}, -1^{i_1})\rho_{\mathbf{q}_1}^{j_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}^{i_1}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{1} c_3(1^{i_1}, 2^{i_2}, 3^{i_3})\rho_{\mathbf{q}_1}^{i_1}\rho_{\mathbf{q}_2}^{i_2}\rho_{\mathbf{q}_3}^{i_3}$$
$$+ \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{i_1,i_2=0}^{1}\sum_{j_1,j_2=0}^{1} c_4(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2})\rho_{\mathbf{q}_1}^{j_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}^{i_1}\rho_{\mathbf{q}_2}^{j_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}^{i_2}, \tag{3.9}$$

де індекси i_1, i_2, i_3, j_1, j_2 пробігають значення $0, 1$. Значення 1 відповідає наявності штриха біля відповідної величини, а значення 0 — відсутності;

$$b_0 = -\beta E_0 + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\ln\left[\frac{\alpha_q \,\mathrm{th}\left(\frac{\beta E_q}{2}\right)}{\mathrm{th}\left(\frac{\beta\varepsilon_q}{2}\right)}\right] + \sum_{\mathbf{q}\neq 0}\ln\left(\frac{1-e^{-\beta\varepsilon_q}}{1-e^{-\beta E_q}}\right), \tag{3.10}$$

$$b_1(q) = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha_q}{\mathrm{sh}(\beta E_q)} - \frac{1}{\mathrm{sh}(\beta\varepsilon_q)}\right], \tag{3.11}$$

$$b_2(q) = -\frac{1}{4}\left[\alpha_q \,\mathrm{cth}(\beta E_q) - \mathrm{cth}(\beta\varepsilon_q)\right]. \tag{3.12}$$

Явні вирази для величин c_0, c_2, c_3, c_4 є доволі громіздкими і наведені у праці [53].

IV. СЕРЕДНЯ КІНЕТИЧНА ЕНЕРҐІЯ

Скористаймося результатами роботи [10] і запишімо вираз для кінетичної енерґії в такий спосіб:

$$\left\langle \hat{K}\right\rangle = \left\langle \hat{K}_1\right\rangle + \left\langle \hat{K}_2\right\rangle + \left\langle \hat{K}_3\right\rangle, \tag{4.13}$$

де

$$\left\langle \hat{K}_1\right\rangle = \frac{\int d\mathbf{r}_1\ldots\int d\mathbf{r}_N\left[P_{\text{pair}}(\rho|\rho')P(\rho|\rho')\sum_{j=1}^{N}\left(-\frac{\hbar^2\nabla_j^2}{2m}\right)R_N^0(\mathbf{r}'_1,\ldots,\mathbf{r}'_N|\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)\right]_{\mathbf{r}'_1=\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}'_N=\mathbf{r}_N}}{\int d\mathbf{r}_1\ldots\int d\mathbf{r}_N P_{\text{pair}}(\rho|\rho)P(\rho|\rho)R_N^0(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N|\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)}. \tag{4.14}$$

Застосувавши теорему Блоха $-\partial R_N^0/\partial\beta = \hat{K}R_N^0$ до написаного вище виразу, знайдемо, що середнє

$$\left\langle \hat{K}_1\right\rangle = \frac{\partial}{\partial\beta'}\ln\left\{\int d\mathbf{r}_1\ldots\int d\mathbf{r}_N P_{\text{pair}}(\rho|\rho)P(\rho|\rho)R_N^0(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N|\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N;\beta')\right\}_{\beta'=\beta}, \tag{4.15}$$

яке у прийнятому наближенні "двох сум за хвильовим вектором" можна подати у вигляді:

$$\left\langle \hat{K}_1\right\rangle = \frac{\partial}{\partial\beta'}\ln\left\{\int d\mathbf{r}_1\ldots\int d\mathbf{r}_N P_{\text{pair}}(\rho|\rho)R_N^0(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N|\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N;\beta')\right\}_{\beta'=\beta} + \frac{\partial}{\partial\beta'}\ln\left[\langle P(\rho|\rho)\rangle\right]_{\beta'=\beta}. \tag{4.16}$$

Перший доданок у написаному виразі був знайдений у праці [10], а середнє $\langle P(\rho|\rho)\rangle$ має такий зміст:

$$\langle P(\rho|\rho)\rangle = \frac{\int d\mathbf{r}_1\ldots\int d\mathbf{r}_N R_N^0(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N|\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)P_{\text{pair}}(\rho|\rho)P(\rho|\rho)}{\int d\mathbf{r}_1\ldots\int d\mathbf{r}_N R_N^0(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N|\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)P_{\text{pair}}(\rho|\rho)}. \tag{4.17}$$

Це середнє вже було знайдене у праці [53]:

$$\langle P(\rho|\rho)\rangle = \exp\left\{C_0 + 2\sum_{\mathbf{q_1}\neq\mathbf{0}} C_2(\mathbf{q}_1)\frac{S_0(q_1)}{1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)} + \frac{2}{N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq\mathbf{0}}\sum_{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}} C_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\frac{S_0(q_1)}{1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)}\frac{S_0(q_2)}{1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)}\right.$$
$$+ \frac{2}{N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq\mathbf{0}}\sum_{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}}\sum_{\substack{\mathbf{q_3}\neq\mathbf{0}\\ \mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}=\mathbf{0}}} C_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\frac{S_0^{(3)}(q_1,q_2,q_3)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)][1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)][1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)]}$$
$$\left. + \frac{12}{N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq\mathbf{0}}\sum_{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}}\sum_{\substack{\mathbf{q_3}\neq\mathbf{0}\\ \mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}=\mathbf{0}}} C_3^2(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\frac{S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)][1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)][1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)]}\right\}, \tag{4.18}$$

де від величини β' залежать лише парний $S_0(q_i), i=1,2,3$ і тричастинковий $S_0^{(3)}(q_1,q_2,q_3)$ структурні фактори ідеального бозе-газу.

У результаті для величини $\left\langle \hat{K}_1\right\rangle$ отримаємо такий вираз:

$$\left\langle \hat{K}_1\right\rangle = \sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\varepsilon_q}{z_0^{-1}e^{\beta\varepsilon_q}-1} + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\lambda_q}{1+\lambda_q S_0(q)}\frac{\partial S_0(q)}{\partial\beta} - \frac{1}{8N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq\mathbf{0}}\sum_{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}}\left[\prod_{i=1}^{2}\frac{\lambda_{q_i}}{1+\lambda_{q_i}S_0(q_i)}\right]$$
$$\times\left\{\frac{\partial S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)}{\partial\beta} - \left[\sum_{j=1}^{2}\frac{\lambda_{q_j}}{1+\lambda_{q_j}S_0(q_j)}\frac{\partial S_0(q)}{\partial\beta}\right]S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)\right\}$$
$$+\frac{1}{3!}\frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq\mathbf{0}}\sum_{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}}\sum_{\substack{\mathbf{q_3}\neq\mathbf{0}\\ \mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}=0}}\left[\prod_{i=1}^{3}\frac{\lambda_{q_i}}{1+\lambda_{q_i}S_0(q_i)}\right]\left\{2S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\frac{\partial S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{\partial\beta}\right.$$
$$\left.-\left[\sum_{j=1}^{3}\frac{\lambda_{q_j}}{1+\lambda_{q_j}S_0(q_j)}\frac{\partial S_0(q)}{\partial\beta}\right]\left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\right]^2\right\} - 2\sum_{\mathbf{q_1}\neq\mathbf{0}}\frac{C_2(\mathbf{q}_1)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]^2}\frac{\partial S_0(q_1)}{\partial\beta}$$
$$-\frac{2}{N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq\mathbf{0}}\sum_{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}}C_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\sum_{\substack{\{i,j\}=\{1,2\},\\ \{2,3\},\{3,1\}}}\frac{1}{[1+\lambda_{q_i}S_0(q_i)]^2}\frac{S_0(q_j)}{1+\lambda_{q_j}S_0(q_j)}\frac{\partial S_0(q_i)}{\partial\beta}$$
$$-\frac{2}{N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq\mathbf{0}}\sum_{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}}\sum_{\substack{\mathbf{q_3}\neq\mathbf{0}\\ \mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}=\mathbf{0}}}\frac{C_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)][1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)][1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)]}$$
$$\times\left(\frac{\partial S_0^{(3)}(q_1,q_2,q_3)}{\partial\beta} - \left[\sum_{j=1}^{3}\frac{\lambda_{q_j}}{1+\lambda_{q_j}S_0(q_j)}\frac{\partial S_0(q)}{\partial\beta}\right]S_0^{(3)}(q_1,q_2,q_3)\right)$$
$$+\frac{12}{N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq\mathbf{0}}\sum_{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}}\sum_{\substack{\mathbf{q_3}\neq\mathbf{0}\\ \mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}=\mathbf{0}}}C_3^2(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\sum_{\substack{\{i,j,l\}=\{1,2,3\},\\ \{2,3,1\},\{3,1,2\}}}\frac{1}{[1+\lambda_{q_i}S_0(q_i)]^2}\frac{S_0(q_j)}{1+\lambda_{q_j}S_0(q_j)}\frac{S_0(q_l)}{1+\lambda_{q_l}S_0(q_l)}\frac{\partial S_0(q_i)}{\partial\beta}. \tag{4.19}$$

Тепер перейдімо до розрахунку наступних середніх $\left\langle \hat{K}_2\right\rangle$ і $\left\langle \hat{K}_3\right\rangle$, вираз для яких легко записати, скориставшись результатами роботи [10]:

$$\left\langle \hat{K}_2\right\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\left\langle\sum_{j=1}^{N}\left(\nabla_j^2 U + [\nabla_j U]^2\right)|_{r_1'=r_1,\dots r_N'=r_N}\right\rangle,$$

$$\left\langle \hat{K}_3\right\rangle = \frac{\hbar^2}{4m}\left\langle\sum_{j=1}^{N}(\nabla_j^2 U + [\nabla_j U]^2\right\rangle.$$

Якщо перейти до представлення колективних змінних, то для величин $\left\langle \hat{K}_2\right\rangle$ і $\left\langle \hat{K}_3\right\rangle$ отримаємо такі вирази:

$$\left\langle\hat{K}_2\right\rangle = \sum_{\mathbf{k}_1\neq 0}\frac{\hbar^2 k_1^2}{2m}\left(\left\langle\rho_{\mathbf{k}_1}\frac{\partial U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_1}}\,|_{\rho=\rho'}\right\rangle - \left\langle\frac{\partial^2 U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_1}\partial\rho_{-\mathbf{k}_1}}\,|_{\rho=\rho'}\right\rangle - \left\langle\frac{\partial U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_1}}\frac{\partial U}{\partial\rho_{-\mathbf{k}_1}}\,|_{\rho=\rho'}\right\rangle\right)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{k}_1\neq 0\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2\neq 0}}\sum_{\mathbf{k}_2\neq 0}\frac{\hbar^2(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)}{2m}\left(\left\langle\rho_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\frac{\partial^2 U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_1}\partial\rho_{\mathbf{k}_2}}\,|_{\rho=\rho'}\right\rangle + \left\langle\rho_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\frac{\partial U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_1}}\frac{\partial U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_2}}\,|_{\rho=\rho'}\right\rangle\right), \tag{4.20}$$

$$\left\langle\hat{K}_3\right\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}_1\neq 0}\frac{\hbar^2 k_1^2}{2m}\left(-\left\langle\rho_{\mathbf{k}_1}\frac{\partial U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_1}}\right\rangle + \left\langle\frac{\partial^2 U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_1}\partial\rho_{-\mathbf{k}_1}}\right\rangle + \left\langle\frac{\partial U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_1}}\frac{\partial U}{\partial\rho_{-\mathbf{k}_1}}\right\rangle\right)$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{k}_1\neq 0\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2\neq 0}}\sum_{\mathbf{k}_2\neq 0}\frac{\hbar^2(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)}{2m}\left(\left\langle\rho_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\frac{\partial^2 U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_1}\partial\rho_{\mathbf{k}_2}}\right\rangle + \left\langle\rho_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\frac{\partial U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_1}}\frac{\partial U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_2}}\right\rangle\right). \tag{4.21}$$

Знак середнього $\langle\ldots\rangle$ тут знову має зміст усереднення з матрицею густини взаємодіючих бозе-частинок із урахуванням прямих три- та чотиричастинкових кореляцій:

$$\langle\ldots\rangle = \frac{\int d\mathbf{r}_j\ldots\int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r)P_{\mathrm{pair}}(\rho|\rho')P(\rho|\rho)(\ldots)}{\int d\mathbf{r}_j\ldots\int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r')P_{\mathrm{pair}}(\rho|\rho)P(\rho|\rho)}.$$

Зауважимо також, що

$$\left.\frac{\partial U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_1}}\right|_{\rho=\rho'} = -\frac{\lambda_{k_1}}{2}\rho_{-\mathbf{k}_1} + 4C_2(\mathbf{k}_1)\rho_{-\mathbf{k}_1}$$
$$+\frac{6}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}\\ \mathbf{k_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}=\mathbf{0}}}\sum_{\mathbf{q_3}\neq\mathbf{0}}C_3(\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\rho_{\mathbf{q_2}}\rho_{\mathbf{q_3}}$$
$$+\frac{8}{N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq\mathbf{0}}\sum_{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}}C_4(\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2)\rho_{-\mathbf{k}_1}\rho_{\mathbf{q_2}}\rho_{-\mathbf{q_2}}, \tag{4.22}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_1}\rho_{-\mathbf{k}_1}}\right|_{\rho=\rho'} = 2b_2(k_1) + \widetilde{C}_2(\mathbf{k}_1)$$
$$+\frac{4}{N}\sum_{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}}\widetilde{C}_4(\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2)\rho_{\mathbf{q_2}}\rho_{-\mathbf{q_2}}, \tag{4.23}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_1}\rho_{\mathbf{k}_2}}\right|_{\rho=\rho'} = \frac{6}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{q_3}\neq\mathbf{0}}\widetilde{C}_3(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_3)\rho_{\mathbf{q_3}}$$
$$+\frac{4}{N}\widetilde{C}'_4(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\rho_{-\mathbf{k}_1}\rho_{-\mathbf{k}_2}, \tag{4.24}$$

де

$$\widetilde{C}_2(\mathbf{k}_1) = c_2(1,-1) + c_2(-1,1),$$
$$\widetilde{C}_4(\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2) = \sum_{j_2,i_2=0}^{1}c_4(1,-1,2^{j_2},-2^{i_2}),$$
$$\widetilde{C}_3(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_3) = \sum_{i_3=0}^{1}c_3(1,2,3^{i_3}),$$
$$\widetilde{C}'_4(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = \sum_{j_1,i_2=0}^{1}[c_4(1,-1^{i_1},2,-2^{i_2})$$
$$+c_4(-1^{i_1},1,2,-2^{-i_2}) + c_4(1,-1^{i_1},-2^{j_2},2)$$
$$+c_4(-1^{i_1},1,-2^{i_2},2)]. \tag{4.25}$$

Явні вирази для величин $\widetilde{C}_2(\mathbf{k}_1)$, $\widetilde{C}_3(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_3)$, $\widetilde{C}_4(\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2)$ наведені в Додатку 1. Величини $C_2(\mathbf{k}_1)$, $C_3(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_3)$, $C_4(\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2)$ були знайдені раніше [53].

Підставляючи в рівність (4.20) отримані вирази (4.22), (4.23), (4.24), у прийнятому наближенні "двох сум за хвильовим вектором" знайдемо:

$$\left\langle\hat{K}_2\right\rangle = \sum_{\mathbf{k}_1\neq 0}\frac{\hbar^2 k_1^2}{2m}\left\{-\frac{\lambda_{k_1}}{4}(\lambda_{k_1}+2)\langle\rho_{\mathbf{k}_1}\rho_{-\mathbf{k}_1}\rangle + 2C_2(\mathbf{k}_1)(\lambda_{k_1}+1)\langle\rho_{\mathbf{k}_1}\rho_{-\mathbf{k}_1}\rangle - \widetilde{C}_2(\mathbf{k}_1) - 2b_2(\mathbf{k_1})\right.$$
$$+\frac{3(\lambda_{k_1}+1)}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}\\ \mathbf{k_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}=\mathbf{0}}}\sum_{\mathbf{q_3}\neq\mathbf{0}}C_3(\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\langle\rho_{\mathbf{k}_1}\rho_{\mathbf{q_2}}\rho_{\mathbf{q_3}}\rangle + \frac{4(\lambda_{k_1}+1)}{N}\sum_{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}}C_4(\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2)\langle\rho_{\mathbf{k}_1}\rho_{-\mathbf{k}_1}\rho_{\mathbf{q_2}}\rho_{-\mathbf{q_2}}\rangle$$
$$\left.-\frac{18}{N}\sum_{\substack{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}\\ \mathbf{k_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}=\mathbf{0}}}\sum_{\mathbf{q_3}\neq\mathbf{0}}C_3^2(\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\langle\rho_{-\mathbf{q_2}}\rho_{-\mathbf{q_3}}\rho_{\mathbf{q_2}}\rho_{\mathbf{q_3}}\rangle - \frac{4}{N}\sum_{\mathbf{q_2}\neq 0}\widetilde{C}_4(\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2)\langle\rho_{\mathbf{q_2}}\rho_{-\mathbf{q_2}}\rangle\right\}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{k}_1\neq 0\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2\neq 0}}\sum_{\mathbf{k}_2\neq 0}\frac{\hbar^2(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)}{2m}\left\{\frac{6}{\sqrt{N}}\widetilde{C}_3(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\langle\rho_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\rho_{-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\rangle + \frac{\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}}{4}\langle\rho_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\rho_{-\mathbf{k}_1}\rho_{-\mathbf{k}_2}\rangle\right.$$

$$- \frac{3}{\sqrt{N}} C_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \left(\lambda_{k_1} \langle \rho_{\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}} \rho_{-\mathbf{k_1}-\mathbf{k_1}} \rho_{\mathbf{k_1}} \rho_{-\mathbf{k_2}} \rangle + \lambda_{k_2} \langle \rho_{\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}} \rho_{-\mathbf{k_1}-\mathbf{k_2}} \rho_{\mathbf{k_2}} \rho_{-\mathbf{k_2}} \rangle \right) \Big\} . \tag{4.26}$$

Аналогічно для величини $\left\langle \hat{K_3} \right\rangle$ матимемо:

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{K_3} \right\rangle &= \sum_{\mathbf{k}_1 \neq 0} \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} \Big\{ \frac{\lambda_{k_1}}{2} (\lambda_{k_1} + 1) \langle \rho_{\mathbf{k_1}} \rho_{-\mathbf{k_1}} \rangle - 2C_2(\mathbf{k}_1)(2\lambda_{k_1} + 1) \langle \rho_{\mathbf{k_1}} \rho_{-\mathbf{k_1}} \rangle - \frac{\lambda_{k_1}}{2} + 2C_2(\mathbf{k}_1) \\
&- \frac{3(2\lambda_{k_1} + 1)}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{q_2} \neq \mathbf{0}}} \sum_{\substack{\mathbf{q_3} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{k_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}=\mathbf{0}}} C_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \langle \rho_{\mathbf{k_1}} \rho_{\mathbf{q_2}} \rho_{\mathbf{q_3}} \rangle - \frac{4(2\lambda_{k_1} + 1)}{N} \sum_{\mathbf{q_2} \neq \mathbf{0}} C_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_2) \langle \rho_{\mathbf{k_1}} \rho_{-\mathbf{k_1}} \rho_{\mathbf{q_2}} \rho_{-\mathbf{q_2}} \rangle \\
&+ \frac{36}{N} \sum_{\mathbf{q_2} \neq \mathbf{0}} \sum_{\substack{\mathbf{q_3} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{k_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}=\mathbf{0}}} C_3^2(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \langle \rho_{-\mathbf{q_2}} \rho_{-\mathbf{q_3}} \rho_{\mathbf{q_2}} \rho_{\mathbf{q_3}} \rangle + \frac{4}{N} \sum_{\mathbf{q_2} \neq 0} C_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_2) \langle \rho_{\mathbf{q_2}} \rho_{-\mathbf{q_2}} \rangle \Big\} \\
&- \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k_1} \neq 0} \sum_{\substack{\mathbf{k_2} \neq 0 \\ \mathbf{k_1}+\mathbf{k_2} \neq 0}} \frac{\hbar^2 (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)}{2m} \Big\{ \frac{6}{\sqrt{N}} C_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \langle \rho_{\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}} \rho_{-\mathbf{k_1}-\mathbf{k_2}} \rangle + \frac{\lambda_{k_1} \lambda_{k_2}}{2} \langle \rho_{\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}} \rho_{-\mathbf{k_1}} \rho_{-\mathbf{k_2}} \rangle \\
&- \frac{6}{\sqrt{N}} C_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \left(\lambda_{k_1} \langle \rho_{\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}} \rho_{-\mathbf{k_1}-\mathbf{k_2}} \rho_{\mathbf{k_1}} \rho_{-\mathbf{k_1}} \rangle + \lambda_{k_2} \langle \rho_{\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}} \rho_{-\mathbf{k_1}-\mathbf{k_2}} \rho_{\mathbf{k_2}} \rho_{-\mathbf{k_2}} \rangle \right) \Big\} .
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Підставивши у (4.26) і (4.27) відповідні вирази для всіх середніх $\langle \ldots \rangle$ (вони наведені у праці [53]) і обмежившись наближенням "двох сум за хвильовим вектором", отримаємо:

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{K_{23}} \right\rangle &= \left\langle \hat{K_2} \right\rangle + \left\langle \hat{K_3} \right\rangle = \sum_{\mathbf{k_1} \neq 0} \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} \Big\{ \frac{\lambda_{k_1}^2}{4} S(k_1) - 2C_2(\mathbf{k}_1) \lambda_{k_1} \frac{S_0(k_1)}{1 + \lambda_{k_1} S_0(k_1)} + (2C_2(\mathbf{k}_1) - \widetilde{C}_2(\mathbf{k}_1)) \\
&- \frac{3\lambda_{k_1}}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q_2} \neq 0} \sum_{\substack{\mathbf{q_3} \neq 0 \\ \mathbf{k_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}=0}} C_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) S^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) - \frac{4\lambda_{k_1}}{N} \sum_{\mathbf{q_2} \neq 0} C_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_2) \frac{S_0(k_1)}{1 + \lambda_{k_1} S_0(k_1)} \frac{S_0(q_2)}{1 + \lambda_{q_2} S_0(k_2)} \\
&+ \frac{18}{N} \sum_{\mathbf{q_2} \neq 0} \sum_{\substack{\mathbf{q_3} \neq 0 \\ \mathbf{k_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}=0}} C_3^2(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \frac{S_0(q_2)}{1 + \lambda_{q_2} S_0(q_2)} \frac{S_0(q_3)}{1 + \lambda_{q_3} S_0(q_3)} \\
&+ \frac{4}{N} \sum_{\mathbf{q_2} \neq 0} (C_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_2) - \widetilde{C}_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_2)) \frac{S_0(q_2)}{1 + \lambda_{q_2} S_0(q_2)} \Big\} \\
&- \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k_1} \neq 0} \sum_{\substack{\mathbf{k_2} \neq 0 \\ \mathbf{k_1}+\mathbf{k_2} \neq 0}} \frac{\hbar^2 (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)}{2m} \Big\{ \frac{6}{\sqrt{N}} (C_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) - \widetilde{C}_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)) \frac{S_0(|\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}|)}{1 + \lambda_{|\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}|} S_0(|\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}|)} \\
&+ \frac{\lambda_{k_1} \lambda_{k_2}}{4} S^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) - \frac{3}{\sqrt{N}} C_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \Big(\lambda_{k_1} \frac{S_0(k_1)}{1 + \lambda_{k_1} S_0(k_1)} \frac{S_0(|\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}|)}{1 + \lambda_{|\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}|} S_0(|\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}|)} \\
&+ \lambda_{k_2} \frac{S_0(k_2)}{1 + \lambda_{k_2} S_0(k_2)} \frac{S_0(|\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}|)}{1 + \lambda_{|\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}|} S_0(|\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}|)} \Big) \Big\} ,
\end{aligned} \tag{4.28}$$

де $S(k_1)$, $S^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ — це дво- і тричастинковий структурні фактори відповідно [53].

V. СЕРЕДНЯ ПОТЕНЦІАЛЬНА ЕНЕРҐІЯ

У представленні колективних змінних потенціальну енергію (3.7) запишемо так:

$$\Phi = \frac{N(N-1)}{2V} \nu_0 + \frac{N}{2V} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \nu_q (\rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} - 1). \tag{5.29}$$

Беручи до уваги явний вигляд для величини $S(q) = \langle \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \rangle$ [53], а також рівність

$$\frac{N}{2V} \nu_q = \frac{\hbar^2}{8m} (\alpha_q^2 - 1), \tag{5.30}$$

для середнього значення потенціальної енергії отримаємо такий вираз:

$$
\begin{aligned}
\langle\Phi\rangle \;=\; & \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0 + \sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\hbar^2}{8m}(\alpha_q^2-1)\left(\frac{S_0(q)}{1+\lambda_q S_0(q)}-1\right) \\
& - \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq 0}\frac{\hbar^2}{8m}(\alpha_{q_1}^2-1)\frac{1}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]^2}\sum_{\mathbf{q_2}\neq \mathbf{0}}\frac{\lambda_{q_2}}{1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)}S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2) \\
& + \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq 0}\frac{\hbar^2}{8m}(\alpha_{q_1}^2-1)\frac{1}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]^2}\sum_{\substack{\mathbf{q_2}\neq \mathbf{0}\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q_3}\neq \mathbf{0}}\frac{\lambda_{q_2}}{1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)}\frac{\lambda_{q_3}}{1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)}\left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\right]^2 \\
& + 4\sum_{\mathbf{q_1}\neq 0}\frac{\hbar^2}{8m}(\alpha_{q_1}^2-1)C_2(\mathbf{q_1})\frac{S_0^2(q_1)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]^2} + \frac{12}{N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq 0}\frac{\hbar^2}{8m}(\alpha_{q_1}^2-1)\frac{S_0(q_1)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]^2}\sum_{\substack{\mathbf{q_2}\neq \mathbf{0}\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q_3}\neq \mathbf{0}}C_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) \\
& \times \frac{S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{[1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)][1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)]} + \frac{8}{N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq 0}\frac{\hbar^2}{8m}(\alpha_{q_1}^2-1)\frac{S_0^2(q_1)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]^2}\sum_{\mathbf{q_2}\neq \mathbf{0}}C_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\frac{S_0(q_2)}{1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)} \\
& + \frac{72}{N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq 0}\frac{\hbar^2}{8m}(\alpha_{q_1}^2-1)\frac{S_0^2(q_1)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]^2}\sum_{\substack{\mathbf{q_2}\neq \mathbf{0}\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q_3}\neq \mathbf{0}}C_3^2(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\frac{S_0(q_2)S_0(q_3)}{[1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)][1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)]}.
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

Із написаного вище виразу потрібно виключити величину ν_0. Зробити це можна за допомогою рівності [10]:

$$c^2 = \frac{N}{m}\frac{\partial^2 E_0}{\partial N^2}, \tag{5.32}$$

де c — швидкість першого звуку в бозе-системі за температури абсолютного нуля, N — кількість частинок, m — маса частинки, E_0 — енерґія основного стану в наближенні "двох сум за хвильовим вектором". Вираз для E_0 ми одержимо трохи згодом і покажемо, що він збігається з відомим результатом [4].

Отож, для величини ν_0 будемо мати:

$$
\begin{aligned}
\nu_0 = \frac{1}{\rho}\Bigg[& mc^2 + \frac{1}{8N}\sum_{q\neq 0}\varepsilon_q\frac{1}{\alpha_q}\left(\alpha_q-\frac{1}{\alpha_q}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{48mN^2}\sum_{\substack{\mathbf{q_1}\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q_2}\neq 0}\sum_{\mathbf{q_3}\neq 0}\Bigg\{2\left(f_1-\frac{f_2^2}{f_3}-2f_4\right)+2\left(f_1'-\frac{2f_2f_2'}{f_3}+\frac{f_2^2f_3'}{f_3^2}-2f_4'\right) \\
& + \left(f_1''-\frac{2f_2''+2(f_2')^2}{f_3}+\frac{4f_2f_2'f_3'+f_2^2f_3''}{f_3^2}-\frac{2f_2^2(f_3')^2}{f_3^3}-2f_4''\right)\Bigg\}\Bigg].
\end{aligned}
$$

Тут ρ — це густина бозе-системи. Явні вирази для величин $f_1, f_2, f_3, f_4, f_1', f_2', f_3', f_4', f_1'', f_2'', f_3'', f_4''$ наведені в Додатку 2.

Якщо тепер зі знайдених середніх $\left\langle\hat{K}_1\right\rangle$, $\left\langle\hat{K}_{23}\right\rangle$, $\left\langle\hat{\Phi}\right\rangle$ виділити тільки внески від парних кореляцій і додати їх, то ми отримаємо вираз для середньої енерґії в наближенні парних кореляцій, який збігається з уже відомим [10]:

$$
\begin{aligned}
E = {} & N\frac{mc^2}{2} + \sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\varepsilon_q}{z_0^{-1}e^{\beta\varepsilon_q}-1} \\
& + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\lambda_q}{1+\lambda_q S_0(q)}\frac{\partial S_0(q)}{\partial\beta} \\
& + \frac{1}{4}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\varepsilon_q(\lambda_q^2+\alpha_q-1)\frac{S_0(q)}{1+\lambda_q S_0(q)} \\
& + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\varepsilon_q\left[\frac{\alpha_q}{\mathrm{sh}[\beta\alpha_q\varepsilon_q]}-\frac{1}{\mathrm{sh}[\beta\varepsilon_q]}\right] \\
& + \frac{1}{16}\sum_{q\neq 0}\varepsilon_q\left(1-\frac{1}{\alpha_q^2}\right)\left(\alpha_q-\frac{1}{\alpha_q}-4\alpha_q^2\right).
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

VI. КІНЕТИЧНА, ПОТЕНЦІАЛЬНА Й ПОВНА ЕНЕРҐІЯ В ГРАНИЦІ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР

У границі низьких температур парний структурний фактор ідеального бозе-газу дорівнює одиниці, а його похідна за оберненою температурою дорівнює нулеві. Ураховуючи відомі вирази для дво- і тричастинкового структурних факторів у границі низьких температур [53], а також те, що

$$\lim_{\beta\to\infty} C_2(\mathbf{q}_1) = \frac{1}{2}\lim_{\beta\to\infty}\widetilde{C}_2(\mathbf{q}_1) = \frac{1}{2}a_2(\mathbf{q}_1),$$

$$\lim_{\beta\to\infty} C_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) = \lim_{\beta\to\infty}\widetilde{C}_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) = \frac{1}{6}a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3),$$

$$\lim_{\beta\to\infty} C_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) = \lim_{\beta\to\infty}\widetilde{C}_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) = \frac{1}{8}a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2), \tag{6.34}$$

де

$$a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) = -\frac{\sum\limits_{1\le i<j\le 3}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)(\alpha_{q_i}-1)(\alpha_{q_j}-1)}{2\sum\limits_{j=1}^{3}\mathbf{q}_j^2\alpha_{q_j}}, \tag{6.35}$$

$$\begin{aligned} a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2) &= \frac{(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)^2 a_3^2(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_2) + (\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)^2 a_3^2(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)}{q_1^2\alpha_{q_1}+q_2^2\alpha_{q_2}} \\ &- \frac{[(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1)(\alpha_{q_1}-1)+(\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)(\alpha_{q_2}-1)]a_3(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_2)}{q_1^2\alpha_{q_1}+q_2^2\alpha_{q_2}} \\ &- \frac{[(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)(\alpha_{q_1}-1)+(\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_1)(\alpha_{q_2}-1)]a_3(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)}{q_1^2\alpha_{q_1}+q_2^2\alpha_{q_2}}, \end{aligned} \tag{6.36}$$

$$a_2(\mathbf{q}_1) = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\left[\frac{q_2^2}{2q_1^2\alpha_{q_1}}a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2) + \frac{(\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)}{q_1^2\alpha_{q_1}}a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)\right], \tag{6.37}$$

для середньої кінетичної енерґії в границі низьких температур знайдемо такий вираз:

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{K}\right\rangle &= \frac{1}{4}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\hbar^2q^2}{2m}\frac{(\alpha_q-1)^2}{\alpha_{q_1}} + \frac{1}{8N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq\mathbf{0}}\sum_{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}}\sum_{\substack{\mathbf{q_3}\neq\mathbf{0}\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\frac{\hbar^2q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}-1}{\alpha_{q_1}}\left[\prod_{i=1}^{3}\frac{\alpha_{q_i}-1}{\alpha_{q_i}}\right] - \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq 0}\frac{\hbar^2q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}^2-1}{\alpha_{q_1}^2}a_2(\mathbf{q}_1) \\ &- \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq\mathbf{0}}\sum_{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}}\sum_{\substack{\mathbf{q_3}\neq\mathbf{0}\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\frac{\hbar^2q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}-1}{\alpha_{q_1}^2\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}}a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) - \frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq\mathbf{0}}\sum_{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}}\frac{\hbar^2q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}^2-1}{\alpha_{q_1}^2\alpha_{q_2}}a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2) \\ &+ \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq\mathbf{0}}\sum_{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}}\sum_{\substack{\mathbf{q_3}\neq\mathbf{0}\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\frac{\hbar^2q_1^2}{2m}\frac{1}{\alpha_{q_1}^2\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}}a_3^2(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) - \frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq\mathbf{0}}\sum_{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}}\frac{\hbar^2(\mathbf{q_1q_2})}{2m}\left(\frac{(\alpha_{q_1}-1)(\alpha_{q_2}-1)}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{|\mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}|}}\right. \\ &\left.- 2\frac{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}-1}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}}a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\right). \end{aligned} \tag{6.38}$$

Аналогічно для середньої потенціальної енерґії будемо мати:

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\Phi}\right\rangle &= \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0 + \sum_{q\neq 0}\frac{\hbar^2q^2}{8m}\left(\alpha_q^2-1\right)\left(\frac{1}{\alpha_q}-1\right) \\ &+ \frac{1}{8N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq\mathbf{0}}\sum_{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}}\sum_{\substack{\mathbf{q_3}\neq\mathbf{0}\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\frac{\hbar^2q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}+1}{\alpha_{q_1}}\left[\prod_{i=1}^{3}\frac{\alpha_{q_i}-1}{\alpha_{q_i}}\right] + \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq 0}\frac{\hbar^2q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}^2-1}{\alpha_{q_1}^2}a_2(\mathbf{q}_1) \\ &+ \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq\mathbf{0}}\sum_{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}}\sum_{\substack{\mathbf{q_3}\neq\mathbf{0}\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\frac{\hbar^2q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}^2-1}{\alpha_{q_1}^2\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}}a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) + \frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq\mathbf{0}}\sum_{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}}\frac{\hbar^2q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}^2-1}{\alpha_{q_1}^2\alpha_{q_2}}a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2) \\ &+ \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq\mathbf{0}}\sum_{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}}\sum_{\substack{\mathbf{q_3}\neq\mathbf{0}\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\frac{\hbar^2q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}^2-1}{\alpha_{q_1}^2\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}}a_3^2(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3). \end{aligned} \tag{6.39}$$

Додавши вирази для середніх значень кінетичної й потенціальної енерґій та провівши необхідні перетворення, ми отримаємо величину середнього значення повної енерґії в границі низьких температур у такому вигляді:

$$
\begin{aligned}
E = \left\langle \hat{K} \right\rangle + \left\langle \hat{\Phi} \right\rangle = \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0 - \sum_{q\neq 0} \frac{\hbar^2 q^2}{8m}\left(\alpha_q - 1\right)^2 + \frac{\hbar^2}{48mN} \sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} \Bigg[(q_1^2+q_2^2+q_3^2) \\
\times \left(1-\frac{1}{\alpha_{q_1}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_2}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_3}}\right) - \frac{\left(\sum\limits_{1\leq i<j\leq 3} (\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)(\alpha_{q_i}-1)(\alpha_{q_j}-1)\right)^2}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\sum\limits_{j=1}^{3} q_j^2 \alpha_{q_j}} \Bigg] \\
- \frac{\hbar^2}{24mN} \sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} \sum_{1\leq i<j\leq 3} (\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_i}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_j}}\right). \qquad (6.40)
\end{aligned}
$$

Цей вираз для основного стану багатобозонної системи збігається зі знайденим раніше [4].

VII. КІНЕТИЧНА, ПОТЕНЦІАЛЬНА Й ПОВНА ЕНЕРҐІЯ В ГРАНИЦІ ВИСОКИХ ТЕМПЕРАТУР

У границі високих температур парний, три- і чотиричастинковий структурні фактори багатобозонної системи переходять у відповідні вирази для ідеального бозе-газу, а всі внески від три- і чотиричастинкових кореляцій дорівнюють нулеві [53]. Тому пошук значення кінетичної енергії в границі високих температур зводиться до такої задачі:

$$
\lim_{\beta\to 0}\left\langle \hat{K} \right\rangle = \lim_{\beta\to 0}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\varepsilon_q}{z_0^{-1}e^{\beta\varepsilon_q}-1}, \qquad (7.41)
$$

оскільки всі інші доданки у згаданій вище границі дорівнюють нулеві. Вираз (7.41) містить величину $z_0 = \exp[\beta\mu]$ (μ — це хімічний потенціал), яка називається активністю. Умову для її визначення можна записати цим рівнянням:

$$
\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{1}{z_0^{-1}e^{\beta\varepsilon_q}-1} = N, \qquad (7.42)
$$

де N — кількість частинок у бозе-системі. У границі високих температур $z_0 \to 0$, тому написану вище умову можна подати в такий спосіб:

$$
z_0\sum_{\mathbf{q}\neq 0} e^{-\beta\varepsilon_q} = N. \qquad (7.43)
$$

Переходячи в цій рівності від пісумовування до інтеґрування, будемо мати:

$$
z_0\frac{4\pi V}{(2\pi)^3}\int\limits_0^\infty q^2 e^{-\beta\frac{\hbar^2}{2m}q^2}dq = z_0\frac{V}{4}\left(\frac{2m}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} T^{\frac{3}{2}} = N. \quad (7.44)
$$

Звідси

$$
z_0^{-1} = \frac{1}{4\rho}\left(\frac{2m}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} T^{\frac{3}{2}}. \qquad (7.45)
$$

Підставивши щойно отриманий результат у рівність (7.41), провівши відповідні спрощення і перейшовши від підсумовування до інтеґрування, знайдемо, що

$$
\lim_{\beta\to 0}\left\langle \hat{K} \right\rangle = \frac{3}{2}NT. \qquad (7.46)
$$

Ми одержали результат, котрий збігається з виразом для ідеального газу.

Для значення середньої потенціальної енерґії в границі високих температур будемо мати:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\beta\to 0}\langle\Phi\rangle &= \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0 + \lim_{\beta\to 0}\frac{N}{2V}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\nu_q(\langle\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\rangle - 1) \\
&= \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0, \qquad (7.47)
\end{aligned}
$$

оскільки

$$
\lim_{\beta\to 0}\langle\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\rangle = 1. \qquad (7.48)
$$

Об'єднуючи отримані результати, для внутрішньої енерґії багатобозонної системи в границі високих температур здобудемо такий вираз:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\beta\to 0} E &= \lim_{\beta\to 0}\left\langle \hat{K} \right\rangle + \lim_{\beta\to 0}\langle\Phi\rangle \\
&= \frac{3}{2}NT + \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0, \qquad (7.49)
\end{aligned}
$$

який збігається з результатом роботи [55].

VIII. ЧИСЕЛЬНІ РОЗРАХУНКИ

Для чисельного розрахунку внутрішньої енерґії рідкого ^{4}He скористаймося знайденими виразами для $\langle K_1\rangle$ (4.19), $\langle K_{23}\rangle$ (4.28) і $\langle\Phi\rangle$ (5.31). Величину ν_0 будемо шукати за наведеною вище формулою (5.33). Щоб виконати поставлену задачу, потрібно від підсумовування перейти до інтеґрування за відомим правилом [56]:

$$\sum_{\mathbf{k}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}. \tag{8.50}$$

У нашому випадку двох сум це правило стане дещо складнішим:

$$\frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{k_1} \neq \mathbf{0}} \sum_{\mathbf{k_2} \neq \mathbf{0}} \sum_{\substack{\mathbf{k_3} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=0}} = \frac{1}{8\pi^4 \rho^2}$$

$$\times \int_0^\infty k_1\, dk_1 \int_0^\infty k_2\, dk_2 \int_{|q_1-k_2|}^{|q_1+k_2|} k_3\, dk_3, \tag{8.51}$$

де ρ — це рівноважна густина бозе-системи. Для такої квантової рідини, як ^{4}He, вона дорівнює $\rho = 0.02185\,\text{Å}^{-3}$; швидкість першого звуку в рідкому ^{4}He при нулі температур $c = 238.2$ м/с [57].

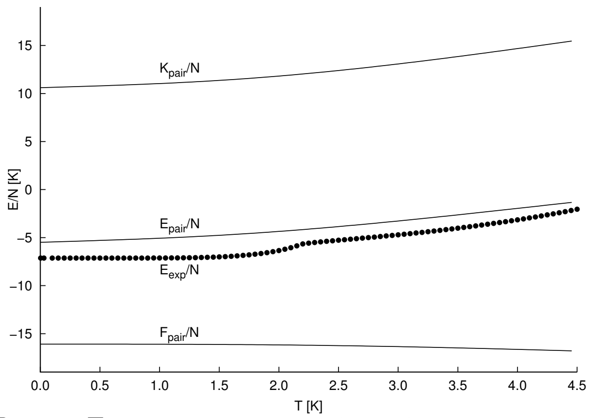

Рис. 1. Температурна залежність кінетичної, потенціальної й повної внутрішньої енерґії рідкого ^{4}He, розрахованих у наближенні парних кореляцій. K_{pair}/N — кінетична енерґія, F_{pair}/N — потенціальна енерґія, E_{pair}/N — повна внутрішня енерґія, E_{exp}/N — експериментальні дані.

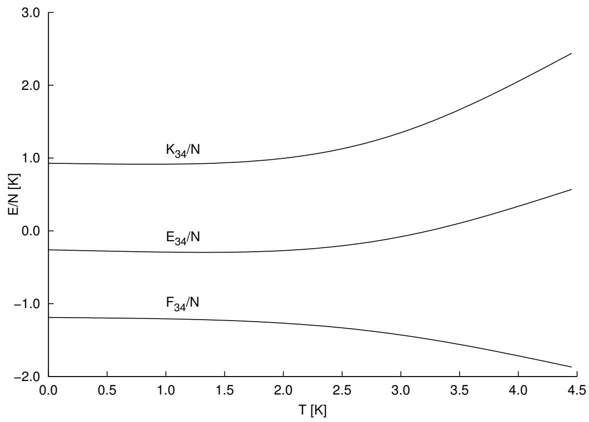

Рис. 2. Внесок три- та чотиричастинкових кореляцій у значення кінетичної, потенціальної й повної внутрішньої енерґій рідкого ^{4}He. K_{34}/N — внесок у кінетичну енерґію, F_{34}/N — внесок у потенціальну енерґію, E_{34}/N — внесок у повну внутрішню енерґію.

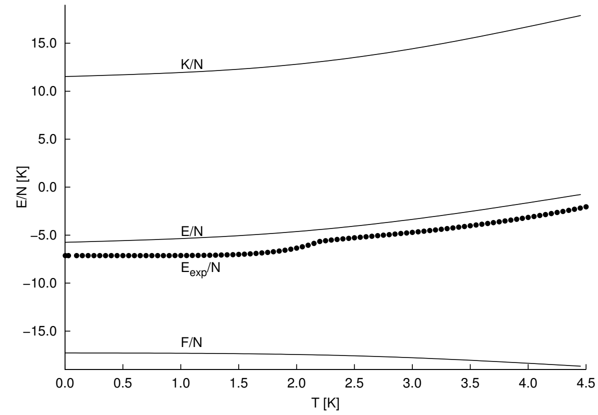

Рис. 3. Температурна залежність кінетичної, потенціальної й повної внутрішньої енерґій рідкого ^{4}He, розрахованих у наближенні "двох сум за хвильовим вектором". K/N — кінетична енерґія, F/N — потенціальна енерґія, E/N — повна внутрішня енерґія, E_{exp}/N — експериментальні дані.

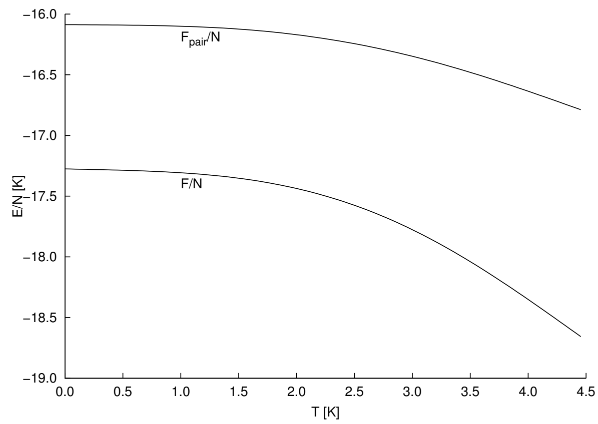

Рис. 4. Температурна залежність потенціальної енерґії рідкого ^{4}He. F_{pair}/N — потенціальна енерґія в наближенні парних кореляцій, F/N — потенціальна енерґія в наближенні "двох сум за хвильовим вектором".

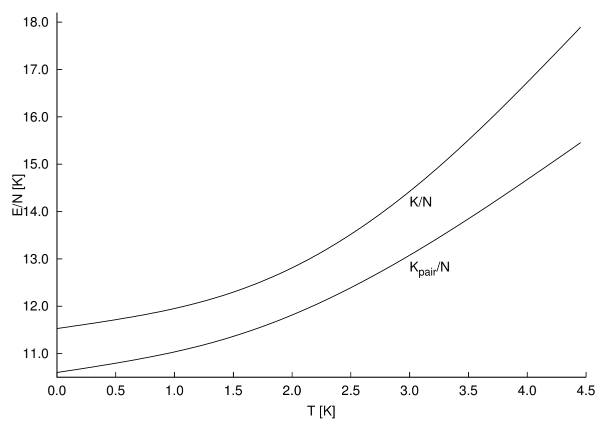

Рис. 5. Температурна залежність кінетичної енерґії рідкого ^{4}He. K_{pair}/N — кінетична енерґія в наближенні парних кореляцій, K/N — кінетична енерґія в наближенні "двох сум за хвильовим вектором".

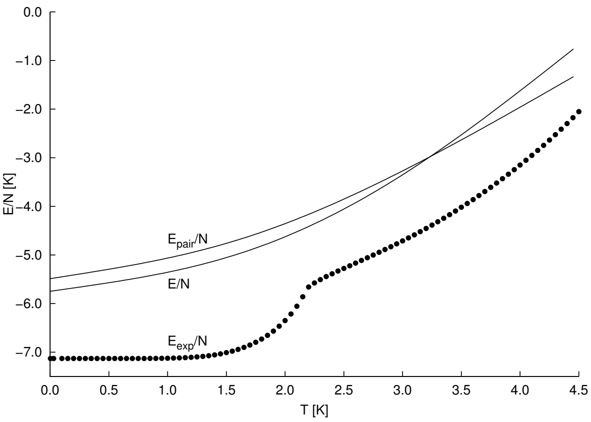

Рис. 6. Температурна залежність повної внутрішньої енергії рідкого ^{4}He. E_{pair}/N — внутрішня енерґія в наближенні парних кореляцій, E/N — внутрішня енерґія в наближенні "двох сум за хвильовим вектором".

За чисельних розрахунків кінетичної, потенціальної й повної внутрішньої енерґії у виразах, які відтворюють наближення парних кореляцій, ми використовували ефективну масу атома ^{4}He [54], натомість у виразах, які містять дві суми за хвильовим вектором, стоїть "гола" маса. Обґрунтування такого підходу наведено в роботі [53].

IX. ВИСНОВОК

У цій праці знайдено вирази для кінетичної, потенціальної та повної внутрішньої енерґій у наближенні "двох сум за хвильовим вектором" із урахуванням прямих три- і чотиричастинкових кореляцій у широкотемпературній ділянці. У границі низьких температур для внутрішньої енерґії ми отримали вже відоме значення [4]. Ці ж слова будуть актуальними і стосовно до границі високих температур. Отримані вирази є доволі громіздкими. Для їх аналізу застосовано чисельні методи і в результаті здобуто графічне зображення температурної залежності кінетичної, потенціальної й повної внутрішньої енерґії рідкого ^{4}He. Отримані результати в наближенні "двох сум за хвильовим вектором" краще узгоджуються з експериментальними даними порівняно з наближенням парних кореляцій.

ДОДАТОК 1

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{C}_2(\mathbf{q_1}) = 2C_2(\mathbf{q_1}) + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q_2}\neq 0}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{q_1^2+q_2^2}{\alpha_{q_2}\,\mathrm{sh}^2\,[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[\beta E_2]}\left\{\frac{\beta}{2}\,\mathrm{ch}[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{ch}[\beta E_{q_2}]\right.\\
&\left.-\ \frac{\mathrm{ch}[\beta E_1]\,\mathrm{sh}[\beta E_2]}{2E_2} - \frac{\mathrm{sh}[\beta E_1]\,\mathrm{ch}[\beta E_2]}{2E_1} + \frac{\mathrm{sh}[\beta(E_1+E_2)]}{4(E_1+E_2)} + \frac{\mathrm{sh}[\beta(E_1-E_2)]}{4(E_1-E_2)}\right\}\\
&-\frac{1}{8}\sum_{\substack{\mathbf{q_2}\neq\mathbf{0}\\ \mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}=\mathbf{0}}}\sum_{\mathbf{q_3}\neq\mathbf{0}}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2\frac{Q(\tilde\alpha_{q_1},\tilde\alpha_{q_2},\alpha_{q_3})}{\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\tilde{E}\,\mathrm{sh}^2\,[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}\,[\beta E_{q_2}]\,\mathrm{sh}\,[\beta E_{q_3}]}\\
&\times\left\{\frac{\beta}{4}\,\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\beta(\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})\right]Q(\tilde\alpha_{q_1},\tilde\alpha_{q_2},\alpha_{q_3}) - \frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}\right]}{2\tilde{E}}\right.\\
&\times\left(\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}\right] + \mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(-\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})\right]\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_1}\right]\right)Q(\tilde\alpha_{q_1},\tilde\alpha_{q_2},\alpha_{q_3})\\
&+\left[-\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_2}\right]}{2\tilde{E}_{q_2}}\left(\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2}+2E_{q_3})\right] + \mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_2}\right]\right) + \frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+E_{q_3})\right]}{2(\tilde{E}_{q_1}+E_{q_3})}\right.\\
&\left.\times\left(\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}-\tilde{E}_{q_1})\right] + \mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+2\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})\right]\right)\right]Q(\tilde\alpha_{q_1},-\tilde\alpha_{q_2},\alpha_{q_3})\\
&+\left[-\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_1}\right]}{2\tilde{E}_{q_1}}\left(-\,\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_1}\right] + \mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+2\tilde{E}_{q_2}+2E_{q_3})\right]\right)\right.\\
&\left.+\ \frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})\right]}{2(\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})}\,\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})\right]\right]Q(-\tilde\alpha_{q_1},\tilde\alpha_{q_2},\alpha_{q_3})\\
&+\left[-\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]}{2E_{q_3}}\left(\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(2\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})\right] + \mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]\right) + \frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2})\right]}{2(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2})}\right.\\
&\left.\left.\times\left(\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2}-\tilde{E}_{q_1})\right] + \mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2}+2E_{q_3})\right]\right)\right]Q(-\tilde\alpha_{q_1},-\tilde\alpha_{q_2},\alpha_{q_3})\right\}.
\end{aligned}
$$

$$\widetilde{C}_3(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2},\mathbf{q_3}) = -\frac{1}{4}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{(\mathbf{q_1}\mathbf{q_2})}{\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_3}]}\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}(\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\pm_1\pm_2 1)$$
$$\times\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\left(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2}\right)\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\left(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3}\right)\right]}{\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3}}.$$

$$\widetilde{C}_4(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2}) = C_4(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2}) - \frac{1}{64}\sum_{\mathbf{q_1}\neq 0}\sum_{\mathbf{q_2}\neq 0}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{(q_1^2+q_2^2)}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_1\right]\mathrm{sh}^2\left[\beta E_2\right]}\left\{2\beta\,\mathrm{ch}\left[\beta E_{q_2}\right] + \frac{2\,\mathrm{sh}[\beta E_2]}{E_2}\right.$$
$$\left. - \frac{2\,\mathrm{sh}[\beta E_1]\,\mathrm{ch}[\beta E_2]}{E_1} + \frac{\mathrm{sh}[\beta(E_1+E_2)]}{(E_1+E_2)} + \frac{\mathrm{sh}[\beta(E_1-E_2)]}{(E_1-E_2)}\right\} - \frac{1}{64}\sum_{\substack{\mathbf{q_3}\neq\mathbf{0}\\ \mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}=\mathbf{0}}}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2$$
$$\times\frac{Q(\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})}{\alpha_{q_3}\tilde{E}\,\mathrm{sh}^2\left[\beta E_1\right]\mathrm{sh}^2\left[\beta E_2\right]\mathrm{sh}\left[\beta E_3\right]}\left\{\left(\left(\frac{\beta}{2}\,\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\beta E_{q_3}\right] - \frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}\right]}{2\tilde{E}}\right.\right.\right.$$
$$\left.\times\left(\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2}-E_{q_3})\right] + \mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}\right]\right)\right)Q(\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})$$
$$+\left[\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_2}\right]}{\tilde{E}_{q_2}}\left(\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_2}\right] + \mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2}+2E_{q_3})\right]\right) - \frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+E_{q_3})\right]}{(\tilde{E}_{q_1}+E_{q_3})}\right.$$
$$\left.\times\left(\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+E_{q_3})\right] + \mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}-E_{q_3})\right]\right)\right]Q(\tilde{\alpha}_{q_1},-\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})$$
$$+\left[\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_1}\right]}{\tilde{E}_{q_1}}\left(\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_1}+2E_{q_3}\right] + \mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_1}\right]\right) - \frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})\right]}{(\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})}\right.$$
$$\left.\times\,\mathrm{sh}\left[\beta\tilde{E}_{q_2}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2}-E_{q_3})\right]\right]Q(-\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3}) + \left[\frac{\mathrm{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]}{E_{q_3}}\mathrm{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_2}\right] - \frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2})\right]}{(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2})}\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2})\right] + \mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_1}+2E_{q_3})\right]\right)\right]Q(\tilde{\alpha}_{q_1},-\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})\right\}.$$

У написаних вище виразах уведено такі позначення:

$$\tilde{E}_{q_1} = \pm_1 E_{q_1};\quad \tilde{E}_{q_2} = \pm_2 E_{q_1};\quad \tilde{\alpha}_{q_1} = \pm_1\alpha_{q_1};\quad \tilde{\alpha}_{q_2} = \pm_1\alpha_{q_2};\quad \tilde{E} = \pm_1 E_{q_1}\pm_2 E_{q_2} + E_{q_3};$$

$$Q(\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3}) = (\pm_1\pm_2\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}+1)(\mathbf{q_1}\mathbf{q_2}) + (\pm_1\alpha_{q_1}\alpha_{q_3}+1)(\mathbf{q_1}\mathbf{q_3}) + (\pm_2\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}+1)(\mathbf{q_2}\mathbf{q_3}).$$

ДОДАТОК 2

$$f_1 = (q_1^2+q_2^2+q_3^2)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_1}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_2}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_3}}\right).$$

$$f_1' = \frac{1}{2}\left(q_1^2+q_2^2+q_3^2\right)\sum_{1\le i<j\le 3}\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}^3}\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_j}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_k}}\right).$$

$$f_1'' = \frac{1}{4^2}\left(q_1^2+q_2^2+q_3^2\right)\sum_{1\le i<j\le 3}\left\{-3\frac{(\alpha_{q_i}^2-1)^2}{\alpha_{q_i}^5}\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_j}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_k}}\right) + 2\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}^3}\frac{\alpha_{q_j}^2-1}{\alpha_{q_j}^3}\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_k}}\right)\right\}.$$

$$f_2 = \sum_{1\le i<j\le 3} (\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)(\alpha_{q_i}-1)(\alpha_{q_j}-1).$$

$$f_2' = \frac{1}{2N}\sum_{1\le i<j\le 3} (\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)\left\{(\alpha_{q_i}-1)\frac{\alpha_{q_j}^2-1}{\alpha_{q_j}} + (\alpha_{q_j}-1)\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}}\right\}.$$

$$f_2'' = \frac{1}{4N^2}\sum_{1\le i<j\le 3} (\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)\left\{2\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}}\frac{\alpha_{q_j}^2-1}{\alpha_{q_j}} - (\alpha_{q_i}-1)\frac{(\alpha_{q_j}^2-1)^2}{\alpha_{q_j}^3} - (\alpha_{q_j}-1)\frac{(\alpha_{q_i}^2-1)^2}{\alpha_{q_i}^3}\right\}.$$

$$f_3 = \alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\sum_{j=1}^{3} q_j^2\alpha_{q_j}.$$

$$f_3' = \frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{3} q_j^2\left\{2\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\frac{\alpha_{q_j}^2-1}{\alpha_{q_j}} + \alpha_{q_j}^2\alpha_{q_k}\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}} + \alpha_{q_j}^2\alpha_{q_i}\frac{\alpha_{q_k}^2-1}{\alpha_{q_k}}\right\}.$$

$$f_3'' = \frac{1}{4N^2}\sum_{j=1}^{3} q_j^2\left\{-\alpha_{q_j}^2\alpha_{q_k}\frac{(\alpha_{q_i}^2-1)^2}{\alpha_{q_i}^3} + \alpha_{q_j}^2\alpha_{q_i}\frac{(\alpha_{q_k}^2-1)^2}{\alpha_{q_k}^3}\right.$$
$$\left. + 4\alpha_{q_i}\alpha_{q_j}\frac{\alpha_{q_j}^2-1}{\alpha_{q_j}}\frac{\alpha_{q_k}^2-1}{\alpha_{q_k}} + 4\alpha_{q_j}\alpha_{q_k}\frac{\alpha_{q_j}^2-1}{\alpha_{q_j}}\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}} + 2\alpha_{q_j}^2\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}}\frac{\alpha_{q_k}^2-1}{\alpha_{q_k}}\right\}.$$

$$f_4 = \sum_{1\le i<j\le 3} (\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_i}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_j}}\right).$$

$$f_4' = \frac{1}{2N}\sum_{1\le i<j\le 3} (\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)\left\{\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_i}}\right)\frac{\alpha_{q_j}^2-1}{\alpha_{q_j}^3} + \left(1-\frac{1}{\alpha_{q_j}}\right)\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}^3}\right\}.$$

$$f_4'' = \frac{1}{4N^2}\sum_{1\le i<j\le 3} (\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)\left\{2\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}^3}\frac{\alpha_{q_j}^2-1}{\alpha_{q_j}^3} - 3\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_i}}\right)\frac{(\alpha_{q_j}^2-1)^2}{\alpha_{q_j}^5} - 3\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_j}}\right)\frac{(\alpha_{q_i}^2-1)^2}{\alpha_{q_i}^5}\right\}.$$

---

[1] N. N. Bogoliubov, J. Phys. USSR **9**, 23 (1947).

[2] Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарєв, Журн. эксп. теор. физ. **28**,129 (1955).

[3] K. A. Brueckner, K. Sawada, Phys. Rev. **106**,1117 (1957).

[4] И. А. Вакарчук, И. Р. Юхновський, Теор. мат. физ. **40**,100 (1979); И. А. Вакарчук, О. Л. Гонопольський, И. Р. Юхновський, Теор. мат. физ. **41**, 77 (1979).

[5] И. А. Вакарчук, Теор. мат. физ. **65**, 285 (1985); **80**, 439 (1989); **82**, 438 (1990).

[6] И. А. Вакарчук. П. А. Глушак, Теор. мат. физ. **75**, 101 (1988); І. О. Вакарчук, П. А. Глушак, Укр. фіз. журн. **41**, 569 (1996).

[7] П. А. Глушак, дис. канд. физ.-мат. наук (Львов, 1992).

[8] I. O. Vakarchuk, V. V. Babin, A. A. Rovenchak, J. Phys. Stud. **4**, 16 (2000).

[9] I. O. Vakarchuk, A. A. Rovenchak, J. Phys. Stud. **5**, 126 (2001); Cond. Matt. Phys. **4**, 431 (2001).

[10] І. О. Вакарчук, Р. О. Притула, А. А. Ровенчак, Журн. фіз. досл. **11**, 259 (2007).

[11] W. L. McMillan, Phys. Rev. A **138**, 442 (1965).

[12] D. Schiff, L. Verlet, Phys. Rev. **160**, 208 (1967).

[13] V. F. Sears, Phys. Rev. B **28**, 5109 (1983).

[14] V. F. Sears, R. D. McCarty, D. G. Friend, Natl. Inst. Stand. Technol. Tech. Note 1334 (revised) (1998).

[15] *Физика простых жидкостей*, под редакцией Г. Темперли, Дж. Роулисона, Дж. Рашбрука (Мир, Москва, 1971).

[16] К. Крокстон, *Физика жидкого состояния* (Мир, Москва, 1978).

[17] H. J. Maris, D. O. Edwards, J. Low. Temp. Phys. **129**, 1 (2002).

[18] T. Lindenau, M. L. Ristig, J. W. Clark, K. A. Gernoth, J. Low. Temp. Phys. **129**, 143 (2002).
[19] D. A. Sergatskov, A. V. Babkin, S. T. P. Boyd, R. A. M. Lee, R. V. Duncan, J. Low. Temp. Phys. **134**, 517 (2004).
[20] S. M. Mosameh, A. S. Sandouqa, H. B. Ghassib, B. R. Joudeh, J. Low. Temp. Phys. **175**, 523 (2014).
[21] B. Krishnamachari, G. V. Chester, Phys. Rev. B **61**, 9677 (2000).
[22] F. Caupin, T. Minoguchi, J. Low. Temp. Phys. **134**, 181 (2004).
[23] E. Kim, M. H. W. Chan, Science **305**, 1941 (2004); Phys. Rev. Lett. **97**, 115302, (2006).
[24] R. B. Hallock, M. W. Ray, Y. Vekhov, J. Low. Temp. Phys. **169**, 264 (2012).
[25] M. H. W. Chan, R. B. Hallock, L. Reatto, J. Low. Temp. Phys. **172**, 317 (2013).
[26] C. E. Campbell, B. E. Clements, E. Krotscheck, M. Saarela, Phys. Rev. B **55** 3769 (1997)
[27] M. Diaz-Avila, M. O. Kimball, F. M. Gasparini, J. Low. Temp. Phys. **134**, 613 (2004).
[28] R. H. Anderson, D. Z. Li, M. D. Miller, J. Low. Temp. Phys. **169**, 291 (2012).
[29] R. Folk, G. Moser, J. Low. Temp. Phys. **150**, 689 (2008).
[30] G. Chaudhry, J. G. Brisson, J. Low. Temp. Phys. **155**, 235 (2009); **158**, 806 (2010).
[31] J. A. Lipa, M. Coleman, D. A. Stricker, J. Low. Temp. Phys. **124**, 443 (2001).
[32] A. Shams, J. L. DuBois, H. R. Glyde, J. Low. Temp. Phys. **145**, 357 (2006).
[33] M. C. Gordillo, J. Boronat, J. Low. Temp. Phys. **171**, 606 (2013).
[34] J. Boronat, M. C. Gordillo, J. Casulleras, J. Low. Temp. Phys. **126**, 199 (2002).
[35] I. Bešlić, L. Vranješ Markić, S. Kilić, J. Low. Temp. Phys. **143**, 257 (2006).
[36] S. A. Vitiello, J. Low. Temp. Phys. **162**, 154 (2011).
[37] D. M. Ceperley, Rev. Mod. Phys. **67**, 279 (1995).
[38] J. Boronat, K. Sakkos, E. Sola, J. Casulleras, J. Low. Temp. Phys. **148**, 845 (2007).
[39] R. Rota, J. Boronat, J. Low. Temp. Phys. **162**, 146 (2011).
[40] M. H. Kalos, Phys. Rev. **128**, 1791 (1962).
[41] S. Moroni, M. Boninsegni, J. Low. Temp. Phys. **136**, 129 (2004).
[42] J. C. Slater, J. G. Kirkwood, Phys. Rev. **37**, 682 (1931).
[43] K. Miyazaki, I. M. de Schepper, Phys. Rev. E **63**, 060201(R) (2001).
[44] J. Egger, E. Krotscheck, R. E. Zillich, J. Low. Temp. Phys. **165**, 275 (2011).
[45] R. A. Aziz, M. J. Slaman, J. Chem.Phys. **94**, 8047 (1991).
[46] R. A. Aziz, M. J. Slaman, A. Koide, A. R. Allnatt, W. J. Meath, Mol. Phys. **77**, 321 (1992).
[47] J. Boronat, J. Casulleras, Phys. Rev. B **49**, 8920 (1994).
[48] B. M. Axilrod, E. Teller, J. Chem. Phys. **11**, 299 (1943).
[49] C. A. Parish, C. E. Dykstra, J. Chem. Phys. **9**, 7618 (1994).
[50] А. А. Ровенчак, дис. канд. фіз.-мат. наук (Львів, 2003).
[51] І. О. Вакарчук, О. І. Григорчак, Журн. фіз. досл. **13**, 3004 (2009).
[52] І. О. Вакарчук, О. І. Григорчак, Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз. **46**, 3 (2011).
[53] І. О. Вакарчук, О. І. Григорчак, preprint arXiv: 1506.03707 (2015).
[54] І. О. Вакарчук, О. І. Григорчак, В. С. Пастухов, Р. О. Притула, preprint arXiv:1506.03317 (2015).
[55] I. O. Vakarchuk, J. Phys. Stud. **8**, 223 (2004).
[56] І. Вакарчук, *Вступ до проблеми багатьох тіл* (Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 1999).
[57] R. J. Donnelly, C. F. Barenghi, J. Phys. Chem. Ref. Data, **27**, 6 (1998).

INTERNAL ENERGY OF THE MANY-BOSON SYSTEM WITH THREE- AND FOUR-PARTICLE DIRECT CORRELATIONS TAKEN INTO ACCOUNT

I. O. Vakarchuk, O. I. Hryhorchak
Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv,
12, Drahomanov St., Lviv, UA–79005, Ukraine

In this paper we calculate the kinetic, potential and full internal energy with three- and four-particle direct correlations taken into account at the wide temperature region on the base of the density matrix of the interacting Bose-particles [I. O. Vakarchuk, O. I. Hryhorchak, J. Phys. Stud. **13**, 3004 (2009)]. All the final formulae are written via the Fourier coefficient of the pair interparticle interaction energy. At the same time we are not interested in the explicit form of the interatomic potential because for our numeric calculations we express its Fourier coefficient from the experimentally measured structure factor and first sound velocity extrapolated to $T = 0$. The found values for the kinetic, potential and full internal energy demonstrate that the accounting of three- and four-particle direct correlations gives a better matching of the theoretical results with the experimental data. In the low temperature limit the obtained expression for the full internal energy is equal to the well-known expression for the ground state energy in the approximation of "two sums over the wave vector". For the high temperatures in the quasi-classical limit the found expression for the full internal energy reproduces the ideal gas energy expression.

The results of this work can be applied for the numeric calculation of the heat capacity of the liquid ^{4}He in order to check the theoretical and experimental results quantitatively, especially in the λ-transition region.