

ОСНОВНИЙ СТАН ДВОВИМІРНОЇ СПІН-1/2 $J_1 - J_2$ МОДЕЛІ ГАЙЗЕНБЕРГА В ПІДХОДІ ФЕРМІОНІЗАЦІЇ ЙОРДАНА-ВІГНЕРА

О. Р. Баран, Т. М. Верхоляк
Інститут фізики конденсованих систем НАН України
вул. Свенціцького, 1, Львів, 79011, Україна
(Отримано 20 липня 2015 р.)

Для спін-1/2 $J_1 - J_2$ моделі Гайзенберга на прямокутній ґратці застосовано ферміонізацію Йордана-Вігнера. Перетворений гамільтоніан відповідає взаємодіючим безспіновим ферміонам, що перестрибують між сусідніми вузлами в калібрувальному полі. Із використанням наближення типу середнього поля як для прямої взаємодії між ферміонами, так і для фазових множників, що відповідають калібрувальному полю, задача зведена до вільного газу Фермі. У цьому наближенні обчислено енергію основного стану та досліджено фазовий перехід від антиферромагнітного впорядкування Нееля до неупорядкованого стану, зумовленого конкуренцією взаємодій.

Ключові слова: двовимірні квантові спінові моделі, фрустровані моделі, ферміонізація.

PACS number(s): 75.10.Jm, 75.40.Cx

I. ВСТУП

Спін-1/2 антиферромагнітна модель Гайзенберга із взаємодіями між найближчими та наступними після найближчих сусідями ($J_1 - J_2$ модель) на прямокутній ґратці була запропонована в роботах [1–3] у зв'язку з дослідженням купратних високотемпературних надпровідників і відтоді є однією з найбільш інтенсивно досліджуваних моделей у теорії конденсованих систем. Сьогодні інтерес до неї зумовлений насамперед вивченням особливостей фаз основного стану за різних співвідношень конкурентних взаємодій (див. огляд [4]).

Загалом низьковимірні квантові фрустровані моделі є складними об'єктами для теоретичного розгляду і їхні властивості сильно залежать від вимірності системи [5]. Так, в одновимірних системах квантові флуктуації зазвичай руйнують будь-який локальний порядок, натомість конкурентні взаємодії можуть приводити до впорядкування, наприклад, до спонтанного порушення просторової симетрії [6]. У двовимірних моделях, навпаки, фрустрація може зруйнувати впорядкований стан і спричинити різноманітні стани із відсутнім локальним магнітним порядком. $J_1 - J_2$ -модель на прямокутній ґратці якраз і є однією з найпростіших двовимірних моделей із конкурентними взаємодіями, у якій можуть виникати немагнітні фази, спричинені фрустрацією [4]. За слабкої взаємодії між наступними після найближчих сусідями основний стан моделі буде мати антиферромагнітне впорядкування Нееля, а в протилежному випадку (сильних діагональних взаємодій) магнітні моменти будуть впорядковані колінеарно. Складним для досліджень є проміжний випадок, коли конкуренція взаємодій найбільша. Тоді основний стан буде немагнітним, але для нього характерні сильні кореляції, що робить його важким для числових підходів. Щоб з'ясувати природу цього стану, $J_1 - J_2$ -модель активно досліджу-

вали за допомогою методу ренормалізаційної групи матриці густини [7, 8] та варіаційного методу Монте-Карло [9, 10]. Такий немагнітний стан може відповідати як фазі валентних зв'язків на плакетці, так і фазі топологічної спінової рідини [11]. Варто згадати також, що двовимірна спін-1/2 $J_1 - J_2$ модель Гайзенберга виявляється ефективною для опису низки магнітних матеріалів, зокрема VOMoO_4 , $\text{Li}_2\text{VO}\text{SiO}_4$ та $\text{Li}_2\text{VO}\text{GeO}_4$ (див. роботи [12–15]).

На сьогодні існує багато теоретичних підходів, які використовують, досліджуючи квантові спінові системи із фрустраціями. Так, $J_1 - J_2$ -модель на квадратній ґратці розглядалась, зокрема, у високотемпературному розвиненні [15], методом ренормалізаційної групи матриці густини [7, 8], квантовим методом Монте-Карло [10], у кластерному наближенні [16], на основі теорії функцій Гріна [17–19], а також методами зв'язаних кластерів [20–22] та точної діагоналізації [23, 24]. Тоді як результати числових підходів дуже залежать від скінченних розмірів системи, аналітичні методи часто непридатні для опису сильноскорельованих магнітонеупорядкованих фаз, що можуть виникати за проміжних значень діагональної взаємодії.

Поряд із згаданими вище методами досить ефективними можуть виявитися підходи та наближення, у яких використовують різні варіанти двовимірного перетворення Йордана-Вігнера. Перевагою такого розгляду є те, що сильноскорельовані спінові стани можна компактно описати мовою ферміонних збуджень. Уперше одновимірне перетворення Йордана-Вігнера, яке дає змогу перейти від спінових операторів до операторів Фермі, було реалізоване для спін-1/2 одновимірного XY-ланцюжка [25]. Пізніші узагальнення цього перетворення на двовимірні та тривимірні випадки (див. огляд [26]) досить інтенсивно застосовували, вивчаючи як термодинамічні, так і динамічні властивості різноманітних систем [27–36].

У цій статті в межах методу, базованому на пере-

творенні Йордана–Вігнера, досліджено основний стан спін-1/2 $J_1 - J_2$ моделі Гайзенберга на прямокутній ґратці. Тут ми реалізуємо ферміонізацію Йордана–Вігнера, запропоновану для моделі Гайзенберга на квадратній ґратці при взаємодії лише найближчих сусідів у праці [37]. У наближенні типу середнього поля, як у роботах [28, 37], ми розглядаємо лише антиферомагнітне впорядкування Нееля. Отримуємо термодинамічні функції та розраховуємо магнітний параметр порядку в основному стані. Результат порівнюємо з результатами інших методів.

У зв'язку з використанням теоретичним підходом окремо потрібно згадати про праці [27, 28]. Так, у роботі [27] в подібному до застосованого тут наближенні розглянуто спін-1/2 двовимірну $J_1 - J_2$ -модель Гайзенберга в зовнішньому магнітному полі. У ній основну увагу зосереджено на вивченні залежності повної намагніченості системи від магнітного поля. Ми ж у

своєму дослідженні за відсутності зовнішнього поля розраховуємо намагніченості підґраток. В роботі [28] в аналогічному з нашим наближенні вивчали спін-1/2 двовимірну XZ -модель із взаємодіями лише між найближчими сусідами. Установлено, що результати узгоджуються з результатами лінійної теорії спінових хвиль.

II. ФЕРМІОНІЗАЦІЯ ЙОРДАНА–ВІГНЕРА. НАБЛИЖЕННЯ ТИПУ СЕРЕДНЬОГО ПОЛЯ

Розгляньмо квантову спін-1/2-модель Гайзенберга з обмінними взаємодіями J_1 , J_\perp між найближчими та J_2 між наступними після найближчих сусідами на прямокутній ґратці розміру $N_x \times N_y$ ($N_x \rightarrow \infty$, $N_y \rightarrow \infty$), яка описується гамільтоніаном:

$$H = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \left(J_1 \mathbf{S}_{i,j} \cdot \mathbf{S}_{i+1,j} + J_\perp \mathbf{S}_{i,j} \cdot \mathbf{S}_{i,j+1} + J_2 \mathbf{S}_{i,j} \cdot \mathbf{S}_{i+1,j+1} + J_2 \mathbf{S}_{i,j+1} \cdot \mathbf{S}_{i+1,j} \right). \quad (1)$$

Нас цікавитиме випадок фрустрованих (конкурентних) взаємодій, коли всі вони є антиферомагнітними ($J_1 > 0$, $J_\perp > 0$, $J_2 > 0$).

Увівши оператори $S_{i,j}^\pm = S_{i,j}^x \pm iS_{i,j}^y$, перепишімо гамільтоніан (1):

$$H = H_{XY} + H_Z; \quad (2)$$

$$H_{XY} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \left[J_1 \left(S_{i,j}^+ S_{i+1,j}^- + S_{i+1,j}^+ S_{i,j}^- \right) + J_\perp \left(S_{i,j}^+ S_{i,j+1}^- + S_{i,j+1}^+ S_{i,j}^- \right) + J_2 \left(S_{i,j}^+ S_{i+1,j+1}^- + S_{i+1,j+1}^+ S_{i,j}^- + S_{i,j+1}^+ S_{i+1,j}^- + S_{i+1,j}^+ S_{i,j+1}^- \right) \right]; \quad (3)$$

$$H_Z = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \left[J_1 \left(S_{i,j}^+ S_{i,j}^- - \frac{1}{2} \right) \left(S_{i+1,j}^+ S_{i+1,j}^- - \frac{1}{2} \right) + J_\perp \left(S_{i,j}^+ S_{i,j}^- - \frac{1}{2} \right) \left(S_{i,j+1}^+ S_{i,j+1}^- - \frac{1}{2} \right) + J_2 \left(S_{i,j}^+ S_{i,j}^- - \frac{1}{2} \right) \left(S_{i+1,j+1}^+ S_{i+1,j+1}^- - \frac{1}{2} \right) + J_2 \left(S_{i,j+1}^+ S_{i,j+1}^- - \frac{1}{2} \right) \left(S_{i+1,j}^+ S_{i+1,j}^- - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (4)$$

Тут виділено XY та Ізінгову частини гамільтоніана (H_{XY} та H_Z відповідно). Зауважимо, що оператори $S_{i,j}^+$ та $S_{i,j}^-$ на одному вузлі задовольняють комутаційні співвідношення Фермі: $\{S_{i,j}^-, S_{i,j}^+\} = 1$, $\{S_{i,j}^+, S_{i,j}^+\} = \{S_{i,j}^-, S_{i,j}^-\} = 0$; а на різних вузлах — комутаційні співвідношення Бозе: $[S_{i,j}^-, S_{l,n}^+] = [S_{i,j}^+, S_{l,n}^+] = [S_{i,j}^-, S_{l,n}^-] = 0$.

Скористаймося варіантом перетворення Йордана–Вігнера, запропонованим у роботі [37] для моделі Гайзенберга на квадратній ґратці зі взаємодіями між най-

ближчими сусідами:

$$S_{i,j}^- = e^{i\varphi_{i,j}} d_{i,j}, \quad S_{i,j}^+ = e^{-i\varphi_{i,j}} d_{i,j}^+, \quad (5)$$

$$\varphi_{i,j} = \sum_{l(\neq i)} \sum_{n(\neq j)} \text{Im} \ln [l - i + i(n - j)] d_{l,n}^+ d_{l,n}. \quad (6)$$

Тут коефіцієнти $\varphi_{i,j}$ вибрані такими, щоб оператори $d_{i,j}^+$ та $d_{i,j}$ задовольняли переставні співвідношення Фермі як на одному, так і на різних вузлах: $\{d_{i,j}^+, d_{l,n}\} = \delta_{i,l} \delta_{j,n}$, $\{d_{i,j}^+, d_{l,n}^+\} = \{d_{i,j}, d_{l,n}\} = 0$.

Остаточно запишемо гамільтоніан (2) у ферміонному вигляді як (див. [26, 28, 37, 38]):

$$\begin{aligned}
 H_{XY} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} & \left[J_1 \left(d_{i,j}^+ e^{i(\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j})} d_{i+1,j} + d_{i+1,j}^+ e^{i(\varphi_{i,j} - \varphi_{i+1,j})} d_{i,j} \right) \right. \\
 & + J_{\perp} \left(d_{i,j}^+ e^{i(\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j})} d_{i,j+1} + d_{i,j+1}^+ e^{i(\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j+1})} d_{i,j} \right) \\
 & + J_2 \left(d_{i,j}^+ e^{i(\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i,j})} d_{i+1,j+1} + d_{i+1,j+1}^+ e^{i(\varphi_{i,j} - \varphi_{i+1,j+1})} d_{i,j} \right. \\
 & \left. \left. + d_{i,j+1}^+ e^{i(\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j+1})} d_{i+1,j} + d_{i+1,j}^+ e^{i(\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i+1,j})} d_{i,j+1} \right) \right]; \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_Z = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} & \left[J_1 \left(d_{i,j}^+ d_{i,j} - \frac{1}{2} \right) \left(d_{i+1,j}^+ d_{i+1,j} - \frac{1}{2} \right) \right. \\
 & + J_{\perp} \left(d_{i,j}^+ d_{i,j} - \frac{1}{2} \right) \left(d_{i,j+1}^+ d_{i,j+1} - \frac{1}{2} \right) \\
 & + J_2 \left(d_{i,j}^+ d_{i,j} - \frac{1}{2} \right) \left(d_{i+1,j+1}^+ d_{i+1,j+1} - \frac{1}{2} \right) \\
 & \left. + J_2 \left(d_{i,j+1}^+ d_{i,j+1} - \frac{1}{2} \right) \left(d_{i+1,j}^+ d_{i+1,j} - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (8)
 \end{aligned}$$

XY -частина гамільтоніана відповідає безспіновим ферміонам на прямокутній ґратці, що перестрибують між найближчими та наступними після найближчих вузлами в калібрувальному полі [37]. H_Z описує пряму взаємодію між ферміонами. Зауважимо, що, на відміну від XY -ланцюжка, ферміонне представлення двовимірної XY -моделі вже містить взаємодію між ферміонами, заховану у фазових множниках.

Для подальшого розгляду ферміонного гамільтоніана (7), (8) ми будемо застосовувати наближення типу середнього поля [26, 37, 39], адаптоване для моделі із взаємодією між наступними після найближчих сусі-

дами. Так, для фазових множників $\exp(\pm i\varphi_{i,j})$ у гамільтоніані (7) замінюємо оператори числа ферміонів $n_{i,j} = d_{i,j}^+ d_{i,j}$ їх середнім значенням. За нульової сумарної намагніченості ґратки XY частина гамільтоніана в такому наближенні трансформується в систему безспінових ферміонів, що рухаються в однорідному магнітному полі з потоком вектора напруженості через елементарну прямокутну плакетку $\Phi_0 = \pi$ (див. [26, 37, 39]). Відповідно потік через трикутну плакетку буде $\pi/2$. Вибираючи калібрування потенціалу аналогічно, як у роботах [26, 37, 39] (див. також [38]), отримуємо (7) у наближенні середнього поля:

$$\begin{aligned}
 H_{XY} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} & \left\{ J_1 (-1)^{i+j} \left(d_{i,j}^+ d_{i+1,j} + d_{i+1,j}^+ d_{i,j} \right) + J_{\perp} \left(d_{i,j}^+ d_{i,j+1} + d_{i,j+1}^+ d_{i,j} \right) \right. \\
 & \left. - i J_2 (-1)^{i+j} \left(d_{i,j}^+ d_{i+1,j+1} - d_{i+1,j+1}^+ d_{i,j} + d_{i,j+1}^+ d_{i+1,j} - d_{i+1,j}^+ d_{i,j+1} \right) \right\}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Наближення ж типу середнього поля для чотириферміонних доданків у H_Z (8), яке ми використовуємо (див. [26, 28, 37, 39]), має такий вигляд:

$$d_{i,j}^+ d_{i,j} d_{l,n}^+ d_{l,n} \rightarrow d_{i,j}^+ d_{i,j} \langle d_{l,n}^+ d_{l,n} \rangle + \langle d_{i,j}^+ d_{i,j} \rangle d_{l,n}^+ d_{l,n} - \langle d_{i,j}^+ d_{i,j} \rangle \langle d_{l,n}^+ d_{l,n} \rangle. \quad (10)$$

Тут ураховано кореляції ферміонів лише на однакових вузлах. Якщо обмежитися антиферромагнітним упорядкуванням Нееля (коли намагніченості підґраток m_A та m_B рівні за модулем, але протилежні за знаком, але розбиття ґратки на підґратки відбувається так, що $m_A = \langle S_{i,j}^z \rangle = \langle d_{i,j}^+ d_{i,j} \rangle - \frac{1}{2} = \langle S_{i+1,j+1}^z \rangle = \dots = -m_B = -\langle S_{i+1,j}^z \rangle = -\langle d_{i+1,j}^+ d_{i+1,j} \rangle + \frac{1}{2} = -\langle S_{i,j+1}^z \rangle = \dots$), будемо мати [38]:

$$\begin{aligned}
 H_Z = m_A \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} & \left\{ (J_1 + J_{\perp}) (-1)^{i+j+1} d_{i,j}^+ d_{i,j} + J_1 (-1)^{i+j} d_{i+1,j}^+ d_{i+1,j} \right. \\
 & + J_{\perp} (-1)^{i+j} d_{i,j+1}^+ d_{i,j+1} + J_2 (-1)^{i+j} \left(d_{i,j}^+ d_{i,j} + d_{i+1,j+1}^+ d_{i+1,j+1} \right) \\
 & \left. + J_2 (-1)^{i+j+1} \left(d_{i,j+1}^+ d_{i,j+1} + d_{i+1,j}^+ d_{i+1,j} \right) \right\} + \tilde{J} N_x N_y m_A^2. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Тут використане позначення $\tilde{J} = J_1 + J_{\perp} - 2J_2$.

Після перетворення Фур'є

$$d_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{N_x N_y}} \sum_{k_x, k_y} e^{i(k_x i + k_y j)} d_{k_x, k_y}, \quad d_{i,j}^+ = \frac{1}{\sqrt{N_x N_y}} \sum_{k_x, k_y} e^{-i(k_x i + k_y j)} d_{k_x, k_y}^+ \quad (12)$$

в обох частинах гамільтоніана (9) та (11) моделі Гайзенберга ($H = H_{XY} + H_Z$) отримуємо [38]:

$$H = \sum_{k_x, k_y} \left\{ -iJ_1 \sin k_x d_{k_x, k_y}^+ d_{k_x - \pi, k_y - \pi} + J_{\perp} \cos k_y d_{k_x, k_y}^+ d_{k_x, k_y} \right. \\ \left. + 2J_2 \cos k_x \sin k_y d_{k_x, k_y}^+ d_{k_x - \pi, k_y - \pi} - 2m_A \tilde{J} d_{k_x, k_y}^+ d_{k_x - \pi, k_y - \pi} \right\} \\ + \tilde{J} N_x N_y m_A^2. \quad (13)$$

Тут сумування відбувається за першою зоною Брілюена.

Гамільтоніан (13) можна записати в матричному вигляді [38]:

$$H = \sum_{\mathbf{k}}' (d_{k_x, k_y}^+ \ d_{k_x - \pi, k_y - \pi}^+) \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12}^* & -C_{11} \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} d_{k_x, k_y} \\ d_{k_x - \pi, k_y - \pi} \end{pmatrix} + \tilde{J} N_x N_y m_A^2, \quad (14)$$

де використано позначення $C_{11} = J_{\perp} \cos k_y$, $C_{12} =$

$-2m_A \tilde{J} + 2J_2 \cos k_x \sin k_y - iJ_1 \sin k_x$, а штрих біля знака суми означає, що \mathbf{k} належить області $-\pi \leq k_y \leq \pi$, $-\pi + |k_y| \leq k_x \leq \pi - |k_y|$.

Квадратичну форму (14) можна звести канонічним перетворенням Боголюбова до діагонального вигляду:

$$H = \sum_{\mathbf{k}}' \lambda_{\mathbf{k}}(m_A) [\beta_{\mathbf{k}}^+ \beta_{\mathbf{k}} - \alpha_{\mathbf{k}}^+ \alpha_{\mathbf{k}}] + \tilde{J} N_x N_y m_A^2, \quad (15)$$

де $\beta_{\mathbf{k}}^+$, $\alpha_{\mathbf{k}}^+$, $\beta_{\mathbf{k}}$, $\alpha_{\mathbf{k}}$ є операторами Фермі; а спектр $\lambda_{\mathbf{k}}(m_A)$ визначається так:

$$\lambda_{\mathbf{k}}(m_A) = \sqrt{J_{\perp}^2 \cos^2 k_y + J_1^2 \sin^2 k_x + (-2\tilde{J}m_A + 2J_2 \cos k_x \sin k_y)^2}. \quad (16)$$

Отже, ми прийшли до задачі ідеального газу ферміонів із варіаційним параметром, який відповідає антиферромагнітному порядку Нееля. Він визначається з умови мінімуму вільної енергії Гельмгольца. На основі (15) отримуємо в термодинамічній границі енергію основного стану з розрахунку на один вузол:

$$\frac{E_0(m_A)}{N_x N_y} = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \lambda_{\mathbf{k}}(m_A) + \tilde{J} m_A^2. \quad (17)$$

Тут намагніченість підґратки m_A визначаємо з умови мінімуму $E_0(m_A)$ по m_A .

III. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ РОЗРАХУНКІВ ТА ВИСНОВКИ

Зупинімося тепер коротко на результатах числових розрахунків для основного стану квадратної ґратки ($J_{\perp} = J_1$).

На рис. 1 показано залежність намагніченості підґратки від параметра J_2/J_1 , отриману на основі (17). На ньому подані для порівняння також результати з інших праць [7, 8, 16–20, 23, 40].

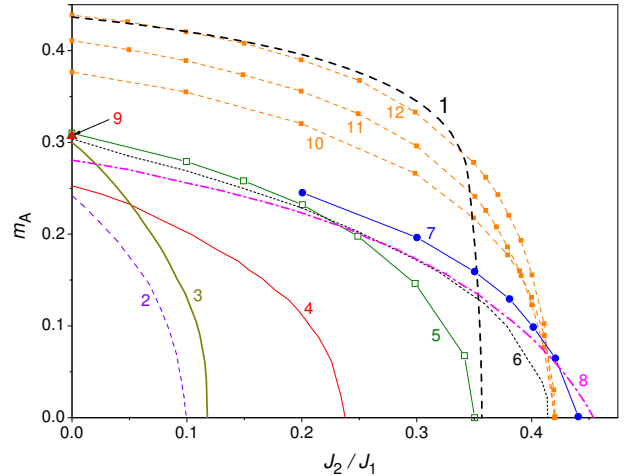


Рис. 1. Залежність підґраткової намагніченості від параметра J_2/J_1 у різних підходах: 1 — результат наших розрахунків; 2, 3, 4 — методів на основі функцій Гріна [17–19] відповідно; 5 — скінченновимірною скейлінгу даних точної діагоналізації для скінченновимірних ґраток [23]; 6, 7 — методу ренорм-групи матриці густини [7, 8] відповідно; 8 — екстраполяції даних методу зв'язаних кластерів [20]; 9 — квантового методу Монте-Карло [40]; 10, 11, 12 — кластерного наближення на основі чотири-, восьми- та шістнадцятичастинкових кластерів відповідно [16].

Передусім зауважимо, що результати методу ренорм-групи матриці густини [7, 8], скінченновимірного скейлінгу як даних точної діагоналізації для скінченновимірних ґраток [23], так і даних, розрахованих у методі зв'язаних кластерів [20], не тільки якісно, але й досить добре кількісно узгоджуються. Результати ж, отримані нами (у позакритичній області $J_2/J_1 \ll J_2^c/J_1$, $J_2^c/J_1 \approx 0.357$) та розраховані у кластерному наближенні на основі прямокутних кластерів різних розмірів [16], а також у межах підходів [17–19], побудованих на функціях Гріна, узгоджуються лише якісно з результатами згаданих вище числових методів [7, 8, 20, 23].

Те, що порохований на основі (17) магнітний параметр порядку занадто різко спадає при J_2/J_1 близькому до точки переходу J_2^c/J_1 , а також те, що ми отримали значно завищені значення m_A за малих J_2/J_1 , на нашу думку, пов'язано з використанням наближення типу середнього поля, у якому до того ж нехтувалося кореляціями між сусідніми вузлами (див. співвідношення (10)). Так, для нефрустрованої квадратної ґратки ($J_2 = 0$) ми отримуємо $m_A \approx 0.437$, що є суттєво більше від, наприклад, результату моделювання квантовим методом Монте-Карло ($m_A \approx 0.307$) [40]. Проте зауважимо, що в межах застосованого тут підходу результат можна дещо поліпшити, якщо взяти до уваги кореляції між сусідніми вузлами, як це

запропоновано в роботі [37] (див. також [26]). Таке самоузгоджене врахування згаданих кореляцій дає $m_A \approx 0.389$ при $J_2 = 0$ [37].

Окремо звернімо ще увагу на результати кластерного наближення з різним розміром кластера. Із рис. 1 видно, що при малому розмірі кластера результати цього наближення є близькими в позакритичній області до результатів нашого дослідження, базованому на перетворенні Йордана–Вігнера. Так, для нефрустрованої ґратки отримане тут m_A майже збігається з результатом наближення чотиричастинкового кластера. Зі збільшенням розміру кластера результати кластерного наближення при $J_2 = 0$ наближаються до результатів методів реалізованих у працях [7, 8, 20, 23].

Отже, ми показали, що використане просте наближення типу середнього поля в межах методу ферміонізації Йордана–Вігнера дає змогу якісно описати перехід від антиферромагнітного до магнітоневпорядкованого стану для двовимірної $J_1 - J_2$ моделі Гайзенберга. Самоузгоджене врахування кореляцій на сусідніх вузлах може продемонструвати ліпше узгодження з числовими результатами. Зазначимо, що ферміонне представлення моделі може бути корисним при розгляді немагнітних станів із сильними міжвузловими кореляціями, що й буде предметом наступних досліджень.

-
- [1] M. Inui, S. Doniach, M. Gabay, Phys. Rev. B **38**, 6631 (1988).
 [2] P. Chandra, B. Doucot, Phys. Rev. B **38**, 9335 (1988).
 [3] E. Dagotto, A. Moreo, Phys. Rev. Lett. **63**, 2148 (1989).
 [4] G. Misguich, C. Lhuillier, in *Frustrated Spin Systems. 2nd Ed.* (World-Scientific, 2013), p. 235.
 [5] *Introduction to Frustrated Magnetism*, edited by C. Lacroix, Ph. Mendels, F. Mila, Springer series in Solid-state Science **164**, (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011).
 [6] H.-J. Mikeska A. K. Kolezhuk, in *Quantum Magnetism*, Lecture Notes in Physics **645**, (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004), p. 1.
 [7] H. C. Jiang, H. Yao, L. Balents, Phys. Rev. B **86**, 024424 (2012).
 [8] S. S. Gong, W. Zhu, D. N. Sheng, O. I. Motrunich, M. P. A. Fisher, Phys. Rev. Lett. **113**, 027201 (2014).
 [9] W.-J. Hu, F. Becca, A. Parola, S. Sorella, Phys. Rev. B **88**, 060402(R) (2013).
 [10] S. Morita, R. Kaneko, M. Imada, J. Phys. Soc. Jpn **84**, 024720 (2015).
 [11] L. Balents, Nature (London) **464**, 199 (2010).
 [12] P. Carretta *et al.*, Phys. Rev. B **66**, 094420 (2002).
 [13] R. Melzi *et al.*, Phys. Rev. Lett. **85**, 1318 (2000).
 [14] R. Melzi, S. Aldrovandi, F. Tedoldi, P. Carretta, P. Millet, F. Mila, Phys. Rev. B **64**, 024409 (2001).
 [15] H. Rosner, R. R. P. Singh, W. H. Zheng, J. Oitmaa, W. E. Pickett, Phys. Rev. B **67**, 014416 (2003).
 [16] Y.-Z. Ren, N.-H. Tong, X.-C. Xie, J. Phys.: Condens. Matter **26**, 115601 (2014).
 [17] А. Ф. Барабанов, А. В. Михеенков, А. В. Шварцберг, Теор. мат. физ. **168**, N3, 389 (2011).
 [18] A. F. Barabanov, V. M. Berezovsky, J. Phys. Soc. Jpn. **63**, 3974 (1994).
 [19] L. Siurakshina, D. Ihle, R. Hayn, Phys. Rev. B **64**, 104406 (2001).
 [20] J. Richter, R. Zinke, D. J. J. Farnell, Eur. Phys. J. B **88**, 2 (2015).
 [21] O. Götze, S. E. Krüger, F. Fleck, J. Schulenburg, J. Richter, Phys. Rev. B **85**, 224424 (2012).
 [22] R. Darradi, O. Derzhko, R. Zinke, J. Schulenburg, S. E. Krüger, J. Richter, Phys. Rev. B **78**, 214415 (2008).
 [23] J. Richter, J. Schulenburg, Eur. Phys. J. B **73**, 117 (2010).
 [24] H. J. Schulz, T. A. L. Ziman, D. Poilblanc, J. Phys. I France **6**, 675 (1996).
 [25] E. Lieb, T. Schultz, D. Mattis, Ann. Phys. (N.Y.) **16**, 407 (1961).
 [26] O. Derzhko, J. Phys. Stud. **5**, 49 (2001).
 [27] M. C. Chang, M. F. Yang, Phys. Rev. B **66**, 184416 (2002).
 [28] O. Derzhko, T. Verkholyak, R. Schmidt, J. Richter, Physica A **320**, 407 (2003).
 [29] O. Derzhko, T. Krokhmalskii, Physica B **337**, 357 (2003).
 [30] D. C. Cabra, G. L. Rossini, Phys. Rev. B **69**, 184425 (2004).
 [31] O. Derzhko, T. Krokhmalskii, Czechoslovak J. Phys. **55**, 601 (2005).
 [32] P. Lou, Phys. Rev. B **72**, 064435 (2005).
 [33] T. Verkholyak, A. Honecker, W. Brenig, Eur. Phys. J. B

- 49, 283 (2006).
 [34] T. Verkholyak, J. Strečka, M. Jaščur, J. Richter, Eur. Phys. J. B **80**, 433 (2011).
 [35] S. Paul, A. K. Ghosh, J. Magn. Magn. Mater. **362**, 193 (2014).
 [36] K. Kumar, K. Sun, E. Fradkin, Phys. Rev. B **90**, 174409 (2014).
 [37] Y. R. Wang, Phys. Rev. B **43**, 3786 (1991).
 [38] О. Р. Баран, Т. М. Верхоляк, препринт ICMP-15-01U (2015).
 [39] Y. R. Wang, Phys. Rev. B **46**, 151 (1992).
 [40] A. W. Sandvik, Phys. Rev. B **56**, 11678 (1997).

GROUND STATE OF THE TWO-DIMENSIONAL SPIN-1/2 J_1 - J_2 HEISENBERG MODEL WITHIN THE JORDAN-WIGNER FERMIONIZATION

O. R. Baran, T. M. Verkholyak
Institute for Condensed Matter Physics
 1, Svientsitskii St., Lviv, UA-79011, Ukraine

Jordan-Wigner fermionization (Wang, 1991) is applied to the antiferromagnetic spin-1/2 Heisenberg model

$$H = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (J_1 \mathbf{S}_{i,j} \cdot \mathbf{S}_{i+1,j} + J_{\perp} \mathbf{S}_{i,j} \cdot \mathbf{S}_{i,j+1} + J_2 \mathbf{S}_{i,j} \cdot \mathbf{S}_{i+1,j+1} + J_2 \mathbf{S}_{i,j+1} \cdot \mathbf{S}_{i+1,j})$$

on a rectangular lattice with competing interactions between the nearest neighbors ($J_1 > 0$, $J_{\perp} > 0$) and next-nearest neighbors ($J_2 > 0$). The transformed Hamiltonian corresponds to the interacting spinless fermions hopping between neighboring sites in a gauge field. Here we study the case of the possible Néel ordering which emerges for a weak next-nearest-neighbor interaction. The problem is considered within the mean-field-type approximation for both the direct interaction between fermions and phase factors, which represent the gauge field, neglecting the correlations between the neighboring sites.

For the case of the square lattice ($J_1 = J_{\perp}$) we calculate the dependence of ground-state sublattice magnetization on the frustration parameter J_2/J_1 , and study the quantum phase transition from the Néel ordered to a disordered state, which occurs due to the competition between the nearest-neighbor and next-nearest-neighbor interactions. The obtained result is compared with the results of other analytical and numerical methods.

It is shown that the applied approach provides a qualitatively correct result for the magnetization curve. However, it gives a too large value for the Néel order parameter for the unfrustrated square lattice (at $J_2 = 0$) and a somewhat reduced value for the critical ratio of J_2/J_1 . The self-consistent consideration of the correlations between the neighboring sites is expected to improve the precision of the method.