ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 19, № 3 (2015) 3002(8 с.)

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 19, No. 3 (2015) 3002(8 p.)

КВАЗІТОЧНО РОЗВ'ЯЗУВАНІ ПОТЕНЦІАЛИ З ДВОМА ДОВІЛЬНИМИ ВЛАСНИМИ СТАНАМИ ДЛЯ СИСТЕМ ІЗ КООРДИНАТНО ЗАЛЕЖНОЮ МАСОЮ

О. Возняк, В. М. Ткачук
Львівський національний університет імені Івана Франка, кафедра теоретичної фізики, вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005, Україна
(Отримано 25 березня 2015 р.)

Метод суперсиметричної квантової механіки застосовано до знаходження квазіточно розв'язуваних (КТР) потенціалів для систем із масою, що є функцією від координат. Досліджено умови, за яких ґенеруюча функція, маючи синґулярну поведінку, приводить до несинґулярної потенціальної енерґії. Розглянуто приклади КТР-потенціалів із двома станами, які породжуються як синґулярними так і несинґулярними ґенеруючими функціями. Для них знайдено точні хвильові функції двох довільних рівнів.

Ключові слова: квазіточно розв'язувані потенціали, координатно залежна ефективна маса, супесиметрична квантова механіка.

PACS number(s): 03.65.Ge, 11.30.Pb

I. ВСТУП

Залежність маси від координат виявляється в багатьох квантовомеханічних задачах, і зокрема в ядерній фізиці [1], теорії квантових рідин [2] та металічних кластерів [3], у фізиці неоднорідно леґованих напівпровідників, різних гетеросистем [4, 5].

З іншого боку, завжди був інтерес до знаходження точних розв'язків квантовомеханічних задач, зважаючи на їх важливість як із загальнотеоретичних міркувань, так і з погляду реалізації ефективних алґоритмів пошуку наближених розв'язків. Тому проблемі одержання точних розв'язків для систем із масою, що залежить від координат, було присвячено низку робіт [6–15]. Звертаємо увагу, зокрема і на підручник з квантової механіки [16], у якому розглянуто цю проблему. До знаходження точних розв'язків застосовано також і метод суперсиметричної квантової механіки [12, 14]. Однак кількість точно розв'язуваних задач обмежена. Тому цікавою й важливою є задача пошуку квазіточно розв'язуваних (КТР) потенціалів, для яких можна точно знайти кілька енерґетичних рівнів і відповідних хвильових функцій [17–23]. Серед них квазіточно розв'язувані потенціали з масою, залежною від координат [20,23–25]. Зазначимо, що хоча дослідження КТР-потенціалів проводять досить давно, досі ця тематика все ще актуальна (див., наприклад, праці [21, 22] та посилання в них). У роботі [17] методику суперсиметричної квантової механіки було розширено для ґенерування КТР-потенціалів. У нашій попередній роботі ми застосували цей підхід до систем із координатнозалежною масою [26]. У цій роботі ми застосовуємо її до знаходження точних розв'язків для двох станів квантово-механічних систем із координатнозалежною масою для яких суперпотенціал чи ґенеруюча функція є синґулярні. У цьому випадку вдається одержати точні розв'язки для двох довільних станів.

II. ГАМІЛЬТОНІАН ЧАСТИНКИ З МАСОЮ, ЗАЛЕЖНОЮ ВІД КООРДИНАТ

При вивченні систем із координатно залежною масою виникають важливі загальнофізичні проблеми, пов'язані з упорядкуванням некомутативних операторів координати та імпульсу в операторі кінетичної енерґії [27, 28]. Запропоновано декілька схем упорядкування операторів. Ми базуватимемося на двопараметричній формі оператора кінетичної енерґії Росса [29], гамільтоніан якого має вигляд

$$H = -\frac{\hbar^2}{4}\Big[m^{\delta'}(x)\nabla m^{\varkappa'}(x)\nabla m^{\lambda'}(x) + m^{\lambda'}(x)\nabla m^{\varkappa'}(x)\nabla m^{\delta'}(x)\Big] + V(x), \tag{1}$$

де $V(x)$ — потенціал, δ', $\varkappa'$, λ' — параметри, що задовольняють умову $\delta' + \varkappa' + \lambda' = -1$.

Подавши $m(x)$ як

$$m(x) = m_0 M(x), \qquad M(x) = \frac{1}{f^2(x)}, \tag{2}$$

гамільтоніан для одновимірного випадку можна записати так [14]:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\sqrt{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} + V_{\text{eff}}(x), \tag{3}$$

де $f(x) > 0$, $V_{\text{eff}}(x)$ — деякий ефективний потенціал, вигляд якого залежить від способу впорядкування операторів у кінетичній енерґії гамільтоніана. Перехід до іншого способу впорядкування приводить до зміни $V_{\text{eff}}(x)$, тому говорити про спосіб упорядкування має сенс лише разом із $V_{\text{eff}}(x)$.

Уводимо деформований оператор імпульсу, визначений як

$$P = \sqrt{f(x)}p\sqrt{f(x)}, \tag{4}$$

гамільтоніан зводимо до

$$H = \frac{P^2}{2m_0} + V_{\text{eff}}(x). \tag{5}$$

При цьому оператор P повинен задовольняти вимогу ермітовості, забезпечення якої вимагає виконання умови [14]

$$\lim_{x\to\pm\infty} |\psi(x)|^2 f(x) = 0. \tag{6}$$

III. СУПЕРСИМЕТРИЧНА КВАНТОВА МЕХАНІКА ДЛЯ ЧАСТИНКИ З МАСОЮ, ЗАЛЕЖНОЮ ВІД КООРДИНАТ

Для дослідження енерґетичного спектра систем запишімо гамільтоніан (5) у факторизованому вигляді

$$H = B^+B^- + \epsilon_0, \tag{7}$$

де ϵ_0 — енерґія основного стану. Без утрати загальності надалі покладемо $\epsilon_0 = 0$, вибравши відповідно початок відліку енерґії системи. Пов'яжемо із гамільтоніаном системи H один з SUSY-партнерів $H_\pm$, а саме, $H_- = B^+B^-$. Гамільтоніани суперсиметричних партнерів мають вигляд

$$H_\pm = B^\mp B^\pm = \frac{1}{2}\bigg(P^2 + V_\pm(x)\bigg), \tag{8}$$

де

$$B^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp iP + W(x)), \tag{9}$$

$$V_\pm = W^2(x) \pm f(x)W'(x), \tag{10}$$

$W(x)$ — суперпотенціал, $W'(x) = \frac{dW(x)}{dx}$ — похідна від суперпотенціалу за координатою, сталу Планка тут і надалі покладаємо $\hbar = 1$.

Оскільки $H = H_-$, то

$$V_{\text{eff}}(x) = V_-(x) = W^2(x) - f(x)W'(x). \tag{11}$$

Рівняння для енерґетичного спектра суперсиметричних партнерів запишемо як

$$H_\pm\psi_n^\pm(x) = E_n^\pm\psi_n^\pm(x),\ n = 0, 1, 2\ \ldots\ . \tag{12}$$

Спектри суперсиметричних партнерів H_+ і H_- збігаються крім, можливо, лише стану з нульовою енерґією. Якщо стан із нульовою енерґією належить операторові H_-, то хвильова функція цього стану внаслідок того, що гамільтоніан H_- представлено у факторизованому вигляді, задовольнятиме рівняння $B^-\psi_0^-(x) = 0$ та матиме вигляд

$$\psi_0^-(x) = \frac{C_0^-}{\sqrt{f(x)}}\exp\bigg(-\int\frac{W(x)}{f(x)}\,dx\bigg), \tag{13}$$

де C_0^- — константа нормування. Необхідною умовою нормування хвильової функції є

$$\operatorname{sign}(W(\pm\infty)) = \pm 1. \tag{14}$$

IV. КТР-ПОТЕНЦІАЛИ З ОДНИМ РІВНЕМ

Метод суперсиметричної квантової механіки ми застосуємо для ґенерування квазіточно розв'язуваних (КТР) потенціалів, у полі яких рухаються частинки, маса яких залежить від координат. Як видно із (13), вибираючи різні суперпотенціали $W(x)$ та функції $f(x)$, можна знайти розв'язок для одного стану системи. У цій статті ми розглянемо несинґулярні потенціали, які в найпростішому випадку можна одержати використовуючи несинґулярний суперпотенціал $W(x)$. Несинґулярний потенціал можна також одержати, використовуючи синґулярний суперпотенціал. Зокрема, нехай $W(x)$ має прості полюси в точках x_k^p із такою поведінкою в їх околі:

$$W(x) = \frac{A_{-1}}{x - x_k^p} + A_0 + A_1(x - x_k^p) + O((x - x_k^p)^2). \tag{15}$$

Розклавши в околі точки x_k^p функцію $f(x)$ у ряд з точністю до квадратичних внесків, одержимо потенціал $V_-(x)$

$$V_-(x) = \frac{A_{-1}^2 + f(x_k^p)A_{-1}}{(x - x_k^p)^2} + \frac{2A_0A_{-1} + f'(x_k^p)A_{-1}}{x - x_k^p} + A_0^2 + 2A_1A_{-1} - f(x_k^p)A_1 + \frac{1}{2}A_{-1}f''(x_k^p) + O(x - x_k^p). \tag{16}$$

Потенціал $V_-(x)$ буде несинґулярним у двох випадках:
а) якщо

$$.A_{-1} = 0 \tag{17}$$

Тут несинґулярним буде як потенціал $V_-(x)$, так і суперпотенціал $W(x)$

$$V_-(x) = A_0^2 - A_1 f(x_k^p) + 2A_1A_{-1} + \frac{1}{2}A_{-1}f''(x_k^p) + O(x - x_k^p),$$
$$W(x) = A_0 + A_1(x - x_k^p) + O((x - x_k^p)^2); \tag{18}$$

b) якщо ж

$$A_{-1} = -f(x_k^p),$$
$$A_0 = -\frac{1}{2}f'(x_k^p), \tag{19}$$

то $V_-(x)$ набуває скінченного в точках синґулярності $W(x)$ значення, а саме:

$$V_-(x) = \frac{1}{4}\Big(f'(x_k^p)\Big)^2 - 3A_1 f(x_k^p) + \frac{1}{2}f(x_k^p)f''(x_k^p) + O(x - x_k^p), \tag{20}$$

$$W(x) = -\frac{f(x_k^p)}{(x - x_k^p)} - \frac{1}{2}f'(x_k^p) + A_1(x - x_k^p) + O((x - x_k^p)^2). \tag{21}$$

Зазначимо, що потенціальна енерґія суперсиметричного партнера у цьому випадку буде синґулярною.

Підставляючи знайдені суперпотенціали у (13), знайдемо, що у випадку (a) хвильова функція є аналітичною функцією й в околі точки x_k^p матиме такий вигляд:

$$\psi_0(x) \sim (x - x_k^p). \tag{22}$$

У випадку (b) при $A_{-1} = -f(x_k^p)$ і $A_0 = \frac{1}{2}f'(x_k^p)$ поведінка хвильової функції в околі особливих точок буде такою:

$$\psi_0(x) \sim |x - x_k^p|. \tag{23}$$

Щоб одержати хвильову функцію, похідна від якої буде неперервною функцією, врахуємо той факт, що якщо на деякому проміжку хвильова функція $\psi_0(x)$ задовольняє рівняння Шрединґера, то і хвильова функція $-\psi_0(x)$ на цьому ж проміжку задовольняє те саме рівняння. Завдяки цьому можна змінити знак функції в деяких областях, розділених нулями функції, так, щоб і сама хвильова функція, і її похідна були неперервними функціями. Для цього потрібно зробити заміну $|x - x_k^p| \to (x - x_k^p)$. Тоді поведінка хвильової функції буде такою:

$$\psi_0(x) \sim (x - x_k^p). \tag{24}$$

Тут хвильова функція з нульовою енерґією має стільки ж вузлів, скільки полюсів має суперпотенціал (n), і вона відповідає n — ному збудженому станові. Енерґія ж основного стану в цьому разі буде також від'ємною.

Приклад 1.

Спочатку розгляньмо несинґулярний суперпотнціал $W(x)$, який виберімо таким:

$$W(x) = A\tanh(x). \tag{25}$$

Використавши функцію, що описує залежність маси від координат у такому вигляді:

$$f(x) = \frac{\beta}{\cosh(x)} \tag{26}$$

приходимо до такого несинґулярного потенціалу

$$V_-(x) = A^2\tanh^2(x) - \frac{A\beta}{\cosh^3(x)}. \tag{27}$$

Точна хвильова функція основного стану для такого потенціалу є такою:

$$\psi(x) \sim \sqrt{\frac{\cosh(x)}{\beta}}\exp\left(-A\beta\cosh(x)\right) \tag{28}$$

й описує локалізовані стани.

Для цього ж суперпотенціалу та функції $f(x)$, рівної

$$f(x) = \beta\cosh^2(x), \tag{29}$$

несинґулярний потенціал має вигляд

$$V_-(x) = A^2\tanh^2(x) - A\beta \tag{30}$$

і приводить до точної хвильової функції основного стану

$$\psi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\beta}\cosh(x)}\exp\left(\frac{-A}{2\beta\cosh^2(x)}\right), \tag{31}$$

що також описує локалізовані стани. Проте вона не задовольняє умову (6) і не належить до фізичних розв'язків.

Приклад 2.

Тепер розгляньмо випадок, коли $W(x)$ має особливості. Зокрема виберімо суперпотенціал

$$W(x) = \frac{x^2 - 1}{x}, \tag{32}$$

який має особливість у точці $x = 0$, а функцію, що описує залежність маси від координат, такою:

$$f(x) = x^2 + 1. \tag{33}$$

Несинґулярний потенціал, що відповідає цьому випадкові, є сталим і дорівнює

$$V_-(x) = -4. \tag{34}$$

Хвильова функція стану з нульовою енерґією, яка відповідає такому потенціалу, дорівнює

$$\psi_0(x) \sim \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \tag{35}$$

й описує зв'язані стани, існування яких цілком пов'язане із залежністю маси системи від координат. Проте вона, як і в попередньому прикладі, не задовольняє умову (6) і не належить до фізичних розв'язків.

V. КТР-ПОТЕНЦІАЛИ ІЗ ДВОМА РІВНЯМИ

Для одержання ще одного власного стану оператора H_- врахуємо, що власні значення та власні функції гамільтоніанів H_+ і H_- пов'язані суперсиметричними перетвореннями

$$E^-_{n+1} = E^+_n, \; E^-_0 = 0, \tag{36}$$

$$\psi^-_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{E^+_n}} B^+ \psi^+_n(x), \tag{37}$$

$$\psi^+_n(x) = \frac{1}{\sqrt{E^-_{n+1}}} B^- \psi^-_{n+1}(x). \tag{38}$$

Розглянувши гамільтоніан H_+, який є суперсиметричним партнером оператора H_-, та знайшовши його основний стан, ми тим самим одержимо перший збуджений стан оператора H_-. Використовуючи суперсиметричні перетворення (36), запишемо H_+ у такому вигляді:

$$H_+ = H^1_- + \epsilon = B^+_1 B^-_1 + \epsilon, \; \epsilon > 0, \tag{39}$$

що приводить до співвідношення між потенціалами суперсиметричних партнерів

$$V_+(x) = V^{(1)}_-(x) + \epsilon, \tag{40}$$

де $B^\pm_1$ та $V^{(1)}_-(x)$ задані виразами (9) та (10) з новим суперпотенціалом $W_1(x)$, а ϵ — енерґія основного стану гамільтоніана H_+, тоді як енерґія основного стану H_- — нульова.

Суперпотенціали $W(x)$ та $W_1(x)$ задовольняють рівняння

$$W^2_0(x) + f(x)\, W'_0(x) = W^2_1(x) - f(x)\, W'_1(x) + 2\varepsilon. \tag{41}$$

Хвильова функція оператора H_+ з енерґією $E = \epsilon$ задовольняє рівняння $B^-_1(x)\psi^+_1(x) = 0$, розв'язком якого є

$$\psi^+_1(x) = \frac{C^+_1}{\sqrt{f(x)}} \exp\left(- \int \frac{W_1(x)}{f(x)} dx \right). \tag{42}$$

Застосовуючи суперсиметричні перетворення (37) до $\psi^+_1(x)$, одержимо хвильову функцію збудженого стану з енерґією $E = \epsilon$ гамільтоніана H_-

$$\psi^-_1(x) = \frac{C^-_1}{\sqrt{f(x)}}\, W_+(x) \exp\left(- \int \frac{W_1(x)}{f(x)} dx \right), \tag{43}$$

де $W_+(x) = W_1(x) + W(x)$.

Із рівняння (41) не вдається знайти ні $W(x)$, ані $W_1(x)$, але можна знайти таку пару величин $W(x)$ і $W_1(x)$, які задовольнятимуть це рівняння. Для цього, крім $W_+(x)$, уведемо ще одну величину $W_-(x)$. Тобто

$$\begin{aligned} W_+(x) &= W_1(x) + W(x), \\ W_-(x) &= W_1(x) - W(x), \end{aligned} \tag{44}$$

за допомогою яких рівняння (41) записуємо як

$$f(x)\, W'_+(x) = W_+(x)\, W_-(x) + 2\epsilon. \tag{45}$$

Це нове рівняння можна розв'язати як щодо $W_-(x)$ для заданого $W_+(x)$, так і навпаки. Ми виразимо розв'язок через $W_+(x)$, яка буде ґенеруючою функцією для КТР-потенціалів. Тоді

$$W_-(x) = \frac{f(x)\, W'_+(x) - 2\epsilon}{W_+(x)}, \tag{46}$$

а

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{1}{2}\left(W_+(x) - \frac{f(x)\, W'_+(x) - 2\epsilon}{W_+(x)} \right), \\ W_1(x) &= \frac{1}{2}\left(W_+(x) + \frac{f(x)\, W'_+(x) - 2\epsilon}{W_+(x)} \right). \end{aligned} \tag{47}$$

Тут, як і раніше, розглядатимемо несинґулярні потенціали $V_-(x)$. Вимога несинґулярності потенціалу накладає обмеження на ґенеруючу функцію $W_+(x)$.

Несинґулярні ґенеруючі функції

Розгляньмо випадок, коли $W_+(x)$ має прості нулі в точках x^0_k, тобто в околі нулів поведінка $W_+(x)$ є така:

$$W_+(x) = W'_+(x_k^0)\ (x - x_k^0) + \frac{1}{2}W''_+(x_k^0)\ (x - x_k^0)^2 + O(x - x_k^0). \tag{48}$$

Нулі функції $W_+(x)$ спричиняють синґулярності суперпотенціалу $W(x)$. Розклавши в околі точок x_k^0 функцію, що описує залежність маси від координат, у ряд Тейлора з точністю до $(x - x_k^0)^2$ і підставивши ці розклади у вираз для $W_+(x)$ та обмежившись лінійними внесками одержимо

$$W(x) = -\Big(\frac{f(x_k^0)}{2} - \frac{\varepsilon}{W'_+(x_k^0)}\Big)\frac{1}{(x - x_k^0)} - \frac{W''_+(x_k^0)}{2W'_+(x_k^0)}\Big(\frac{f(x_k^0)}{2} + \frac{\varepsilon}{W'_+(x_k^0)}\Big) - \frac{f'(x_k^0)}{2} + O(x - x_k^0). \tag{49}$$

Поведінка суперпотенціалу $W_1(x)$ в околі x_k^0 подібна до $W(x)$, але має протилежний знак. Цей суперпотенціал спричиняє таку поведінку в околі точки x_k^0 потенціалу $V_-(x)$:

$$2V_-(x) = \Big(\Big(\frac{\varepsilon}{W'_-(x_k^0)}\Big)^2 - \Big(\frac{f(x_k^0)}{2}\Big)^2\Big) \times \Big(\frac{1}{(x - x_k^0)^2} - \frac{W''_+(x_k^0)}{W'_+(x_k^0)}\frac{1}{(x - x_k^0)}\Big) + O(\text{const}). \tag{50}$$

Зазначимо, що коефіцієнти при $(x - x_k^p)^{-1}$ та $(x - x_k^p)^0$ відповідають коефіцієнтам A_1 і A_0, визначеним у (17) і (19).

Неважко бачити, що при

$$f(x_k^0)W'_+(x_k^0) = \pm 2\varepsilon \tag{51}$$

потенціальна енерґія $V_-(x)$ буде несинґулярною.

Якщо $W'_+(x_k^0)$ у деяких точках має додатні значення, а в інших – від'ємні, то зручно розбити множину точок, у яких потенціал синґулярний, на дві підмножини: першу x_k^+, у яких $f(x_k^+)W'_+(x_k^+) > 0$, і другу x_k^-, у яких $f(x_k^-)W^-_+(x_k^-) < 0$. Тоді за $\varepsilon > 0$

$$f(x_k^+)\ W'_+(x_k^+) = 2\varepsilon, \tag{52}$$

а

$$f(x_k^-)\ W'_+(x_k^-) = -2\varepsilon. \tag{53}$$

Тепер при $f(x_k^+)\ W'_+(x_k^+) = 2\varepsilon$ синґулярності за x_k^+ зникають і $W(x)$ (21) та $W_1(x)$ матимуть синґулярності лише в точках x_k^-, в околі яких їх поведінка така (21):

$$W(x) = -\frac{f(x_k^-)}{x - x_k^-} - \frac{1}{2}f'(x_k^-) + O(x - x_k^-), \tag{54}$$

$$W_1(x) = \frac{f(x_k^-)}{x - x_k^-} + \frac{1}{2}f'(x_k^-) + O(x - x_k^-). \tag{55}$$

Хоча $W(x)$ має синґулярності в точках x_k^- , потенціал $V_-(x)$ є несинґулярним. Використавши знайдений суперпотенціал для одержання хвильової функції з нульовою енерґією, знайдемо, що в околі точок x_k^- вона поводиться як

$$\psi_0^-(x) \sim (x - x_k^-) \tag{56}$$

і має n^- вузлів у точках x_k^-, а отже відповідає n^--му збудженому станові.

Використавши $W_1(x)$, знайдемо хвильову функцію $\psi_\varepsilon^-(x)$. Вона має n^+ вузлів у точках x_k^+. Якщо $W_+(x)$ є неперервною функцією, що задовольняє умову (14), то $n^+ = n^- + 1$. Тому $\psi_0^-(x)$ і $\psi_\varepsilon^-(x)$ — хвильові функції n^--го і $(n^- + 1)$-го збуджених станів відповідно.

Синґулярні ґенеруючі функції

Тепер розгляньмо випадок, коли функція $W_+(x)$ має в точках x_k^p також і прості полюси, в околі яких вона поводиться як

$$W_+(x) = \frac{G_{-1}}{x - x_k^p} + G_0 + O(x - x_k^p). \tag{57}$$

Тоді в околі точок x_k^p для суперпотенціалу одержуємо

$$W(x) = \frac{1}{2}\frac{G_{-1} + f(x_k^p)}{x - x_k^p} + \frac{1}{2}\Big(G_0 - \frac{G_0}{G_{-1}}f(x_k^p) + f'(x_k^p)\Big) + O(x - x_k^p), \tag{58}$$

$$W_1(x) = \frac{1}{2}\frac{G_{-1} - f(x_k^p)}{x - x_k^p} + \frac{1}{2}\Big(G_0 + \frac{G_0}{G_{-1}}f(x_k^p) - f'(x_k^p)\Big) + O(x - x_k^p). \tag{59}$$

Розклавши в околі точок x_k^p функцію $f(x)$ з точністю до $(x - x_k^p)$, бачимо, що цей суперпотенціал приводить до потенціалу $V_-(x)$ з такою поведінкою:

$$V_-(x) = \frac{1}{4}\frac{(G_{-1} + f(x_k^p))(G_{-1} + 3f(x_k^p))}{(x - x_k^p)^2} + \frac{1}{2}\frac{G_{-1} + f(x_k^p)}{x - x_k^p}\Big(G_0 + \frac{G_0 f(x_k^p)}{G_{-1}} + 2f'(x_k^p)\Big) + O(\text{const}). \tag{60}$$

Порівнюючи суперпотенціал (59) із (15) доходимо висновку, що суперпотенціал (59) приводить до несинґулярного потенціалу у двох випадках: a) коли $G_{-1} = -f(x_k^p)$, або b) коли $G_{-1} = -3f(x_k^p)$ і $G_0 = -3f'(x_k^p)$. Вони відповідають (17) і (19).

У випадку а), коли $G_{-1} = -f(x_k^p)$ приходимо до таких суперпотенціалів:

$$W(x) = G_0 + \frac{1}{2}f'(x_k^p) + O(x - x_k^p), \tag{61}$$
$$W_1(x) = -\frac{f(x_k^p)}{x - x_k^p} - \frac{1}{2}f'(x_k^p) + O(x - x_k^p).$$

Хвильові функції $\psi_0^-(x)$ і $\psi_\epsilon^-(x)$, обчислені за цими суперпотенціалами не мають нулів у точках x_k^p, кількість яких дорівнює n^p. Але $W_+(x)$, крім $n = n^+ + n^-$ нулів у точках x_k^+ і x_k^-, має ще і n^p полюсів у точках x_k^p і, отже, є розривною функцією. Тому маємо $n^+ = n^- + n^p + 1$. Використовуючи результат, одержаний у випадку а), доходимо висновку, що хвильова функція $\psi_0^-(x)$ матиме нулі в точках x_k^- і відповідатиме (n^-)-му збудженому станові, а хвильова функція $\psi_\varepsilon^-(x)$ матиме нулі в точках x_k^+ і відповідатиме $(n^- + n^p + 1)$-му збудженому станові.

У випадку b), коли $G_{-1} = -3f(x_k^p)$ і $G_0 = -3f'(x_k^p)$, тоді

$$W(x) = -\frac{f(x_k^p)}{x - x_k^p} + f'(x_k^p) + O(x - x_k^p), \tag{62}$$
$$W_1(x) = -2\frac{f(x_k^p)}{x - x_k^p} - \frac{f'(x_k^p)}{2} + O(x - x_k^p).$$

Хвильові функції $\psi_0^-(x)$ і $\psi_\varepsilon^-(x)$, обчислені за цими суперпотенціалами, мають m^p спільних нулів у точках x_k^p. Якщо, крім полюсів, $W_+(x)$ має ще і $n = n^+ + n^-$ нулів у точках x_k^- і x_k^+ , то хвильова функція $\psi_0^-(x)$ відповідатиме $(n^- + m^p)$-му збудженому станові, а хвильова функція $\psi_\varepsilon^-(x)$ відповідатиме $(n^- + 2m^p + 1)$-му збудженому станові.

Розгляньмо приклади несинґулярних потенціалів, для яких можна знайти точні розв'язки для основного та першого збудженого станів для деяких ґенеруючих функцій та функцій, що описують залежність маси від координат.

Приклади КТР-потенціалів із двома рівнями

Приклад 3.

Розгляньмо приклади, у яких ґенеруючими функціями буде $W_+(x)$. Спочатку розгляньмо таку $W_+(x)$, яка має лише нулі. Зокрема виберімо її такою:

$$W_+(x) = A\sinh(x). \tag{63}$$

Вона має нуль у точці $x = 0$, а функцію, що описує залежність маси від координат виберемо такою

$$f(x) = \beta\cosh(x). \tag{64}$$

У цьому випадку $f(x_0) = \beta$, $\varepsilon = f(x_0)W_+'(x_0)/2 = A\beta/2$ і ми приходимо до таких суперпотенціалів:

$$W(x) = \tfrac{A-\beta}{2}\sinh(x)$$
$$W_1(x) = \tfrac{A+\beta}{2}\sinh(x), \tag{65}$$

які при $A = \beta$ переходять у

$$W(x) = 0$$
$$W_1(x) = \sinh(x). \tag{66}$$

Відповідний знайденому суперпотенціалові потенціал має вигляд

$$V_-(x) = \frac{A^2 + 3\beta^2 - 4A\beta}{4}\sinh(x) - \beta\frac{A-\beta}{2}, \tag{67}$$

який при $A = \beta = 1$ $V_-(x) = 0$ переходить у нульовий.

Хвильові функції станів із нульовою енерґією та енерґією, рівною ε, є такими:

$$\psi_0(x) \sim \cosh^{-\frac{A}{2\beta}}(x),$$
$$\psi_\varepsilon(x) \sim \sinh(x)\cosh^{-\frac{A}{2\beta}-1}(x). \tag{68}$$

Зауважимо, що при $A = \beta = 1$ хвильові функції $\psi_0(x)$ $\psi_\varepsilon(x)$ такі, що не задовольняють умову (6):

$$\psi_0(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\cosh(x)}},$$
$$\psi_\varepsilon(x) \sim \sinh(x)\cosh^{-\frac{3}{2}}(x). \tag{69}$$

Приклад 4.

Тепер розгляньмо випадок, коли $W_+(x)$ має як нулі, так і полюси. Зокрема виберімо її такою:

$$W_+(x) = \alpha x\frac{x^2 - a^2}{x^2 - 1}, \tag{70}$$

де α і a — довільні, позитивно визначені сталі.

Ця функція має три нулі в точках $x_k^0 = 0, \pm a$ та два прості полюси в точках $x_k^p = \pm 1$.

Умова того щоби добутки $f(x_k^0)W_+'(x_k^0)$ у всіх трьох нулях були однакові накладає обмеження на сталу $a/$. Умовою сталості цих добутків є

$$a^2 = 2\frac{f(a)}{f(0)} + 1. \tag{71}$$

Якщо функцію, що описує залежність маси від координат, вибрати такою:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + b^2}, \tag{72}$$

то за $b = 1$ для a^2 одержуємо $a^2 = \sqrt{3}$.

З умови $G_{-1} = -f(x_k^p)$ знайдемо, що потенціал $V_-(x)$ буде несинґулярним, якщо

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3} - 1}. \tag{73}$$

Отже, приходимо до такої ґенеруючої функції:

$$W_+(x) = \frac{x}{\sqrt{3} - 1}\frac{x^2 - \sqrt{3}}{x^2 - 1} \tag{74}$$

та функції, що описує залежність маси від координат

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \tag{75}$$

для яких суперпотенціали є такими:

$$
\begin{aligned}
W(x) &= \frac{1}{2}\frac{x^4+5x^2-3\sqrt{3}x^2+6-5\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)(x^2+1)(x^2-\sqrt{3})}x,\\
W_1(x) &= \frac{1}{2}\frac{x^6-2x^4-\sqrt{3}x^4-2\sqrt{3}x^2+5x^2+12-5\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)(x^4-1)(x^2-\sqrt{3})}x.
\end{aligned}
\tag{76}
$$

Знайдений суперпотенціал та вибрана залежність маси від координат ґенерують такий несинґулярний потенціал

$$
V_-(x)=\frac{1}{(\sqrt{3}-1)^2(x^2+1)^3}\left(x^8+(11-4\sqrt{3})x^6+(49-26\sqrt{3})x^4+(21-12\sqrt{3})x^2+22-142\sqrt{3}\right). \tag{77}
$$

Хвильова функція стану з нульовою енерґією

$$
\psi_0(x)\sim\sqrt{x^2+1}\exp\left(-\frac{x^4}{4}-\frac{(5-2\sqrt{3})x^2}{2}\right) \tag{78}
$$

не має вузлів і, отже, описує точний розв’язок для основного стану.

Хвильова функція стану з енерґією ε

$$
\psi_\varepsilon(x)\sim x(x^2-\sqrt{3})\sqrt{x^2+1}\exp\left(-\frac{x^4}{8(\sqrt{3}-1)}-\frac{x^2}{4(\sqrt{3}-1)}\right) \tag{79}
$$

має три вузли і, отже, є точним розв’язком для третього збудженого стану.

VI. ВИСНОВКИ

У цій роботі ми узагальнили метод побудови КТР-потенціалів із двома довільними станами, розвинутий у праці [17], на випадок маси, залежної від координат.

КТР-потенціал із двома точно відомими енерґетичними рівнями та відповідними хвильовими функціями ґенерується функцією $W_+(x)$. Досліджено умови, за яких функція $W_+(x)$, що має прості нулі та синґулярності, ґенерує несинґулярну потенціальну енерґію $V_-(x)$. Наведено явні вирази КТР-потенціалів і хвильових функцій для двох довільних енерґетичних рівнів.

Зазначимо, що у прикладах 2 та 3 досліджено випадки, коли залежна від координат маса та суперпотенціал $W(x)$ чи функція $W_+(x)$ ґенерує постійний потенціал. Проте в цьому випадку рух частинки не вільний, оскільки в оператор кінетичної енерґії входить залежність маси від координат і при іншому способі упорядкування вона приводить до деякої ефективної потенціальної енерґії.

ПОДЯКИ

Публікація містить результати досліджень, проведених за часткової ґрантової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень за конкурсним проектом Ф64/41-2015 (№ держреєстрації 0115U004838).

[1] P. Ring, P. Schuk, *The nuclear many-body problem* (New York: Springer-Verlag, 1980), 716 p.
[2] F. Arias de Savedra, J. Boronat, A. Polls, A. Fabrocini, Phys.Rev. B **50**, 4248 (1994).
[3] A. Puente, L. Serra, M. Casas, Z. Phys. D **31**, 283 (1994).
[4] L. Serra, E. Lipparini, Europhys. Lett. **40**, 667 (1997).
[5] М. В. Ткач, Я. М. Березовський, Журн. фіз. досл. **7**, 188 (2003).
[6] L. Decar, L. Chetouani, T. F. Hamman, J. Math. Phys. **39**, 2551 (1998).
[7] F. R. Plastino *et al.*, Phys. Rev. A **60**, 4318 (1999).
[8] A. de Souza Dutra, C. A. S. Almedia, Phys. Lett. A **275**, 25 (2003).
[9] B. Roy, A. Roy, J. Phys. A **35**, 3961 (2002).
[10] I. O. Vakarchuk, J. Phys. A **38**, 4727 (2005).
[11] I. O. Vakarchuk, J. Phys. A **38**, 7567 (2005).
[12] C. Quesne, V. M. Tkachuk, J. Phys. A **37**, 4267 (2004).
[13] B. Bagchi *et al.*, Mod. Phys. Lett. A **19**, 2765 (2004).
[14] B. Bagchi *et al.*, J. Phys. A **38**, 2929 (2005).
[15] H. R. Christiansen, M. S. Cunha, J. Math. Phys. **55**, 092102 (2014).
[16] І.О. Вакарчук, *Квантова механіка* (ЛНУ імені Івана Франка, Львів, 2012).
[17] V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A **245**, 177 (1998).
[18] V. M. Tkachuk, J. Phys. A **34**, 6339 (2001).
[19] V. M. Tkachuk, O. O. Voznyak, Phys. Lett. A **301**, 177 (2002).
[20] B. Bagchi *et al.*, Europhys. Lett. **72**, 155 (2005).
[21] Qiong-Tao Xie, J. Phys. A **45**, 175302 (2012).
[22] C. Quesne, Int. J. Mod. Phys. A **27**, 1250073 (2012).

[23] R. Koç, E. Körcük, M. Koca, J. Phys. A **35**, L527 (2002).
[24] S. K. Moayedi, A. F. Jalbout, M. Solimannejad, J. Mol. Struct. (Theochem) **663**, 15 (2003).
[25] S. M. Ikhdair, R. Sever, Physica Scripta **79**, 035002 (2009).
[26] О. Возняк, В. М. Ткачук. Журн. фіз. досл. **16**, 1003 (2012).
[27] Л. Ф. Блажиевский, Теор. мат. физ. **40**, 51 (1979).
[28] F. S. A. Cavalcante *et al.*, Phys. Rev. B **55**, 1326 (1997).
[29] O. von Roos, Phys. Rev. B **27**, 7547 (1983).

QUASI-EXACTLY SOLVABLE POTENTIALS WITH ARBITRARY TWO KNOWN EIGENSTATES FOR SYSTEMS WITH POSITION-DEPENDENT MASS

O. Voznyak, V. M. Tkachuk
Ivan Franko National University of Lviv, Department of Theoretical Physics
12, Drahomanov St., Lviv, UA–79005, Ukraine

The number of exactly solvable potentials is rather limited. Therefore, much attention has been devoted to quasi exactly solvable (QES) problems for which it is possible to find exactly in an explicit form only a few energy levels and the corresponding wave functions. It was found that supersymmetric (SUSY) quantum mechanics is a powerful tool for this purpose. In our paper [V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A **245**, 177 (1998)] we proposed SUSY method for generating QES potentials with two known eigenstates. In the frame of this method the general expressions for the superpotential, the potential energy and two wavefunctions which correspond to the two energy levels were obtained. Using this method, we obtained QES potentials for which we found in the explicit form the energy levels and wave functions of the ground and first excited states. Later in [V. M. Tkachuk, J. Phys. A **34**, 6339 (2001)] this method was generalized for the case of an arbitrary two energy level.

In this paper the method of supersymmetric quantum mechanics has been used for discovering the quasi-exactly solvable potentials for systems with position-dependent mass. We have established the conditions which provide regular potential energy in the case of a singular generating function. The examples of the quasi-exactly solvable potentials for a particle with position-dependent mass with two known eigenstates have been considered in the cases of regular and singular generating functions. We have found the exact eigenfunctions of a particle with position dependent mass which correspond to the two energy levels.