

## ПЕРСОНАЛІЇ, ХРОНІКА, БІБЛІОГРАФІЯ PERSONALIA, MEETINGS, BIBLIOGRAPHY

“РІЗДВЯНІ ДИСКУСІЇ 2016”  
(Львів, 11–12 січня 2016 року)

“CHRISTMASS DISCUSSIONS 2016”  
(Lviv, January 11–12, 2016)

11–12 січня 2016 року на кафедрі теоретичної фізики Львівського національного університету відбувалися 20-ті Різдвяні наукові дискусії. Традиційно предметом обговорення були проблеми фізики твердого тіла, квантової механіки, фазових переходів, статистичної фізики, астрофізики, космології. Усі доповіді викликали зацікавлення аудиторії і спричинили активні дискусії. Нижче подаємо анотації виголошених доповідей.

### NON-ARCHIMEDEAN SPACES EVERYWHERE

*Mykhailo Zarichnyi*

Department for Geometry and Topology, Ivan Franko National University of Lviv

The Archimedean property means that there is no infinitely small or infinitely large elements in the given space. We will focus on the notion of non-Archimedean metric (ultrametric), i.e., a metric  $d$  on a set  $X$  satisfying the strong triangle inequality:  $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$  for all  $x, y, z \in X$ .

The first examples of ultrametric are the  $p$ -adic metrics on the rationals  $\mathbb{Q}$  (see, e.g., [1]). Ultrametries also appear in biology (e.g., in phylogenetic tree construction; [2]), physics (e.g., [3]), mathematical economics, theoretical computer science (e.g., for metrization of the space of probability measures [4]), etc.

In the talk, we discuss how ultrametric spaces appear in the fractal geometry (see [5] for the case of the idempotent measures).

- [1] N. Koblitz,  *$p$ -adic Numbers,  $p$ -adic Analysis, and Zeta-Functions* (Springer-Verlag, 1977).
- [2] V. R. Srinivas, *Bioinformatics: A Modern Approach* (Phi Learning Pvt. Ltd., 2009).
- [3] R. Rammal, G. Toulouse, M. A. Virasoro, *Ultrametricity for physicists*, Rev. Mod. Phys. **58** 765–788 (1986).
- [4] E. P. de Vink, J. J. M. M. Rutten, *Bisimulation for probabilistic transition systems: a coalgebraic approach*. ICALP T97 (Bologna). Theor. Comput. Sci. **221**, 271–293 (1999).
- [5] N. Mazurenko, M. Zarichnyi, *Idempotent ultrametric fractals*, Visn. Lviv Univ. Ser. Mech.-Math. **79**, 111–118 (2014).

### НЕРІВНОВАЖНИЙ ВІДГУК ЗАРЯДОВО ВПОРЯДКОВАНОЇ СИСТЕМИ НА ВЕЛИКІ ЕЛЕКТРИЧНІ ПОЛЯ

*О. Матвеев<sup>1,2</sup>, А. Швайка<sup>1</sup>, Т. Деверо<sup>3</sup>, Дж. Фрірікс<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Львів

<sup>2</sup>Джорджтаунський університет, Вашингтон, округ Колумбія, США

<sup>3</sup>Стенфордський університет, Стенфорд, Каліфорнія, США

Методами нерівноважної теорії динамічного середнього поля проведено точний розрахунок нелінійного відгуку зарядово впорядкованої системи. Вивчено, як накладання великого електричного поля впливає на величину постійного електричного струму та значення параметра зарядового впорядкування електронів провідності. Зокрема досліджено зарядово впорядковану фазу моделі Фалікова–Кімбала, що виявляє цілий ряд аномальних властивостей, включаючи виникнення станів у зарядовій щільності з підвищенням температури. Розрахунки проведено для різних величин взаємодії  $U$ , які відповідають випадкам металічної фази ( $U = 0.5$ ), квантової критичної точки ( $U = 0.86$ ) та критичного моттівського діелектрика ( $U = 1.4$ ). Показано, що щільні стани спричиняють суттєвий вплив на транспортні властивості, зокрема на нелінійний відгук системи при великих постійних електричних полях та на зникнення осциляцій Блоха.

## CHARGING SUPERCAPACITORS WITH NANOPOROUS ELECTRODS

*S. Kondrat*

Forschungszentrum Jülich, Germany

Supercapacitors have exceptional power density and cyclability, but the stored energy density is still small comparing to conventional batteries. It can be increased by fabricating electrodes with nanosized pores, but this may lead to a reduction of power density. We will discuss these issues from a theoretical perspective using phenomenological mean-field type models and molecular dynamics and Monte Carlo simulations. I shall also consider the effect of ionophobicity of pores towards ions and scrutinize various charging mechanisms. If the time allows, I will also say a few words about Ising helping us understand the thermodynamics of supercapacitors.

## ТЕПЛОЄМНІСТЬ КВАНТОВИХ СПІНОВИХ МОДЕЛЕЙ З ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНИХ РОЗВИНЕНЬ

*О. Держко*

Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Львів

Мова йтиме про квантові спінові моделі (наприклад, спін-1/2 антиферромагнетик Гайзенберга на ґратці кагоме) і сполуки, магнітні властивості яких можна описати за допомогою таких моделей. Термодинамічні величини (магнітну теплоємність чи магнітну сприйнятливість) можна виміряти з високою точністю. Чи може теорія акуратно передбачити температурні залежності термодинамічних величин? Це дозволило б визначити параметри спінового гамільтоніана моделі, яка реалізується в тій чи іншій сполуці.

Для таких ґраток, як, наприклад, проста кубічна ґратка, потрібний результат дає (числовий) метод квантове Монте Карло. [Інший універсальний (аналітичний) метод — метод функцій Гріна — має надто низьку точність і непридатний для прецизійного аналізу.] Якщо ж у моделі є фрустрації (метод квантове Монте Карло не працює), то ситуація значно складніша. Так, до сьогодні не зрозуміло, чи теплоємність спін-1/2 антиферромагнетика Гайзенберга на ґратці кагоме справді має (додатковий) низькотемпературний пік, бо ця особливість отримана лише методом точної діагоналізації для ґратки з 18 вузлів і можливо(?) зникає в термодинамічній границі.

Група французьких теоретиків запропонувала (числовий) метод знаходження температурної залежності теплоємності чи сприйнятливості, який використовує високотемпературні розвинення [1,2,3]. Стара ідея аналізу високотемпературних розвинень, однак, істотно модифікована. У своїй доповіді я коротко поясню метод Берню, Мігіша і Люїе [1,2,3].

[1] B. Bernu and G. Misguich, Phys. Rev. B **63**, 134409 (2001).

[2] G. Misguich and B. Bernu, Phys. Rev. B **71**, 014417 (2005).

[3] B. Bernu and C. Lhuillier, Phys. Rev. Lett. **114**, 057201 (2015).

## RELATION OF ENTANGLEMENT WITH MEAN SPIN AND SPIN CORRELATIONS FOR PURE AND MIXED STATES

*A. M. Frydryszak<sup>1</sup>, M. I. Samar<sup>2</sup>, V. M. Tkachuk<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Institute of Theoretical Physics, University of Wrocław, Poland

<sup>2</sup>Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv

We consider the geometric measure of entanglement. For pure state we find the relation between the mean value of spin and the geometric measure of entanglement of this spin and an arbitrary quantum system. The geometric measure of entanglement for mixed two spin states formed on subspaces spanned by  $|\uparrow\downarrow\rangle$ ,  $|\downarrow\uparrow\rangle$  or  $|\uparrow\uparrow\rangle$ ,  $|\downarrow\downarrow\rangle$  is studied. The relation of the entanglement of two spins in these cases with spin correlations is found. These results allow to quantify the entanglement for pure and mixed states on the experimental level by measuring the mean spin and spin correlations for pure and mixed states, respectively.

## ВЕЛИКІ ПОРОЖНИНИ В РОЗПОДІЛІ ГАЛАКТИК: ПОХОДЖЕННЯ, ЕВОЛЮЦІЯ, ДИНАМІКА

*Б. Новосядлий, М. Ціж*

Астрономічна обсерваторія та кафедра астрофізики,  
Львівський національний університет імені Івана Франка

Пояснення походження, еволюції та формування великомасштабної структури Всесвіту вимагає знання природи, вмісту та властивостей фундаментальних складників Всесвіту — матерії, яка описується стандартною моделлю фізики елементарних частинок, та прихованих складників (темна енергія, темна матерія), природа яких є поки що тільки здогадною. З іншого боку, характеристики великомасштабної структури є головним тестом космологічних моделей і моделей темної матерії та темної енергії. У доповіді висвітлено результати аналізу еволюції та динаміки прихованих компонент у найпростіших (з погляду динаміки суцільних середовищ) елементах великомасштабної структури Всесвіту — великих порожнинах. Припускається, що вони є результатом еволюції початкових адіабатичних збурень метрики простору-часу та густини і швидкості фундаментальних складників Всесвіту, які були згенеровані в епоху ранньої інфляції. Приводяться числові розв'язки системи диференціальних рівнянь, які описують еволюцію сферично-симетричного збурення в 3-компонентному середовищі від ранньої епохи до сучасної. Показано вплив різних типів темної енергії на профіль густини і швидкості матерії в області великих порожнин у розподілі галактик.

## РЕЛІКТОВІ ГРАВІТАЦІЙНІ ХВИЛІ В КОСМОЛОГІЧНИХ МОДЕЛЯХ З ДИНАМІЧНОЮ ТЕМНОЮ ЕНЕРГІЄЮ ЗА ДАНИМИ PLANCK-2015

*О. Сергієнко, Б. Новосядлий*

Астрономічна обсерваторія, Львівський національний університет імені Івана Франка

Ми встановлюємо спостережувальні обмеження на внесок тензорної моди збурень у космологічних моделях із динамічною темною енергією для різних сценаріїв інфляції. Моделлю темної енергії є мінімально зв'язане класичне скалярне поле з баротропним рівнянням стану. Використані набори даних включають дані Космічної обсерваторії Planck 2015 року щодо анізотропії реліктового випромінювання та лінзування, дані Planck/BICEP2+Keck щодо В-моди поляризації, баріонні акустичні осциляції з оглядів неба SDSS та 6dFGS, спектр потужності галактик з огляду неба WiggleZ, дані щодо слабкого лінзування з CFHTLenS та криві світності наднових типу Ia з компіляції JLA. Ми також досліджуємо наявні виродження між параметрами темної енергії та іншими космологічними параметрами.

## ЕВОЛЮЦІЯ ЗБУРЕНЬ ТЕМНОЇ ЕНЕРГІЇ В ПОЛІ ГАЛО ТЕМНОЇ МАТЕРІЇ

*М. Ціж, Б. Новосядлий*

Астрономічна обсерваторія та кафедра астрофізики,  
Львівський національний університет імені Івана Франка

Ми розглядаємо еволюцію збурень трикомпонентного середовища, а саме: темної матерії, темної енергії та релятивістської речовини. Темна енергія представлена квінтесенційним скалярним полем, яке в гідродинамічному наближенні характеризується трьома параметрами: параметром густини  $\Omega_{de}$ , параметром рівняння стану  $w$  та ефективною швидкістю звуку  $c_s^2$ . Збурення є сферично-симетричними, а для збурення темної матерії вводиться феноменологічна штучна в'язкість, що вірілізує систему при досягненні амплітудою значень відносного збурення  $\Delta_{vir} = 178$ . Рівняння еволюції (два рівняння збереження для тензора моменту-імпульсу та рівняння Айнштайна для компонент метричного тензора) розв'язуються чисельно для центральної області гало. Показано, що моделі темної енергії з меншим значенням ефективною швидкістю звуку сильніше впливають на динаміку формування гало та їх фізичні параметри. Цей ефект можна використати для оцінки нижньої межі значення ефективною швидкістю звуку темної енергії на основі спостережуваних даних про фізичні та статистичні характеристики гало темної матерії.

## ДИНАМІКА РОЗШИРЕННЯ ВСЕСВІТУ ПРИ ВЗАЄМОДІЇ МІЖ ТЕМНОЮ ЕНЕРГІЄЮ І ТЕМНОЮ МАТЕРІЄЮ

*Р. Неоменко, Б. Новосядлий*

Астрономічна обсерваторія, Львівський національний університет імені Івана Франка

Розглянуто модель темної енергії з баротропним рівнянням стану, яка взаємодіє з темною матерією гравітаційно та іншою силою, що призводить до обміну енергією-імпульсом між ними. Обидві компоненти описуються наближенням ідеальної рідини, параметрами якої є параметр рівняння стану, параметр густини та ефективна швидкість звуку. Розглянуто різні види взаємодій між ними, залежними від густин енергії цих компонент. На основі рівнянь Айнштейна та загальноковаріантних рівнянь збереження отримано рівняння, які описують динаміку розширення однорідного ізотропного Всесвіту та еволюцію густин обох компонент для різних значень параметра взаємодії. Показано, що для цих взаємодій є області значень параметрів темної енергії і темної матерії та параметра взаємодії, для яких густини темної енергії і темної матерії можуть набувати від'ємних значень. Для виділення класу моделей, у яких енергія прихованих компонент завжди додатна, знайдено відповідні умови додатності для цих компонент. Проаналізовано динаміку розширення Всесвіту з цими взаємодіями.

## ЕЛЕКТРОДИНАМІКА У ПРОСТОРІ ЗІ СПІНОВОЮ НЕКОМУТАТИВНІСТЮ КООРДИНАТ

*В. Васюта*

Кафедра теоретичної фізики,  
Львівський національний університет імені Івана Франка

Некомутативність операторів координат виникає в теорії струн [1] та у квантовій гравітації [2]. Так звана канонічна некомутативність  $[X_i, X_j] = i\theta_{ij}$ , де  $\theta_{ij}$  є постійною матрицею, з очевидністю не є інваріантною щодо поворотів системи координат. Інваріантності некомутативної алгебри стосовно поворотів можна досягти, зокрема, покладаючи координатний комутатор рівним певній функції спіну. Так, у [3] введено некомутативні координати, зсуваючи комутативні координати на оператори спіну  $X_i = x_i + \theta s_i$ .

Ми запропонували релятивістське узагальнення такої некомутативності шляхом зсуву комутативних координат на матриці Дірака  $X^\mu = x^\mu + i\theta\gamma^\mu$ . Відповідна алгебра має вигляд

$$[X^\mu, X^\nu] = 2i\theta^2\sigma^{\mu\nu}, \quad [X^\mu, \sigma^{\alpha\beta}] = 2\theta(\gamma^\alpha\eta^{\mu\beta} - \gamma^\beta\eta^{\mu\alpha}),$$

$$[X^\mu, P^\nu] = -i\eta^{\mu\nu}, \quad [P^\mu, P^\nu] = 0, \quad [P^\mu, \sigma^{\alpha\beta}] = 0,$$

$$[\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\gamma\delta}] = i(\eta_{\alpha\gamma}\sigma_{\beta\delta} - \eta_{\beta\gamma}\sigma_{\alpha\delta} - \eta_{\alpha\delta}\sigma_{\beta\gamma} + \eta_{\beta\delta}\sigma_{\alpha\gamma}),$$

де  $\sigma^{\mu\nu} = i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/2$ ,  $\eta^{\mu\nu}$  є тензором Мінковського. Із використанням упорядкування Вейля встановлено аналог зіркового добутку Мoyal для запропонованої алгебри.

Знайдено функцію Лагранжа електромагнітного поля в такому некомутативному просторі. Слід зауважити, що електромагнітне поле в некомутативному просторі стає неабелевим. З умови інваріантності коваріантної похідної щодо локальних калібрувальних перетворень отримано вигляд цих калібрувальних перетворень для електромагнітного поля.

Варіюючи дію, одержали точні рівняння поля. Ці рівняння є нелінійними, що приводить до взаємодії електричного й магнітного полів. Таку взаємодію проілюстровано на деяких системах. Зокрема показано, що електростатичне поле точкового заряду в постійному магнітному полі в першому наближенні за параметром некомутативності залишається пропорційним  $1/r$ , але заряд екранується магнітним полем, причому екранування є анізотропним. Точно розв'язано задачу про рух плоскої хвилі в постійному електричному й магнітному полях. Показано, що зовнішнє поле модифікує фотонне дисперсійне співвідношення. Крім того, за допомогою узагальненого на релятивістський випадок методу Боголобова–Крилова розглянуто взаємодію двох плоских хвиль. Отримані результати порівняно з аналогічними результатами для канонічної некомутативності.

[1] N. Seiberg and E. Witten, JHEP **09**, 032 (1999).

[2] S. Doplicher, K. Fredenhagen, and J. E. Roberts, Phys. Lett. B **331**, 39 (1994).

[3] H. Falomir *et al.*, Phys. Lett. B **680**, 384 (2009).

## СИСТЕМА ДВОХ ЧАСТИНОК У СФЕРИЧНО-СИМЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ З НЕКОМУТАТИВНІСТЮ КООРДИНАТ КАНОНІЧНОГО ТИПУ

Х. Гнатенко

Кафедра теоретичної фізики,  
Львівський національний університет імені Івана Франка

Розглянуто некомутований простір із збереженою сферичною симетрією, який характеризується такими співвідношеннями для операторів координати та імпульсу:

$$[X_i, X_j] = i\alpha(a_i b_j - a_j b_i), \quad (1)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (2)$$

$$[P_i, P_j] = 0, \quad (3)$$

де  $\alpha$  — безрозмірна константа,  $a_i, b_i$  — додаткові координати, які описуються гармонічним осцилятором [1,2]. У загальному випадку різним частинкам у некомутованому просторі можуть відповідати різні тензори некомутованості. У зв'язку з цим виникає проблема опису системи частинок у просторі з некомутованістю координат.

Досліджено систему двох частинок у сферично-симетричному некомутованому просторі (1)–(3). Показано, що координати центра мас системи задовольняють некомутовану алгебру з ефективним тензором некомутованості. Як приклад двочастинкової системи розглянуто атом водню. Знайдено поправки до енергетичних рівнів атома, зумовлені некомутованістю координат (1).

[1] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A **378**, 3509 (2014).

[2] Kh. P. Gnatenko, Yu. S. Krynytskyi, V. M. Tkachuk, Mod. Phys. Lett. A **30**, 1550033 (2015).

## FROM TRANSPORT NETWORKS TO ONLINE ROLE-PLAYING GAMES

Yurij Holovatch<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Institute for Condensed Matter Physics of NAS of Ukraine, Lviv

<sup>2</sup>Doctoral College for the Statistical Physics of Complex Systems,  
Leipzig-Lorraine-Lviv-Coventry ( $\mathbb{L}^4$ )

I make a brief review of two different projects our group has participated in. One concerns the empirical analysis and modeling of public transportation networks [1–3], another one deals with the analysis of human behavior in a virtual environment of a massive multiplayer online game [4,5]. A common feature of these studies which target entirely different, at the first sight, subjects is that in both cases we deal with complex systems of many interacting agents, displaying collective behavior that does not follow trivially from the behaviors of the individual parts.

Often our analysis was motivated and carried out using our former experience in the studies of interacting many particle systems by tools of statistical physics and complex network theory. The participants of the Workshop are welcome to join the discussion about some advantages and drawbacks of such an approach.

This work was supported by the Seventh Framework Program of the European Union within the International Research Staff Exchange Scheme Grants Nos. Nos 612669 *Structure and Evolution of Complex Systems with Applications in Physics and Life Sciences*, 612707 *Dynamics of and in Complex Systems*, 295302 *Statistical Physics in Diverse Realizations*, 269139 *Dynamics and Cooperative Phenomena in Complex Physical and Biological Media*.

[1] C. von Ferber, T. Holovatch, Yu. Holovatch, V. Palchykov, Eur. Phys. J. B **68**, 261 (2009).

[2] B. Berche, C. von Ferber, T. Holovatch, Yu. Holovatch, Eur. Phys. J. B **71**, 125 (2009); Adv. Complex Syst. **15**, 1250063 (2012); J. Transport. Security **5**, 199 (2012).

[3] C. von Ferber, Yu. Holovatch, Eur. Phys. J. ST **216**, 49 (2013).

[4] M. Szell, S. Thurner, Social Networks **32**, 313 (2010).

[5] O. Mryglod, B. Fuchs, M. Szell, Yu. Holovatch, S. Thurner, Physica A **419**, 681 (2015).

## THE SELF-ADJOINTNESS AND THE CASIMIR EFFECT IN A BACKGROUND MAGNETIC FIELD

*Yurii Sitenko*

Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of NAS of Ukraine, Kyiv

We study the influence of a background uniform magnetic field and boundary conditions on the vacuum of a quantized charged massive matter field confined between two parallel neutral plates. The admissible set of boundary conditions at the plates is determined by the requirement that the operator of one-particle energy be self-adjoint. A generalization of the MIT bag boundary condition is proposed. We show that in the case of a sufficiently strong magnetic field directed orthogonally to the plates and a large separation of the plates the Casimir force is repulsive being independent of the choice of a boundary condition as well as of the distance between the plates.

## МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ НЕІМУННИХ ЗАХВОРЮВАНЬ НА ГРАФІ

*Я. М. Ільницький*

Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Львів

Обговорено загальні аспекти побудови епідеміологічних моделей у просторі з нульовою розмірністю та на графі. Як ілюстрацію розглянуто модель *SIS* неімунного захворювання на графі, побудованому на вершинах квадратної ґратки з фіксованим та випадковим радіусом інфікування. За допомогою методу коміркового автомата вивчено критичні властивості такої моделі у стаціонарному стані та отримано її розв'язок у середньопольовому наближенні. Досліджено особливості кластеризації системи під час її руху до критичної точки.

Запропоновано також модель *SIC*, яка є узагальненням моделі *SIS* на випадок набуття збудником резистентності до наявних препаратів. За допомогою аналітичного моделювання даних комп'ютерних симуляцій отримано просту аналітичну залежність поширеності мультирезистентного збудника залежно від параметрів моделі. Вивчено характерні просторові шаблони поширення обох типів збудників.

Обговорено подальші перспективи підходу в контексті епідеміологічних моделей на мережах із заданими властивостями та наближення моделювання до специфічних соціогеографічних реалій.

- [1] W. O. Kermack, A. G. McKendrick, A contribution to the mathematical theory of epidemics, Proc. Roy. Soc. London A, **115**, 700–721 (1927).
- [2] N. Bocca, Automata network models of interacting populations, in Cellular Automata, Dynamical Systems and Neural Networks, Mathematics and Its Applications series, E. Goles and S. Martines, Eds. Vol. 282, Springer, 1994, 192 p.
- [3] H. Situngkir, Epidemiology Through Cellular Automata: Case of Study Avian Influenza in Indonesia, 2004, arXiv:nlin/0403035.
- [4] J. Ilnytskyi, Y. Holovatch, Y. Kozitsky, H. Ilnytskyi, Computer simulations of a stochastic model for the non-immune disease spread, Вісник НУ “Львівська Політехніка” No. 800, 176–185 (2014).
- [5] J.M. Ilnytskyi, Y. Kozitsky, H. Ilnytskyi, O. Haiduchok, Stationary states and spatial patterning in an *SIS* epidemiology model with implicit mobility, Physica A, submitted.

## МОДЕЛЮВАННЯ КАРТ ПОЛЯРИЗАЦІЇ РАДІОВИПРОМІНЮВАННЯ ЗАЛИШКІВ НАДНОВИХ ЗІР

*О. Петрук, Р. Бандієра, В. Бешлей*

Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, Львів,  
Астрофізична обсерваторія, Флоренція

Залишки наднових зір вважаються основними прискорювачами космічних променів з енергіями до  $10^{15}$  eV. Детектування космічних променів до таких енергій не дає інформації про умови в конкретному об'єкті, оскільки галактичні магнітні поля відхиляють їх траєкторії від напрямку на джерела. Тому робити висновки про відповідні фізичні процеси можна лише зі спостережень випромінювання, яке генерується цими релятивістськими частинками. Нині спостереження проводять як наземними інструментами, так і обсерваторіями космічного базування від радіо до жорсткого гамма-діапазону. Дані містять інформацію про спектри, розподіл поверхневої яскравості та поляризацію синхротронного випромінювання. Проте переважно аналізують лише спектри та одновимірні зрізи яскравості. У наших попередніх роботах розвинуто метод моделювання карт яскравості в різних діапазонах для

залишків наднових, які еволюціонують у міжзоряному середовищі з однорідним та неоднорідним розподілами густини чи магнітного поля. У цій доповіді представлено розвиток методу для моделювання карт розподілу поляризованого радіовипромінювання цих об'єктів. Це вимагало розв'язку двох основних задач: узагальнення класичної теорії синхротронного випромінювання на випадковому компоненту магнітного поля та побудову й розв'язування рівняння, яке описує еволюцію цієї компоненти на фронті ударної хвилі та в об'ємі залишку з урахуванням її взаємодії з космічними променями.

## ДИНАМІКА ЗАРЯДЖЕНОГО РОТАТОРА

*А. Дувір'як*

Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Львів

Розглянуто рух зарядженого ротатора — одного заряду (або кількох), на який накладено жорстку в'язь (в'язі). Динаміка ротатора виводиться з рівняння Лоренца–Дірака, доповненого принципом д'Аламбера–Лагранжа, і приводить до нелінійного рівняння 2-го порядку щодо кутової швидкості. Його можна звести до рівняння Емдена–Фаулера, яке не розв'язується в термінах відомих функцій. Досліджено асимптотики рівняння ротатора й побудовано його фазовий портрет. Показано, що лише одна фазова траєкторія — сепаратриса — має фізичний сенс, описуючи гальмування ротатора. Усі інші траєкторії описують необмежений розгін ротатора за скінченний час.

Формальний розгляд ротатора з кількома зарядами приводить до помилкового результату — занадто сильного гальмування, безвідносного до знака й розміщення зарядів. Парадокс розв'язується врахуванням взаємодії зарядів між собою, що генерується потенціалами Льенара–Віхерта, і породжує нецентральні сили Лоренца (бо центральні сили повністю компенсувалися б в'язями).

## ГЕОМЕТРІЯ МНОГОВИДУ ЕВОЛЮЦІЙНИХ СТАНІВ ДВОХ СПІНІВ З АНІЗОТРОПНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

*А. Кузьмак*

Кафедра теоретичної фізики

Львівський національний університет імені Івана Франка

Досліджено еволюцію системи двох спінів у магнітному полі, взаємодія між якими описується анізотропним гамільтоніаном Гайзенберга. Показано, що така еволюція відбувається на двопараметричному многовиді, геометрія якого залежить від співвідношення між параметрами взаємодії. У випадку, коли таке співвідношення є раціональним числом, многовид замкнутий і має форму тора. Також було досліджено геометрію многовиду, на якому відбувається еволюція системи двох спінів, що описуються моделлю Дзялошинського–Морія, з додатковою  $ZZ$  взаємодією. У цьому випадку отримані подібні результати. А саме, коли співвідношення між параметрами взаємодії буде раціональним числом, то цей многовид буде тором. На завершення проаналізовано заплутаність станів, які належать до цих многовидів. Знайдено лінії, на яких є стани зі сталою заплутаністю, а також знайдено залежність густини таких ліній на многовиді від співвідношення між параметрами взаємодії.

## ВПЛИВ КВАНТОВОГО ВИМІРЮВАННЯ ТА ВЗАЄМОДІЇ “КУБІТ–ТЕРМОСТАТ” НА ЧИСТОТУ ВІДКРИТОЇ КВАНТОВОЇ СИСТЕМИ: ОСОБЛИВОСТІ ПЕРЕПОВНЕНОГО БАЗИСУ ВЕКТОРІВ СТАНУ

*В. В. Ігнатюк*

Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Львів

Розглянуто початковий стан кубіта, який виникає внаслідок неселективних вимірювань [1] на переповненому базисі, коли кількість результатів вимірювань  $N = 3$  перевищує розмірність  $n = 2$  Гільбертового простору векторів стану. Для демонстрації особливостей, які виникають унаслідок виконання нерівності  $N > n$ , ми взяли просту спін–бозонну систему, яка описується точно розв'язуваною моделлю з розфазуванням [2]. На процедуру вимірювання накладено умови, що спричиняють постійне зростання когерентності системи на початковому етапі її еволюції [3] внаслідок взаємодії “кубіт–термостат”.

Показано, що на відміну від проекційної схеми фон Ноймана при  $N = n = 2$ , найбільш змішаний стан кубіта, який виникає внаслідок неселективного вимірювання, у загальному випадку може залежати від температури його оточення. Ця незвична особливість дозволяє розглядати “температурно

контрольоване” очищення кубіта [4] як доповнення до “динамічного” очищення, проаналізованого раніше [3].

Також розглянуто кілька різновидностей повторних квантових вимірювань над системою “кубіт-термостат” та проаналізовано їх перспективність з погляду додаткового очищення відкритої квантової системи.

- [1] Н.-Р. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford University, Oxford, 2007).
- [2] V. G. Morozov, S. Mathey, and G. Röpke, *Phys. Rev. A* **85**, 022101 (2012).
- [3] V. V. Ignatyuk, V. G. Morozov, *Phys. Rev. A* **91**, 052102 (2015).
- [4] V. V. Ignatyuk, *Phys. Rev. A* **92**, 062115 (2015).
- [5] J. Dajka, B. Gardas, and J. Luczka, *Int. J. Theor. Phys.* **52**, 1148 (2013).

## ФОРМУВАННЯ ПЕТЕЛЬ У ПОЛІМЕРАХ У НЕВПОРЯДКОВАНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

*Х. Гайдуківська, В. Блавацька*

Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Львів

У роботі проаналізовано ймовірність формування окремої петлі на довгому гнучкому ланцюжку в середовищі з безладом у випадку загальної вимірності  $d$ . Структурні неоднорідності в задачі скорельовані на великих відстанях  $r$  згідно зі степеневим законом  $\sim r^{-a}$ . У межах моделі неперервного ланцюжка із застосуванням методу прямого полімерного перенормування отримані значення критичних показників, які керують скейлінгом ймовірності утворення петель залежно від їх довжини. Кількісно показано зниження ймовірності утворення петель у середовищі зі скорельованим безладом.

## ONE-DIMENSIONAL COULOMB-LIKE PROBLEM AND MINIMAL LENGTH

*M. I. Samar and V. M. Tkachuk*

Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv

We present the definition of an inverse position operator  $X^{-1}$  in the general case of deformed Heisenberg algebra leading to minimal length, which satisfies the invertibility condition  $X^{-1}X = XX^{-1} = 1$ . The energy spectrum and eigenfunctions for a 1D Coulomb-like potential in the general case of deformed space with minimal length are found exactly. We analyze the energy spectrum for different partial cases of the deformation function and find that depending on the kind of the deformation function a different dependence on the parameter of deformation of the energy correction term and even a different sign of this term can be obtained.

## A PENNING TRAP WITH AN INCLINED MAGNETIC FIELD

*Yurij Yaremko<sup>b</sup>, Maria Przybylska<sup>‡</sup>, and Andrzej J. Maciejewski<sup>‡</sup>*

<sup>b</sup>Institute for Condensed Matter Physics of NAS of Ukraine, Lviv

<sup>‡</sup>Institute of Physics, University of Zielona Góra, Poland

<sup>‡</sup>Institute of Astronomy, University of Zielona Góra, Poland

A modified Penning trap with a spatially uniform magnetic field  $\mathbf{B}$  inclined with respect to the axis of rotational symmetry of the electrodes is considered. The inclination angle can be arbitrary. The canonical transformation of phase variables transforming the Hamiltonian of the considered system into a sum of three uncoupled harmonic oscillators is found. We determine the region of stability in space of two parameters controlling this dynamics: the trapping parameter  $\kappa$  and the squared sine of the inclination angle  $\vartheta_0$ . If the angle  $\vartheta_0$  is smaller than 54 degrees, a charge occupies a finite spatial volume within the processing chamber. A rigid hierarchy of trapping frequencies is broken if  $\mathbf{B}$  is inclined at the critical angle: the magnetron frequency reaches the corrected cyclotron frequency while the axial frequency exceeds them. Apart from this resonance we reveal the family of resonant curves in the region of stability.

In the relativistic regime the system is not linear. We show that it is not integrable in the Liouville sense. The averaging over the fast variable allows to reduce the system to two degrees of freedom. The analysis of the Poincaré cross-section of the averaged systems shows the regions of effective stability of the trap.



## ТЕРМОДИНАМІЧНІ ВЕЛИЧИНИ СИСТЕМИ ТВЕРДИХ КУЛЬОК У СЛАБОНЕРІВНОВАЖНОМУ ТЕПЛОПРОВІДНОМУ СТАЦІОНАРНОМУ СТАНІ

Й. А. Гуменюк

Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Львів

Стаціонарний стан газу, через який поширюється тепло, якісно відрізняється від рівноважного. Задачу обчислення потоку тепла розв'язують у кінетичній теорії (напр. [1]) та методом Гріна–Кубо (напр. [2]). Однак проблема розрахунку термодинамічних характеристик систем у стаціонарному стані — тиску, внутрішньої енергії чи ентропії — перебуває на початкових етапах свого розв'язання [3–6]. У мажах підходу суцільного середовища запропоновано [7] спосіб розрахунку термодинамічних величин газу низької густини в теплопровідному стаціонарному стані для слабкого відхилення від рівноваги.

Однак при зміщенні в область проміжних і високих густин усе більше проявляється потенціал взаємодії, зокрема розміри молекул. Щоб їх урахувати, ми за допомогою того ж способу [7] розраховуємо тиск, внутрішню енергію та ентропію модельної системи твердих кульок у слабонерівноважному теплопровідному стаціонарному стані.

Аналітичні вирази для цих величин знайдено в наближенні 4-го порядку за градієнтами температури інтегруванням відповідних локальних густин уздовж теплового потоку. Показано, що градієнтні внески до внутрішньої енергії залежать від об'єму, а ентропія задовольняє II-е начало термодинаміки для нерівноважних процесів. Розрахунки проведено для вимірностей 3D, 2D та 1D.

[1] Дж. Ферцигер, Г. Капер, *Математическая теория процессов переноса в газах* (Москва, Мир, 1976).

[2] Д. Н. Зубарев, *Неравновесная статистическая термодинамика* (Москва, Наука, 1971).

[3] T. S. Komatsu, N. Nakagawa, S.-i. Sasa, H. Tasaki, *J. Stat. Phys.* **134**, 401 (2009).

[4] T. S. Komatsu, N. Nakagawa, S.-i. Sasa, H. Tasaki, *J. Stat. Phys.* **142**, 127 (2011).

[5] N. Nakagawa, *Phys. Rev. E* **85**, 051115 (2012).

[6] G. P. Morriss, D. P. Truant, *Phys. Rev. E* **87**, 062144 (2013).

[7] Й. А. Гуменюк, препринт ICMP-14-11U (Львів, 2014).

## БОЗЕ–АЙНШТАЙНІВСЬКА КОНДЕНСАЦІЯ В ІДЕАЛЬНОМУ БОЗЕ-ГАЗІ В ЗОВНІШНЬОМУ ПОЛІ

І. Вакарчук

Кафедра теоретичної фізики

Львівський національний університет імені Івана Франка

Розраховано температуру бозе–айнштайнівської конденсації ідеального бозе-газу залежно від параметрів потенціалу зовнішнього поля [1]. Обчислено температурну залежність бозе-конденсатної фракції. Отримані величини порівняно з результатами інших праць [2,3].

[1] Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин, *Термодинамика, статистическая физика и кинетика* (Наука, Москва, 1977), § 55.

[2] J. Ieda, T. Tsurumi, M. Wadati, *J. Phys. Soc. Jpn* **70**, 1256 (2001).

[3] А. А. Ровенчак, *Фізика бозе-систем* (ЛНУ імені Івана Франка, Львів, 2015), с. 39.