БАГАТОЧАСТИНКОВА СИСТЕМА У СФЕРИЧНО-СИМЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ З КАНОНІЧНОЮ НЕКОМУТАТИВНІСТЮ КООРДИНАТ

Х. П. Гнатенко, В. М. Ткачук
Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра теоретичної фізики, вул. Драгоманова 12, Львів, 79005, Україна
e-mail: khrystyna.gnatenko@gmail.com, voltkachuk@gmail.com
(Отримано 30 жовтня 2017 р.)

Розглянуто сферично-симетричний простір з некомутативністю координат канонічного типу. Досліджено проблему опису руху системи частинок у такому просторі. Установлено, що рух центра мас системи описується за допомогою ефективного тензора некомутативності. Рух центра мас та відносний рух не є незалежними у сферично-симетричному некомутативному просторі. Знайдено умову, за якої некомутативні координати можуть розглядатися як кінематичні змінні; координати центра мас та координати відносного руху комутують; ефективний тензор некомутативності не залежить від композиції системи; представлення для некомутативних координат центра мас, отримані на основі їх означення та на основі співвідношень некомутативної алґебри, є тотожними. Проаналізовано гамільтоніан системи в некомутативному просторі зі збереженою сферичною симетрією.

Ключові слова: сферична симетрія, ефективний тензор некомутативності, повний гамільтоніан.

PACS number(s): 02.40.Gh, 04.20.Cv

I. ВСТУП

Останніми роками багато уваги приділяють дослідженню квантованого простору, побудованого на основі ідеї про те, що оператори координат та оператори імпульсів можуть задовольняти незвичні комутаційні співвідношення. А саме, припускається, що на планківських масштабах комутатор координат має такий вигляд:

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}. \tag{1}$$

У некомутативному просторі канонічного типу параметри координатної некомутативності θ_{ij} є елементами сталої антисиметричної матриці. Зацікавлення до ідеї некомутативності останніми роками зумовлено розвитком теорії струн та квантової ґравітації [1, 2].

Дослідження фізичних систем у некомутативному просторі дозволяють знайти вплив особливостей простору на планківських масштабах на їхні властивості, а також визначити системи, які є найчутливішими до квантованості простору. Багато класичних та квантових систем вивчали у просторі з модифікованими комутаційними співвідношеннями. Серед них, для прикладу, гармонічний осцилятор [3–11], атом водню [8, 12–28], задача Ландау [29–32], частинка у гравітаційній квантовій ямі [33, 34] та багато інших.

Досліджували також системи частинок у некомутативному просторі канонічного типу. Систему заряджених частинок у некомутатинвому просторі вивчали у [35]. Проблеми квантової механіки багатьох частинок розглядали в некомутативному просторі у [12]. Вплив некомутативності координат на рух макроскопічного тіла у ґравітаційному полі аналізували у [36, 37]. У статі [38] автори дослідили двочастинкову систему з осциляторною взаємодією на некомутативній площині. Задачу багатьох частинок досліджували також у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів [8, 39, 40], у некомутативному просторі-часі [41], у деформованому просторі з мінімальною довжиною [42, 43].

Важливо зауважити, що в некомутативному просторі канонічного типу (у випадку, коли параметри некомутативності θ_{ij} є константами) порушується сферична симетрія [13, 44]. Через існування цієї проблеми запропоновано багато класів сферично-симетричних некомутативних алґебр (для прикладу, [45–47]). Серед них багато праць присвячено дослідженню простору, в якому комутутор координат дорівнює функції цих координат (координатно-залежна некомутативність) [48–53]. Варто зауважити, що алґебри з координатно-залежною некомутативністю є сферично-симетричними, проте вони не еквівалентні до некомутативної алґебри канонічного типу.

У попередніх наших статтях [22, 23] ми запропонували некомутативну алґебру, яка є сферично-симетричною та є еквівалентною некомутативній алґебрі канонічного типу. Така алґебра побудована на основі ідеї побудови тензорів некомутативностей за допомогою додаткових координат, які визначаються сферично-симетричною системою.

У загальному випадку для різних частинок можуть відповідати різні тензори некомутативностей. Тому постає задача визначення тензора некомутативності, який відповідає за рух центра мас системи (макроскопічного тіла).

У цій статті ми розглядаємо проблему опису руху системи частинок у некомутативному просторі зі збереженою сферичною симетрією. Аналізуємо комутаційні співвідношення для координат центра мас, координат відносного руху. Досліджуємо гамільтоніан системи частинок у сферично-симетричному некомутативному просторі.

Другий розділ статті присвячено розгляду некомутативної алґебри, яка еквівалентна до некомутативної алґебри канонічного типу та є сферичносиметричною. У третьому розділі розглянуто систему N частинок та встановлено особливості опису руху системи у сферично-симетричному некомутативному просторі. Четвертий розділ присвячено аналізу гамільтоніана системи частинок у некомутатинвому просторі зі сферичною симетрією.

II. НЕКОМУТАТИВНИЙ ПРОСТІР КАНОНІЧНОГО ТИПУ ЗІ ЗБЕРЕЖЕНОЮ СФЕРИЧНОЮ СИМЕТРІЄЮ

У статті [22] ми розглянули ідею узагальнення параметра некомутативності та запропонували тензор некомутативності, визначений як

$$\theta_{ij} = \frac{\alpha l_{\mathrm{P}}^2}{\hbar} \sum_k \varepsilon_{ijk} \tilde{a}_k. \tag{2}$$

Тут α — безрозмірна константа, l_P — довжина Планка, $\tilde{a}_i$ — додаткові координати, які відповідають сферично-симетричній системі. Ми розглядаємо, що ця система є гармонічним осцилятором

$$H^a_{\mathrm{osc}} = \hbar\omega_{\mathrm{osc}} \left(\frac{(\tilde{p}^a)^2}{2} + \frac{\tilde{a}^2}{2} \right) \tag{3}$$

з одиницею довжини

$$\sqrt{\frac{\hbar}{m_{\mathrm{osc}}\omega_{\mathrm{osc}}}} = l_{\mathrm{P}} \tag{4}$$

та великою частотою ω_{osc}. З огляду на це, відстані між енерґетичними рівнями осцилятора є великими, тому осцилятор, який перебуває в основному стані, залишатиметься в ньому [22].

Отже, ми розглядаємо таку сферично-симетричну некомутативну алґебру:

$$[X_i, X_j] = i\alpha l_{\mathrm{P}}^2 \sum_k \varepsilon_{ijk} \tilde{a}_k, \tag{5}$$

$$[X_i, P_j] = 0, \tag{6}$$

$$[P_i, P_j] = 0. \tag{7}$$

Додаткові координати та імпульси $\tilde{a}_i$, $\tilde{p}^a_i$ задовольняють звичні комутаційні співвідношення $[\tilde{a}_i, \tilde{a}_j] = [\tilde{p}^a_i, \tilde{p}^a_j] = 0$, $[\tilde{a}_i, \tilde{p}^a_j] = i\delta_{ij}$. Також важливо зауважити, що виконуються такі рівності: $[\tilde{a}_i, X_j] = [\tilde{a}_i, P_j] = 0$. Тому оператори X_i, P_i та тензор некомутативності θ_{ij} задовольняють такі самі співвідношення, як у випадку канонічної некомутативності координат $[\theta_{ij}, X_k] = [\theta_{ij}, P_k] = 0$. Отже, можна зробити висновок, що алґебра (5)–(7) еквівалентна до алґебри канонічного типу та є сферично-симетричною [22].

Координати та імпульси, які задовольняють співвідношення (5)–(7), можна записати як

$$X_i = x_i + \frac{1}{2}\sum_j \theta_{ij} p_j = x_i + \frac{\alpha l_P^2}{2\hbar}[\tilde{\mathbf{a}} \times \mathbf{p}]_i, \tag{8}$$

$$P_i = p_i. \tag{9}$$

Тут координати та імпульси x_i, p_i задовольняють звичні комутаційні співвідношення, а токож комутують з операторами $\tilde{a}_i$, $\tilde{p}^a_i$. Те, що координати та імпульси, які задовольняють (5)–(7), можуть бути представлені через координати та імпульси, які задовольняють звичні комутаційні співвідношення, ґарантує виконання тотожності Якобі для довільної трійки операторів.

Після повороту

$$X'_i = U(\varphi) X_i U^+(\varphi), \tag{10}$$

$$a'_i = U(\varphi) a_i U^+(\varphi), \tag{11}$$

де оператор повороту визначений як

$$U(\varphi) = e^{\frac{i\varphi(\mathbf{n}\cdot\mathbf{L^t})}{\hbar}}, \tag{12}$$

та оператор моменту імпульсу має вигляд [24]

$$\mathbf{L^t} = [\mathbf{x} \times \mathbf{p}] + \hbar[\tilde{\mathbf{a}} \times \tilde{\mathbf{p}}^a], \tag{13}$$

комутаційні співвідношення залишаються такими самими. Маємо:

$$[X'_i, X'_j] = i\alpha l_{\mathrm{P}}^2 \sum_k \varepsilon_{ijk} \tilde{a}'_k, \tag{14}$$

$$[X'_i, P'_j] = 0, \tag{15}$$

$$[P'_i, P'_j] = 0. \tag{16}$$

Важливо зауважити, що відповідно до представлення (8), координати X_i залежать від імпульсів і тому залежать від маси. Отже, вони не можуть розглядатися як кінематичні змінні.

Розгляньмо таку умову:

$$\alpha m = \tilde{\gamma} = \mathrm{const}, \tag{17}$$

тут α — константа, яка входить у тензор некомутативності (2), $\tilde{\gamma}$ — константа, яка не залежить від маси. Зауважимо, що у випадку виконання умови (17) некомутативні координати (8) не залежать від маси

$$X_i = x_i + \frac{\tilde{\gamma} l_P^2}{2\hbar} \left[\tilde{\mathbf{a}} \times \frac{\mathbf{p}}{m} \right]_i \tag{18}$$

та можуть розглядатися як кінематичні змінні.

Відповідно до (2), (17) частинкам з різними масами відповідають різні тензори некомутативностей. У зв'язку з цим існує проблема опису руху центра мас системи частинок та знаходження виразу для тензора некомутативності, який відповідає руху центра мас системи. Ці задачі будуть розглянуті в наступному розділі.

III. СИСТЕМА ЧАСТИНОК У СФЕРИЧНО-СИМЕТРИЧНОМУ НЕКОМУТАТИВНОМУ ПРОСТОРІ КАНОНІЧНОГО ТИПУ

Розгляньмо систему, яка складається з N частинок з масами m_n, $n = (1 \dots N)$ у некомутативному просторі зі збереженою сферичною симетрією (5)–(7). Коли координати різних частинок задовольняють комутаційні співвідношення з різними тензорами некомутативності, то можемо записати таку алґебру

$$[X_i^{(n)}, X_j^{(m)}] = i\hbar\delta_{mn}\theta_{ij}^{(n)}, \tag{19}$$

$$[X_i^{(n)}, P_j^{(m)}] = i\hbar\delta_{mn}\delta_{ij}, \tag{20}$$

$$[P_i^{(n)}, P_j^{(m)}] = 0, \tag{21}$$

де індекси $m, n = (1, \dots, N)$ позначають частинки, $\theta_{ij}^{(n)}$ — параметр некомутативності, який відповідає частинці з масою m_n.

Звернімо увагу на те, що додаткові координати відповідають за некомутативність просторових координат. Частинки належать до одного простору, тому ми вважаємо, що додаткові координати $\tilde{a}_k$ є однаковими для різних частинок. Водночас, відповідно до умови (17), різні частинки по-різному відчувають некомутативність координат. Кожній частинці з масою m_n відповідає константа $\alpha^{(n)}$, яка, відповідно до (17), визначається як

$$\alpha^{(n)} = \frac{\tilde{\gamma}}{m_n}. \tag{22}$$

Отже, врахувавши (2), (17), можемо записати

$$\theta_{ij}^{(n)} = \frac{\alpha^{(n)} l_{\mathrm{P}}^2}{\hbar} \sum_k \varepsilon_{ijk}\tilde{a}_k. \tag{23}$$

Дослідімо комутаційні співвідношення для координат та імпульсів центра мас і відносного руху в некомутативному просторі зі збереженою сферичною симетрією. Для операторів

$$\mathbf{P}^c = \sum_n \mathbf{P}^{(n)}, \tag{24}$$

$$\mathbf{X}^c = \sum_n \mu_n \mathbf{X}^{(n)}, \tag{25}$$

$$\mathbf{\Delta P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n)} - \mu_n \mathbf{P}^c, \tag{26}$$

$$\mathbf{\Delta X}^{(n)} = \mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{X}^c, \tag{27}$$

де $\mu_n = m_n/M$, $M = \sum_{n=1}^N m_n$, координати та імпульси $\mathbf{X}^{(n)} = (X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, X_3^{(n)})$ $\mathbf{P}^{(n)} = (P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, P_3^{(n)})$ задовольняють співвідношення (19)–(21), знаходимо

$$[X_i^c, X_j^c] = i\hbar \sum_n \mu_n^2 \theta_{ij}^{(n)}, \tag{28}$$

$$[P_i^c, P_j^c] = 0, \tag{29}$$

$$[X_i^c, P_j^c] = i\hbar\delta_{ij}. \tag{30}$$

$$[\Delta X_i^{(n)}, \Delta X_j^{(m)}]$$

$$= i\hbar\left(\delta_{nm}\theta_{ij}^{(n)} - \mu_n\theta_{ij}^{(n)} - \mu_m\theta_{ij}^{(m)} + \sum_l \mu_l^2\theta_{ij}^{(l)}\right), \tag{31}$$

$$[\Delta P_i^{(n)}, \Delta P_j^{(m)}] = 0, \tag{32}$$

$$[\Delta X_i^{(n)}, \Delta P_j^{(m)}] = i\hbar\delta_{nm}\delta_{ij} \tag{33}$$

$$[X_i^c, \Delta X_j^{(n)}] = i\hbar\left(\mu_n\theta_{ij}^{(n)} - \sum_m \mu_m^2\theta_{ij}^{(m)}\right), \tag{34}$$

$$[P_i^c, \Delta P_j^n] = 0. \tag{35}$$

Із (28) можемо зробити висновок, що рух центра мас системи частинок описується ефективним тензором некомутативності

$$\theta_{ij}^c = \sum_n \mu_n^2\theta_{ij}^{(n)} = \sum_n\sum_k \mu_n^2 \frac{\alpha^{(n)} l_{\mathrm{P}}^2}{\hbar}\varepsilon_{ijk}\tilde{a}_k, \tag{36}$$

тут ми врахували вираз (23).

Звернімо увагу на те, що ефективний параметр некомутативності визначається параметрами некомутативності, що відповідають індивідуальним частинкам, а також їхніми масами. Зважаючи на це, ефективний параметр некомутативності залежить від композиції системи.

Відносний рух описується за допомогою тензорів некомутативностей, визначених як

$$\theta_{ij}^{(n)(m)} = \delta_{nm}\theta_{ij}^{(n)} - \mu_n\theta_{ij}^{(n)} - \mu_m\theta_{ij}^{(m)} + \sum_l \mu_l^2\theta_{ij}^{(l)}. \tag{37}$$

Важливо зауважити, що рух центра мас та відносний рух не є незалежними в некомутативному просторі зі збереженою сферичною симетрією, оскільки координати центра мас не комутують із координатами відносного руху (34).

Зазначимо, що, виконавши умову (17), маємо

$$[X_i^c, \Delta X_j^{(n)}] = 0, \tag{38}$$

$$\theta_{ij}^{(n)} = \frac{\tilde{\gamma} l_{\mathrm{P}}^2}{\hbar m_n}\sum_k \varepsilon_{ijk}\tilde{a}_k, \tag{39}$$

а також ефективний параметр некомутативності визначаємо як

$$\theta_{ij}^c = \frac{\tilde{\gamma} l_{\mathrm{P}}^2}{\hbar M}\sum_k \varepsilon_{ijk}\tilde{a}_k. \tag{40}$$

Бачимо, що ефективний параметр некомутативності не залежить від композиції системи, а — від повної її маси.

Звернімо увагу, що за аналогією до представлення (8), некомутативні координати центра мас системи X_i^c, які задовольняють (28), можна записати так:

$$X_i^c = x_i^c - \frac{1}{2}\sum_j \theta_{ij}^c p_j^c = x_i^c + \sum_n \mu_n^2 \alpha^{(n)} \frac{l_P^2}{2\hbar}[\tilde{\mathbf{a}} \times \mathbf{p}^c]_i, \tag{41}$$

тут ми використали рівність (36), координати x_i^c та імпульси p_i^c задовольняють звичні комутаційні співвідношення.

$$[x_i^c, x_j^c] = [p_i^c, p_j^c] = 0, \tag{42}$$
$$[x_i^c, p_j^c] = i\hbar\delta_{ij}. \tag{43}$$

З іншого боку, врахувавши (8), (23), можемо записати

$$X_i^{(n)} = x_i^n - \frac{1}{2}\sum_j \theta_{ij}^{(n)} p_j^n = x_i^n + \alpha^{(n)} \frac{l_P^2}{2\hbar}[\tilde{\mathbf{a}} \times \mathbf{p}^{(n)}]_i, \tag{44}$$

та, відповідно до означення координат центра мас (25), маємо:

$$X_i^c = \sum_n \mu_n \left(x_i^n - \sum_j \theta_{ij}^{(n)} p_j^n \right) = \sum_n \mu_n x_i^n + \sum_n \mu_n \alpha^{(n)} \frac{l_P^2}{2\hbar}[\tilde{\mathbf{a}} \times \mathbf{p}^{(n)}]_i. \tag{45}$$

Для координат та імпульсів x_i^n, p_i^n виконуються такі рівності:

$$[x_i^{(n)}, x_j^{(m)}] = [p_i^{(n)}, p_j^{(m)}] = 0, \tag{46}$$
$$[x_i^{(n)}, p_j^{(m)}] = i\hbar\delta_{mn}\delta_{ij}. \tag{47}$$

Звернімо увагу, що представлення для некомутативних координат (41) та (45) не однакові навіть у випадку, коли координати та імпульси x_i^c, p_i^c визначаються як $x_i^c = \sum_n \mu_n x_i^{(n)}$, $p_i^c = \sum_n p_i^{(n)}$. Зазначимо також, що представлення (41) забезпечує виконання співвідношень (28)–(30), проте співвідношення (34) порушується. Цікаво зауважити, що виконавши умову (17), маємо рівність виразів (41) та (45). Із (41), (45) отримуємо:

$$X_i^c = x_i^c + \frac{\tilde{\gamma} l_P^2}{2\hbar M}[\tilde{\mathbf{a}} \times \mathbf{p}^c]_i. \tag{48}$$

Вираз для некомутативних координат центра мас (48) забезпечує виконання комутаційних співвідношень (28)–(30), (34) та не залежить від композиції системи.

IV. ГАМІЛЬТОНІАН СИСТЕМИ ЧАСТИНОК У НЕКОМУТАТИВНОМУ ПРОСТОРІ КАНОНІЧНОГО ТИПУ ЗІ ЗБЕРЕЖЕНОЮ СФЕРИЧНОЮ СИМЕТРІЄЮ

Оскільки для побудови сферично-симетричної некомутативної алґебри канонічного типу (19)–(21) залучено додаткові координати, то розглядаючи гамільтоніан у сферично-симетричному некомутативному просторі, необхідно враховувати ці додаткові ступені вільностей, записуючи повний гамільтоніан, як суму гамільтоніана системи $H_{\rm s}$ та гамільтоніана гармонічного осцилятора (3)

$$H = H_{\rm s} + H_{\rm osc}^a. \tag{49}$$

Означивши оператори

$$H_0 = \langle H_{\rm s}\rangle_a + H_{\rm osc}^a \tag{50}$$
$$\Delta H = H - H_0 = H_{\rm s} - \langle H_{\rm s}\rangle_a, \tag{51}$$

можна переписати гамільтоніан (49) в такому вигляді:

$$H = H_0 + \Delta H. \tag{52}$$

У (50), (60) ми використали позначення $\langle \ldots \rangle_a = \langle \psi_{0,0,0}^{(a)} | \ldots | \psi_{0,0,0}^{(a)} \rangle$, де $\psi_{0,0,0}^{(a)}$ — добре відомі хвильові функції тривимірного гармонічного осцилятора $H_{\rm osc}^a$ в основному стані.

Запишімо власні значення та власні функції гамільтоніана H_0. Врахувавши те, що $\langle H_{\rm s}\rangle_a$ та $H_{\rm osc}^a$ комутують, власні значення та власні функції гамільтоніана H_0 можемо записати так

$$\psi_{\{n_{\rm s}\},\{0\}}^{(0)} = \psi_{\{n_{\rm s}\}}^{\rm s} \psi_{0,0,0}^a, \tag{53}$$
$$E_{\{n_{\rm s}\}}^{(0)} = E_{\{n_{\rm s}\}}^s + \frac{3}{2}\hbar\omega_{\rm osc}, \tag{54}$$

де $\psi_{\{n_{\rm s}\}}^{\rm s}$, $E_{\{n_{\rm s}\}}^s$ — власні значення та власні функції гамільтоніана системи $\langle H_{\rm s}\rangle_a$, усередненого за хвильовими функціями гармонічного осцилятора, $\{n_{\rm s}\}$ — квантові числа. У (53), (54) ми врахували те, що осцилятор $H_{\rm osc}^a$ перебуває в основному стані.

Знайдімо поправки до гамільтоніана H_0, зумовлені збуренням ΔH. У першому порядку теорії збурень маємо такі поправки:

$$\Delta E^{(1)} = \langle \psi_{\{n_{\rm s}\}}^{\rm s} \psi_{0,0,0}^a | \Delta H | \psi_{\{n_{\rm s}\}}^{\rm s} \psi_{0,0,0}^a \rangle = \langle \psi_{\{n_{\rm s}\}}^{\rm s} | \langle H_{\rm s}\rangle_a - \langle H_{\rm s}\rangle_a | \psi_{\{n_{\rm s}\}}^{\rm s} \rangle = 0. \tag{55}$$

У другому порядку теорії збурень можемо записати:

$$\Delta E^{(2)} = \sum_{\{n_{\rm s}'\},\{n^a\}} \frac{\left| \left\langle \psi_{\{n_{\rm s}'\},\{n^a\}}^{(0)} \,|\Delta H|\, \psi_{\{n_{\rm s}\},\{0\}}^{(0)} \right\rangle \right|^2}{E_{\{n_{\rm s}'\}}^s - E_{\{n_{\rm s}\}}^s - \hbar\omega_{\rm osc}(n_1^a + n_2^a + n_3^a)}, \tag{56}$$

де квантові числа $\{n'_{\rm s}\}$, $\{n^a\}$ не збігаються з квантовими числами $\{n_{\rm s}\}$,$\{0\}$. Зауважимо, що матричні елементи $\left\langle \psi^{(0)}_{\{n'_{\rm s}\},\{n^a\}} \left|\Delta H\right| \psi^{(0)}_{\{n_{\rm s}\},\{0\}} \right\rangle$ не залежать від частоти осцилятора $\omega_{\rm osc}$, оскільки виконується рівність (4). Враховуючи те, що квантові числа $\{n'_{\rm s}\}$, $\{n^a\}$ не збігаються з квантовими числами $\{n_{\rm s}\}$,$\{0\}$, знаменник усіх доданків у (56) є пропорційним до частоти осцилятора. Нагадаємо, що ми вважаємо частоту осцилятора дуже великою. У границі $\omega_{\rm osc}\to\infty$ маємо

$$\lim_{\omega_{\rm osc}\to\infty}\Delta E^{(2)}=0. \tag{57}$$

Отже, можемо зробити висновок, що з точністю до другого порядку за ΔH гамільтоніан у некомутативному просторі канонічного типу зі збереженою сферичною симетрією можна записати як (50).

Зауважимо, що оператор ΔH можна розглядати як збурення, зумовлене некомутативністю координат. Використавши представлення (8), (9), гамільтоніан системи може бути записаний як

$$H_{\rm s}=H^{(0)}_{\rm s}+V, \tag{58}$$

де $H^{(0)}_{\rm s}$ — гамільтоніан системи у звичному просторі (просторі з комутуючими координатами) $H^{(0)}_{\rm s}=H^{(0)}_{\rm s}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ та V — збурення, зумовлене некомутативністю. Оскільки $H^{(0)}_{\rm s}$ не залежить від координат та імпульсів гармонічного осцилятора $H^a_{\rm osc}$, виконується така рівність:

$$H^{(0)}_{\rm s}-\langle H^{(0)}_{\rm s}\rangle_a=0. \tag{59}$$

Отже, оператор ΔH має вигляд

$$\Delta H=V-\langle V\rangle_a. \tag{60}$$

Розгляньмо конкретний випадок, коли маємо систему N частинок з масами m_i $i=(1,\ldots,N)$ та повний гамільтоніан у такому вигляді:

$$H=\frac{(\mathbf{P}^c)^2}{2M}+U_{\rm ext}(\mathbf{X}^c)+H_{\rm rel}+H^a_{\rm osc}, \tag{61}$$

тут $U_{\rm ext}$ — зовнішнє поле, $H_{\rm rel}$ гамільтоніан відносного руху. Звернімо увагу, що оскільки координати центра мас та координати відносного руху не комутують, маємо $[(\mathbf{P}^c)^2/2M+U_{\rm ext}(\mathbf{X}^c),H_{\rm rel}]\neq0$. Також важливо зауважити, що $[U_{\rm ext}(\mathbf{X}^c),H^a_{\rm osc}]\neq0$ та $[H_{\rm rel},H^a_{\rm osc}]\neq0$. Отже, ми не можемо розглядати рух центра мас та відносний рух незалежно в некомутативному просторі зі збереженою сферичною симетрією.

Як було показано вище, з точністю до $\Delta H^2=(H_{\rm s}-\langle H_{\rm s}\rangle_a)^2$, повний гамільтоніан можна записати у вигляді (50)

$$H_0=\frac{(\mathbf{P}^c)^2}{2M}+\langle U_{\rm ext}(\mathbf{X}^c)\rangle_a+\langle H_{\rm rel}\rangle_a+H^a_{\rm osc}, \tag{62}$$

тут ми врахували те, що кінетична енерґія $(\mathbf{P}^c)^2/2M$ не залежить від коордтинат та імпульсів осцилятора $H^a_{\rm osc}$, тому $\langle(\mathbf{P}^c)^2\rangle_a=(\mathbf{P}^c)^2$. Зауважимо, що перші два доданки в (62), які описують рух центра мас, комутують з $H^a_{\rm osc}$, також $[\langle H_{\rm rel}\rangle_a,H^a_{\rm osc}]=0$. У випадку, коли виконується умова (17), координати центра мас та відносного руху комутують, тому виконуються такі рівності:

$$\left[\frac{(\mathbf{P}^c)^2}{2M}+\langle U_{\rm ext}(\mathbf{X}^c)\rangle_a,H_0\right]=[\langle H_{\rm rel}\rangle_a,H_0]=0. \tag{63}$$

Отже, можемо зробити висновок, що за виконання умови (17) з точністю до другого порядку за ΔH рух центра мас та відносний рух можуть розглядатися незалежно в некомутативному просторі канонічного типу зі збереженою сферичною симетрією.

V. ВИСНОВОК

У статті розглянуто некомутативний простір канонічного типу зі збереженою сферичною симетрією (5)–(7), запропонований у [22]. Ми побудували сферично-симетричну некомутативну алґебру, означивши тензор некомутативності за допомогою додаткових координат, які описуються гармонічним осцилятором (2).

Досліджено проблему опису руху системи частинок у сферично-симетричному некомутативному просторі. У загальному випадку, коли різним частинкам відповідають різні тензори некомутативності, ми проаналізували комутаційні співвідношення для координат центра мас, координат відносного руху. Ми дійшли висновку, що рух центра мас у некомутативному просторі зі збереженою сферичною симетрією описується ефективним тензором некомутативності (36), який залежить від тензорів некомутативності, що відповідають частинкам системи та їхніх мас. Також показано, що координати центра мас та координати відносного руху не комутують. Отже, у некомутативному просторі зі збереженою сферичною симетрією рух центра мас та відносний рух не можуть розглядатися як незалежні.

Ми знайшли умову на параметр α (17), який входить у тензор некомутативності (2), за якої отримуємо низку важливих результатів. А саме, показано, що коли тензор некомутативності, який відповідає частинці, є обернено пропорційним до її маси (39), ефективний тензор некомутативності не залежить від композиції системи (40), координати центра мас та координати відносного руху комутують (38), некомутативні координати не залежать від маси та можуть розглядатися як кінематичні змінні (18). Також показано, що за виконання умови (17) представлення для некомутативних координат центра мас, отримані зі співвідношень некомутативної алґебри (41) та на основі означення (45), співпадають. Звернімо увагу, що з урахуванням (39), умова (17) є подібною до умови на параметр координатної некомутативності $\theta_n m_n=\gamma=\text{const}$, запропонованої в роботах [36, 39, 54, 55]. Зв'язок параметра деформації з масою частинки було запропоновано з метою розв'язання проблем у деформованому просторі з мінімальною довжиною в роботах [42, 43, 56].

В останньому розділі статті ми розглянули гамільтоніан у некомутативному просторі зі збереженою сферичною симетрією. Зважаючи на те, що сферично-симетрична некомутативна алґебра будується із залученням додаткових ступеней вільностей, у сферично-симетричному некомутативному просторі необхідно розглядати повний гамільтоніан (49). Ми показали, що з точністю до другого порядку за ΔH (60) повний гамільтоніан може бути записаним як сума усередненого гамільтоніана системи за хвильовими функціями гармонічного осцилятора в основному стані та гамільтоніана гармонічного осцилятора (50). Ми дійшли висновку, що в цьому наближенні (з точністю до другого порядку за ΔH), за виконання умови (17) рух центра мас та відносний рух є незалежними в некомутативному просторі канонічного типу зі збереженою сферичною симетрією (5)–(7).

ПОДЯКИ

Публікація містить результати досліджень, проведених за підтримки Міністерства освіти та науки України в межах держбюджетних тем ФФ-63Нр (No. 0117U007190), ФФ-30Ф (No. 0116U001539) та за підтримки ДФФД України, проект Ф76/105-2017.

[1] N. Seiberg, E. Witten, J. High Energy Phys. **9909**, 032 (1999).
[2] S. Doplicher, K. Fredenhagen, J.E. Roberts, Phys. Lett. B **331**, 39 (1994).
[3] A. Hatzinikitas, I. Smyrnakis, J. Math. Phys. **43**, 113 (2002).
[4] A. Kijanka, P. Kosinski, Phys. Rev. D **70**, 127702 (2004).
[5] Jing Jian, Jian-Feng Chen, Eur. Phys. J. C **60**, 669 (2009).
[6] A. Smailagic, E. Spallucci, Phys. Rev. D **65**, 107701 (2002).
[7] A. Smailagic, E. Spallucci, J.Phys. A **35**, 363 (2002).
[8] A. E. F. Djemai, H. Smail, Commun. Theor. Phys. **41**, 837 (2004).
[9] P. R. Giri, P. Roy, Eur. Phys. J. C **57**, 835 (2008).
[10] J. Ben Geloun, S. Gangopadhyay, F. G. Scholtz, EPL **86**, 51001 (2009).
[11] D. Nath, P. Roy, Ann. Phys, **377**, 115 (2017).
[12] Pei-Ming Ho, Hsien-Chung Kao, Phys. Rev. Lett. **88** 151602 (2002).
[13] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, Phys. Rev. Lett. **86**, 2716 (2001).
[14] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, Eur. Phys. J. C **36**, 251 (2004).
[15] O. Bertolami, R. Queiroz, Phys. Lett. A **375**, 4116 (2011).
[16] N. Chair, M. A. Dalabeeh, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 1553 (2005).
[17] A. Stern, Phys. Rev. Lett. **100**, 061601 (2008).
[18] S. Zaim, L. Khodja, Y. Delenda, Int. J. Mod. Phys. A **26**, 4133 (2011).
[19] T. C. Adorno, M. C. Baldiotti, M. Chaichian, D. M. Gitman, A. Tureanu, Phys. Lett. B **682**, 235 (2009).
[20] L. Khodja, S. Zaim, Int. J. Mod. Phys. A **27**, 1250100 (2012).
[21] S. A. Alavi, Mod. Phys. Lett. A **22**, 377 (2007).
[22] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A **378**, 3509 (2014).
[23] Kh. P. Gnatenko, Yu. S. Krynytskyi, V. M. Tkachuk, Mod. Phys. Lett. A **30**, 1550033 (2015).
[24] Kh. P. Gnatenko, J. Phys.: Conf. Ser. **670**, 012023 (2016).
[25] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Ukr. J. Phys. **61**, 432 (2016).
[26] M. M. Stetsko, V. M. Tkachuk, Phys. Rev. A **74**, 012101 (2006).
[27] M. M. Stetsko, V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A **372**, 5126 (2008).
[28] Kh. P. Gnatenko, V.M. Tkachuk, Int. J. Mod. Phys. A **32**, 1750161 (2017).
[29] J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, J. C. Rojas, Mod. Phys. Lett. A **16**, 2075 (2001).
[30] P. A. Horvathy, Ann. Phys. **299** 128 (2002).
[31] O. F. Dayi, L. T. Kelleyane, Mod. Phys. Lett. A **17** 1937 (2002).
[32] M. Daszkiewicz, Acta Phys. Polon. B **44**, 699 (2013).
[33] O. Bertolami, J. G. Rosa, C. M. L. de Aragao, P. Castorina, D. Zappala, Phys. Rev. D **72**, 025010 (2005)
[34] C. Bastos, O. Bertolami, Phys. Lett. A **372**, 5556 (2008).
[35] S. Bellucci, A. Yeranyan, Phys. Lett. B **609**, 418 (2005).
[36] Kh. P. Gnatenko, Phys. Lett. A **377**, 3061 (2013).
[37] Kh. P. Gnatenko, J. Phys. Stud. **17**, 4001 (2013).
[38] I. Jabbari, A. Jahan, Z Riazi, Turk. J. Phys. **33**, 149 (2009).
[39] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A **381**, 2463 (2017).
[40] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, J. Phys. Stud. 21, 3001 (2017).
[41] M. Daszkiewicz, C. J. Walczyk, Mod. Phys. Lett. A **26**, 819 (2011).
[42] C. Quesne, V. M. Tkachuk, Phys. Rev. A **81**, 012106 (2010).
[43] V. M. Tkachuk, Phys. Rev. A **86**, 062112 (2012).
[44] A. P. Balachandran, P. Padmanabhan, J. High Energy Phys. **1012**, 001 (2010).
[45] E. F. Moreno, Phys. Rev. D **72**, 045001 (2005).
[46] V. Gáliková, P. Presnajder, J. Phys: Conf. Ser. **343**, 012096 (2012).
[47] R. Amorim, Phys. Rev. Lett. **101**, 081602 (2008).
[48] M. Daszkiewicz, J. Lukierski, M. Woronowicz, Phys. Rev. D **77**, 105007 (2008)
[49] M. Daszkiewicz, J. Lukierski, M. Woronowicz, J. Phys. A: Math. Theor. **42**, 355201 (2009).
[50] A. Borowiec, J. Lukierski, A. Pachol, J. Phys. A: Math. Theor. **47** 405203 (2014).
[51] A. Borowiec, A. Pachol, SIGMA **10**, 107 (2014).
[52] M. Gomes, V. G. Kupriyanov, Phys. Rev. D **79**, 125011 (2009).

[53] V. G. Kupriyanov, J. Phys. A: Math. Theor. **46**, 245303 (2013).
[54] Kh. P. Gnatenko, Mod. Phys. Lett. A **31**, 1650026 (2016).
[55] Kh. P. Gnatenko, Mod. Phys. Lett. A **32**, 1750166 (2017).
[56] V. M. Tkachuk, Found. Phys. **46**, 1666 (2016).

MANY-PARTICLE SYSTEM IN A ROTATIONALLY-INVARIANT SPACE WITH CANONICAL NONCOMMUTATIVITY OF COORDINATES

Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk
Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv,
12, Drahomanov St., Lviv, 79005, Ukraine

The rotationally-invariant noncommutative space with noncommutativity of coordinates of canonical type is studied. The problem of describing the motion of the center-of-mass of a composite system is studied in this space. We find that the motion of the center-of-mass is described with the help of the effective tensor of noncommutativity, which depends on the tensors of noncommutativity of individual particles and on their masses. We show that the motion of the center-of-mass is not independent of the relative motion in a rotationally-invariant noncommutative space. We propose a condition on the parameter in the tensor of coordinate noncommutativity on which noncommutative coordinates can be considered as kinematic variables; the coordinates of the center-of-mass and the coordinates of the relative motion commute; the effective tensor of noncommutativity does not depend on the composition of the system; the representations of the coordinates of the center-of-mass obtained on the basis of their definition and on the basis of the relations of noncommutative algebra are identical. According to this condition, the tensor of coordinate noncommutativity which corresponds to a particle is inversely proportional to its mass. In addition, the Hamiltonian of a system in a noncommutative space with preserved rotational symmetry is analyzed. We show that up to the second order in the ΔH given by (60) one can consider an effective Hamiltonian. This Hamiltonian is constructed by averaging the Hamiltonian of the system over the degrees of freedom of harmonic oscillators.