

ВПЛИВ МІЖЧАСТИНКОВИХ ВЗАЄМОДІЙ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ МАСИВНИХ ВИРОДЖЕНИХ КАРЛИКІВ

М. В. Ваврух, Д. В. Дзіковський, С. В. Смеречинський
*Львівський національний університет імені Івана Франка, кафедра астрофізики,
вул. Кирила і Мефодія, 8, Львів, 79005, Україна
e-mail: mvavruk@gmail.com
(Отримано 30 січня 2018 р.)*

У межах базисного підходу розраховано енергію основного стану однорідної електрон-ядерної моделі за високих густин. Побудовано рівняння стану в наближенні двочастинкових кореляцій релятивістської виродженої однорідної моделі електронів на фоні додатного компенсуючого заряду. Чисельним методом знайдено наближені розв'язки рівняння механічної рівноваги холодного виродженого карлика з осьовим обертанням. Досліджено вплив кулонівських міжчастинкових взаємодій і обертання на характеристики вироджених карликів.

Ключові слова: вироджений карлик, базисний підхід, енергія основного стану, рівняння стану, рівняння механічної рівноваги, кулонівські взаємодії, осьове обертання.

DOI: <https://doi.org/10.30970/jps.22.1901>

PACS number(s): 97.20.Rp, 97.60.Bw, 04.40.Dg

I. ВСТУП

Структура вироджених карликів формується під впливом багатьох чинників, основними з яких є неповне виродження електронної підсистеми, міжчастинкові кулонівські взаємодії, осьове обертання, гравітаційна диференціація речовини вздовж радіуса, магнітні поля та ефекти загальної теорії відносності (ЗТВ). Вплив окремих чинників певною мірою вивчений у межах простих моделей: неповне виродження електронів та спінова поляризація приводить до збільшення мас і радіусів [1–3], осьове обертання — до збільшення маси і сплюснутості [4, 5], міжчастинкові взаємодії — до зменшення маси [6, 7], ефекти ЗТВ дають додаткове обмеження на максимальну масу і порушують стійкість вироджених карликів [8, 9]. У зв'язку з гіпотезою про те, що масивні вироджені карлики можуть бути попередниками наднових типу Ia, а також з огляду на проблему стійкості особливий інтерес становить дослідження масивних вироджених карликів. У цьому випадку вплив неповного виродження електронної підсистеми несуттєвий [1]. Тому характеристики масивних немагнітних вироджених карликів, які ми розглядаємо в цій статті, формуються під впливом двох конкурентних чинників — осьового обертання й кулонівських взаємодій. У роботі [4] розраховано вплив осьового обертання на масу і форму поверхні карлика у межах простої моделі С. Чандрасекара (з рівнянням стану ідеального виродженого релятивістського електронного газу), однак розрахунки виконано в області $0.5 \leq x_0 \leq 6.24$ (де x_0 — параметр релятивізму в центрі зорі), що відповідає карликам

малих і проміжних мас. У роботі [6] одержано рівняння стану електрон-ядерної моделі, що наближено враховує вплив кулонівських взаємодій. Ми розраховали рівняння стану цієї моделі за допомогою альтернативного методу, що узагальнює так званий базисний підхід, розвинутий у сучасній багатоелектронній теорії металів [10], на випадок високих густин матерії. На основі рівняння механічної рівноваги обчислено залежність характеристик вироджених карликів з осьовим обертанням від параметрів моделі. Одержано обмеження на максимальну масу карлика з одночасним урахуванням міжчастинкових кулонівських взаємодій і осьового обертання.

II. РІВНЯННЯ СТАНУ МОДЕЛІ

У роботі [11] розраховано енергію основного стану й рівняння стану за $T = 0$ К для електронейтральної однорідної моделі, що складається з виродженої релятивістської підсистеми N_e електронів в об'ємі V в полі нерухомих ядер, які утворюють просту кубічну ґратку. Параметрами моделі є параметр релятивізму $x = \hbar(m_0c)^{-1}(3\pi^2N_e/V)^{1/3}$, заряд ядра z та безрозмірна ефективна електронна маса $\mu_e = \langle A/z \rangle$, де A — масове число ядра. Така модель є слабо неідеальною, параметром неідеальності щодо міжелектронних взаємодій є стала тонкої структури α_0 , а щодо електрон-ядерних — величина $z\alpha_0$.

Енергію основного стану моделі зображено у вигляді [11]

$$E(x|z) = E_e + \frac{z^2}{2V} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \{S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} - N_n\} \quad (1)$$
$$- \sum_{n \geq 2} \frac{z^n}{n! V^n} \sum_{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n \neq 0} V_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q}_2} \dots V_{\mathbf{q}_n} \delta_{\mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_n, 0} \mu_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) S_{\mathbf{q}_1} \dots S_{\mathbf{q}_n},$$

де E_e — енергія базисної моделі (системи електронів з кулонівськими взаємодіями на фоні компенсуючого рівномірно розподіленого позитивного заряду), $\mu_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$ — статичні границі n -частинкових кореляційних функцій базисної моделі, $V_q = 4\pi e^2/q^2$, N_n — число ядер, $S_{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^{N_n} \exp[i(\mathbf{q}, \mathbf{R}_j)]$ — структурний фактор ядерної підсистеми. Згідно з умовою електронейтральності в сумах за хвильовими векторами відсутні доданки з $\mathbf{q} = 0$, $\mathbf{q}_1 = \dots = \mathbf{q}_n = 0$.

Складник E_e є функцією параметра релятивізму й визначається двочастинковою динамічною кореляційною функцією базисної системи [10]

$$E_e = E_0 + \frac{1}{2\beta V} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} V_q \sum_{\nu} \int_0^1 \mu_2^{(\lambda)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|\nu, -\nu) d\lambda, \quad (2)$$

де E_0 — енергія моделі виродженого релятивістського ідеального електронного газу, а $\mu_2^{(\lambda)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|\nu, -\nu)$ — динамічна двочастинкова кореляційна функція допоміжної моделі — релятивістської системи електронів із потенціалом двочастинкових взаємодій λV_q . У наближенні локального поля [10]

$$\mu_2^{(\lambda)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|\nu, -\nu) = \mu_2^{(0)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|\nu, -\nu) \times \left\{ 1 + \lambda \frac{V_q}{V} \mu_2^{(0)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|\nu, -\nu) [1 - G_{\lambda}(q, \nu)] \right\}^{-1}, \quad (3)$$

де $\mu_2^{(0)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|\nu, -\nu)$ — двочастинкова динамічна кореляційна функція ідеальної моделі електронів, $G_{\lambda}(q, \nu)$ — поправка на локальне поле, $\nu_n = 2\pi n\beta^{-1}$ — частота Бозе-Мацубари ($\beta = (k_B T)^{-1}$ — обернена температура). Для статичних функцій $\mu_2^{(0)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$ та $\mu_3^{(0)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$ знайдено аналітичні зображення, а для динамічної функції $\mu_2^{(0)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|\nu, -\nu)$ — зображення у вигляді однократного інтеграла. Поправка $G_{\lambda}(q, \nu)$ розрахована чисельно у границі слабо неідеальної системи, коли вона не залежить від λ [10].

Виділяючи у формулі (2) внесок першого порядку теорії збурень за взаємодією, одержуємо таке зображення [11]:

$$E_e(x) = N_e m_0 c^2 \{ \varepsilon_0(x) + \alpha_0 \varepsilon_{\text{HF}}(x) + \alpha_0^2 \varepsilon_c(x) \}, \quad (4)$$

де

$$\varepsilon_0(x) = (1 + x^2)^{1/2} - 1 - (2x)^{-3} \mathcal{F}(x) \quad (5)$$

є безрозмірним внеском кінетичної енергії електронів,

$$\mathcal{F}(x) = x(2x^2 - 3)(1 + x^2)^{1/2} + 3 \ln[x + (1 + x^2)^{1/2}], \quad (6)$$

$\varepsilon_{\text{HF}}(x) = -3x/4\pi$ — внесок взаємодій у наближенні Гартрі-Фока, а розраховану чисельно так звану кореляційну енергію можна зобразити таким апроксимативним виразом:

$$\varepsilon_c(x) = -0.5 b_0 \int_0^x \frac{b_1 a + t^{1/2}}{t^{3/2} + b_1 a t + b_2 a^2 t^{1/2} + b_3 a^3} \cdot \frac{1 + a_1 t + a_2 t^2}{1 + c t} dt;$$

$$\begin{aligned} a &= (\alpha_0 \eta)^{1/2}; & \eta &= (9\pi/4)^{1/3}; & b_0 &= 0.0621814; \\ b_1 &= 9.811379; & b_2 &= 2.82214; & b_3 &= 0.69699; \\ a_1 &= 2.25328; & a_2 &= 4.87991; & c &= 0.924022. \end{aligned} \quad (7)$$

У наближенні $a_1 = a_2 = c = 0$ вираз (7) визначає кореляційну енергію базисної моделі в нерелятивістському наближенні, розраховану методом Монте-Карло [12, 13]. За великих значень параметра релятивізму кореляційна енергія нерелятивістської моделі має логарифмічну асимптотику, $\varepsilon_c(x) \rightarrow -\frac{b_0}{2} \ln x$. Як видно зі співвідношення (7), у релятивістському випадку $\varepsilon_c(x)$ має лінійну асимптотику, $\varepsilon_c(x) \rightarrow -b_0 a_2 (2c)^{-1} x = -0.164195x$. Тому в області великих значень параметра релятивізму кожний складник E_e є лінійною функцією x .

Збіжність ряду (1) забезпечується тим, що n -тий член ряду пропорційний α_0^n , а вплив n -частинкових кореляцій у виродженій системі зменшується зі збільшенням n . Тому в роботі [11] ми обмежились урахуванням дво- і тричастинкових кореляцій. Використаний у цій статті спосіб розрахунку внесків електрон-ядерних взаємодій ґрунтувався на виділенні внесків, зумовлених дво- та тричастинковими кореляціями, до ефективних двоядерних взаємодій.

Після обчислення координатного зображення потенціалів ефективних взаємодій використовували розрахунок їх внеску до енергії моделі підсумовуванням за координативними сферами в R -просторі. У результаті енергія основного стану моделі отримала таке зображення:

$$E = E_e(x) + E_{\text{pol}}(x|z) + E_L(x|z), \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} E_{\text{pol}}(x|z) &= -N_e \sum_{n \geq 2} \frac{z^{n-1}}{n! V^n} \\ &\times \sum_{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n \neq 0} V_{\mathbf{q}_1} \cdots V_{\mathbf{q}_n} \mu_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \end{aligned} \quad (9)$$

є енергією поляризації базисної моделі, яка адитивна щодо числа ядер і не залежить від типу кристалічної ґратки. $E_L(x|z)$ є енергією ефективних (екранованих) двочастинкових між'ядерних взаємодій, потенціали яких обчислено з урахуванням внесків дво- та тричастинкових електронних кореляцій. Цей спосіб громіздкий і пов'язаний з можливим накопиченням похибок обчислень.

У цій праці ми використовуємо інший спосіб обчислення внесків кулонівських двоядерних та електрон-ядерних взаємодій. Як відомо, електростатичну енергію позитивних точкових зарядів, що утворюють кристалічну ґратку, за наявності негативного компенсуючого фону (другий доданок у формулі (1))

можна розрахувати за методом Евальда-Фукса [14-16]

$$E_c(x|z) = -\frac{N_n \alpha}{2r_0} z^2 e^2 = -N_e m_0 c^2 \frac{\alpha}{2\eta} \alpha_0 x z^{2/3}, \quad (10)$$

де $r_0 = (3V/4\pi N_n)^{1/3}$, а α — стала Маделунга. Оскільки $S_{\mathbf{q}} = N_n \sum_{l \neq 0} \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{K}_l}$, то розрахунок енергії зонної структури (третьої доданок у формулі (1)) зводиться до обчислення сум за ненульовими векторами оберненої ґратки \mathbf{K}_l .

Ми виконали розрахунки для кубічної об'ємноцентрованої ґратки ядерної підсистеми. Внесок двочастинкових електронних кореляцій

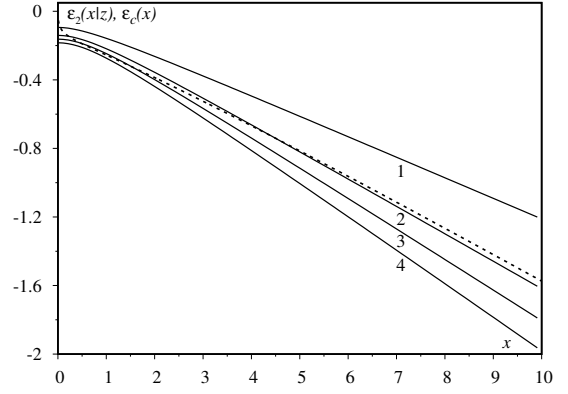


Рис. 1. Залежність функції $\varepsilon_2(x|z)$ від параметра релятивізму та заряду ядра (крива 1 — $z = 2$; 2 — $z = 6$; 3 — $z = 12$; 4 — $z = 26$). Штрихова лінія — $\varepsilon_c(x)$.

$$-\frac{z^2}{2!V^2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} V_{\mathbf{q}}^2 \mu_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} = N_e m_0 c^2 \alpha_0^2 z^{4/3} \varepsilon_2(x|z), \quad (11)$$

$$\varepsilon_2(x|z) = -\frac{3^{1/3}}{2\pi^{10/3}} \sum_{j \geq 1} \frac{N_j}{j^2} J_2(q_j|x) \left\{ 1 + \alpha_0 J_2(q_j|x) (\pi x j)^{-1} \left(\frac{3z}{\pi} \right)^{2/3} [1 - G(q_j|x)] \right\}^{-1},$$

де $J_2(q|x) \equiv (3N_e)^{-1} m_0 c^2 \mu_2^{(0)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$ — безрозмірний множник статичної двочастинкової кореляційної функції моделі ідеального релятивістського електронного газу [11], $q_j = 2j^{1/2}(\pi/3z)^{1/3}$.

З високою точністю функцію $\varepsilon_2(x|z)$ можна апроксимувати виразом

$$\varepsilon_2(x|z) = z^{1/6} \varepsilon_2(x), \quad (12)$$

$$\varepsilon_2(x) = -\{c_0 + c_1 x + c_2 x^2\} \{1 + d_1 x\}^{-1},$$

якщо $c_0 = 0.10582$, $c_1 = 0.11136$, $c_2 = 0.15535$, $d_1 = 1.29493$. Внесок тричастинкових кореляцій є малим, пропорційним α_0^3 , і ми не будемо його враховувати.

У цьому наближенні енергія основного стану моделі має зображення

$$E = N_e m_0 c^2 \left\{ \varepsilon_0(x) - \alpha_0 \left[\frac{3}{4\pi} + \frac{\alpha}{2\eta} z^{2/3} \right] x + \alpha_0^2 \left[\varepsilon_c(x) + z^{4/3} \varepsilon_2(x|z) \right] \right\}. \quad (13)$$

Функції $\varepsilon_c(x)$ і $\varepsilon_2(x|z)$ мають однаковий порядок величини, що видно з рис. 1.

Аналітичні зображення складників енергії основного стану дають змогу розрахувати тиск у холодній електрон-ядерній моделі за співвідношенням

$$P(x|z) = -\frac{dE(x|z)}{dV} = \frac{x^4}{N_e} \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^3 \frac{1}{9\pi^2} \cdot \frac{dE(x|z)}{dx} = \frac{\pi m_0^4 c^2}{3\hbar^3} \{ \mathcal{F}(x) - f(x|z) \}, \quad (14)$$

де $\mathcal{F}(x)$ є внеском ідеальної моделі електронів (див. ф. (6)), а $f(x|z) > 0$ зумовлено міжчастинковими взаємодіями:

$$f(x|z) = \alpha_0 \left\{ \frac{2}{\pi} + \frac{4\alpha}{3\eta} z^{2/3} \right\} x^4 - \frac{8}{3} \alpha_0^2 \left\{ \frac{d\varepsilon_c(x)}{dx} + z^{4/3} \frac{d\varepsilon_2(x|z)}{dx} \right\} x^4. \quad (15)$$

За малих значень заряду ядра z внесок другого доданка у виразі (15) малий, проте за великих z він сумірний з доданком, пропорційним α_0 .

Незважаючи на те, що Е. Солпітер використав інший підхід та інші наближення (кореляційна енер-

гія для нерелятивістської моделі, рівняння Томаса-Фермі для врахування електрон-ядерних взаємодій та ін.), тиск, який ми обчислювали, близький до знайденого в роботі [6], що ілюструє табл. 1, у якій наведено величину $f(x|z)/\mathcal{F}(x)$ для $z = 2, 6, 12, 26$.

x_0	$f(x z)/\mathcal{F}(x)$							
	$z = 2$		$z = 6$		$z = 12$		$z = 26$	
	[6]	*	[6]	*	[6]	*	[6]	*
0.5	0.0235	0.0260	0.0449	0.0474	0.0692	0.0717	0.1140	0.1166
1.0	0.0119	0.0156	0.0248	0.0285	0.0395	0.0431	0.0668	0.0703
1.2	0.0102	0.0141	0.0218	0.0257	0.0316	0.0399	0.0599	0.0636
1.4	0.0091	0.0131	0.0199	0.0239	0.0323	0.0362	0.0553	0.0592
1.6	0.0083	0.0124	0.0186	0.0226	0.0303	0.0343	0.0521	0.0560
1.8	0.0078	0.0119	0.0176	0.0217	0.0289	0.0329	0.0489	0.0538
2.0	0.0074	0.0115	0.0169	0.0210	0.0279	0.0319	0.0481	0.0520
2.5	0.0068	0.0109	0.0158	0.0199	0.0262	0.0301	0.0454	0.0493
3.0	0.0065	0.0105	0.0152	0.0192	0.0252	0.0292	0.0438	0.0477
4.0	0.0062	0.0101	0.0147	0.0185	0.0243	0.0281	0.0415	0.0460
5.0	0.0061	0.0010	0.0144	0.0182	0.0239	0.0276	0.0415	0.0451
7.5	0.0061	0.0098	0.0142	0.0178	0.0235	0.0270	0.0408	0.0442
10.0	—	0.0097	—	0.0177	—	0.0269	—	0.0439
15.0	—	0.0096	—	0.0176	—	0.0267	—	0.0437
20.0	—	0.0096	—	0.0176	—	0.0267	—	0.0436
25.0	—	0.0096	—	0.0176	—	0.0267	—	0.0436

Таблиця 1. Залежність відношення $f(x|z)/\mathcal{F}(x)$ від параметра релятивізму та заряду ядра.

III. РІВНЯННЯ МЕХАНІЧНОЇ РІВНОВАГИ

У рівнянні механічної рівноваги карлика з осьовим обертанням

$$\nabla P(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}) \{ \nabla \Phi_{\text{grav}}(\mathbf{r}) + \nabla \Phi_c(\mathbf{r}) \} \quad (16)$$

фігурують як гравітаційний потенціал

$$\Phi_{\text{grav}}(\mathbf{r}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (17)$$

так і відцентровий $\Phi_c(\mathbf{r})$. Тут $P(\mathbf{r})$ — тиск у точці, що визначається радіус-вектором \mathbf{r} , а $\rho(\mathbf{r})$ — густина речовини в цій точці. У сферичній системі координат, вісь OZ (вісь обертання) якої проходить через центр мас зорі,

$$\Phi_c(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (18)$$

де ω — стала кутова швидкість, θ — полярний кут. Ми вважаємо, що густина має осьову симетрію, $\rho(\mathbf{r}) \equiv \rho(r, \theta)$. Враховуючи, що

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{m_u \mu_e}{3\pi^2 \hbar^3} (m_0 c)^3 x(\mathbf{r}), \quad (19)$$

де m_u — атомна одиниця маси, а

$$x(\mathbf{r}) = \hbar (m_0 c)^{-1} (3\pi^2 n(\mathbf{r}))^{1/3} \quad (20)$$

— локальне значення параметра релятивізму, та замінюючи параметр x у формулах (14), (15) на $x(\mathbf{r})$, одержуємо нелінійне диференціальне рівняння для параметра релятивізму:

$$\begin{aligned} \Delta\{[1+x^2(\mathbf{r})]^{1/2}-1\} &= \frac{2\omega^2 m_u \mu_e}{m_0 c^2} - D x^3(\mathbf{r}) + \frac{1}{8x^3(\mathbf{r})} \left\{ \frac{d}{dx(\mathbf{r})} f(x(\mathbf{r})|z) \right\} \Delta x(\mathbf{r}) \\ &+ \frac{1}{8} \left\{ \frac{d}{dx(\mathbf{r})} \cdot \frac{1}{x^3(\mathbf{r})} \cdot \frac{d}{dx(\mathbf{r})} f(x(\mathbf{r})|z) \right\} (\nabla x(\mathbf{r}))^2; \\ D &\equiv \frac{32\pi^2 G}{3(hc)^3} (m_u \mu_e m_0 c^2)^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Тут

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_\theta \quad (22)$$

— оператор Лапласа, що складається з радіальної та кутової компонент,

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right); \quad (23)$$

$$\Delta_\theta = \frac{\partial}{\partial t} (1-t^2) \frac{\partial}{\partial t}; \quad t \equiv \cos \theta.$$

З метою чисельного розв'язування рівняння рівноваги введемо безрозмірні змінні

$$\xi = r/\lambda, \quad Y(\xi, \theta) = \varepsilon_0^{-1} \{ [1+x^2(\mathbf{r})]^{1/2} - 1 \}, \quad (24)$$

а також безрозмірну кутову швидкість Ω за співвідношенням

$$\Omega^2 = \frac{2\omega^2 m_u \mu_e}{m_0 c^2 \varepsilon_0} \lambda^2, \quad (25)$$

де $\varepsilon_0 \equiv \varepsilon_0(x_0) = \{ [1+x_0^2]^{1/2} - 1 \}$, $x_0 \equiv x(0)$. Масштаб довжини λ визначимо співвідношенням

$$\frac{32\pi^2 G}{3(hc)^3} (m_u \mu_e m_0 c^2 \lambda \varepsilon_0)^2 = 1. \quad (26)$$

У безрозмірних змінних рівняння рівноваги трансформується до такої форми:

$$\Delta(\xi, \theta) Y(\xi, \theta) = \Omega^2 - \Gamma^3(\xi, \theta) + \varphi_1(\xi, \theta|z) \Delta(\xi, \theta) \Gamma(\xi, \theta) + \varphi_2(\xi, \theta|z) \left\{ \left(\frac{\partial \Gamma(\xi, \theta)}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1-t^2}{\xi^2} \left(\frac{\partial \Gamma(\xi, \theta)}{\partial t} \right)^2 \right\}; \quad (27)$$

$$\Gamma(\xi, \theta) = \left\{ Y^2(\xi, \theta) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y(\xi, \theta) \right\}^{1/2}.$$

Тут використано такі позначення:

$$\Delta(\xi, \theta) = \Delta_\xi + \frac{1}{\xi^2} \Delta_\theta; \quad \Delta_\xi = \frac{1}{\xi^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \right);$$

$$\varphi_1(\xi, \theta|z) = \frac{1}{8x^3} \cdot \frac{df(x|z)}{dx} \Big|_{x=x(\xi, \theta)}; \quad (28)$$

$$\varphi_2(\xi, \theta|z) = \frac{\varepsilon_0}{8} \cdot \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{x^3} \cdot \frac{df(x|z)}{dx} \right\} \Big|_{x=x(\xi, \theta)},$$

де $x(\xi, \theta) = \varepsilon_0 \Gamma(\xi, \theta)$. Трипараметричному двовимірному рівнянню в частинних похідних (27), яке враховує вплив конкурентних факторів — осьового обертання й кулонівських взаємодій, відповідають граничні умови

$$\begin{aligned} Y(0, \theta) &= 1; \quad \frac{\partial}{\partial \xi} Y(\xi, \theta) = 0 \\ \text{при } \xi &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

IV. ВИРОДЖЕНІ КАРЛИКИ БЕЗ ОСЬОВОГО ОБЕРТАННЯ

Насамперед розглянемо вплив міжчастинкових взаємодій, властивих усім карликам, покладаючи $\Omega = 0$. У цьому випадку є сферична симетрія розподілу речовини й рівняння рівноваги спрощується до звичайного диференціального рівняння другого порядку, яке одержуємо з рівняння (27) заміною $Y(\xi, \theta) \rightarrow y(\xi)$,

$$\Delta_\xi y(\xi) = - \left\{ y^2(\xi) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi) \right\}^{3/2} + \varphi_1(\xi|z) \Delta_\xi \left\{ y^2(\xi) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi) \right\}^{1/2} + \varphi_2(\xi|z) \left\{ \frac{d}{d\xi} \left[y^2(\xi) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi) \right]^{1/2} \right\}^2. \quad (30)$$

У цьому рівнянні фігурують параметри x_0 і z , а функції $\varphi_i(\xi|z)$ визначаються формулами (28), у яких потрібно зробити заміну $x \Rightarrow \varepsilon_0 \left(y^2(\xi) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi) \right)^{1/2}$. Регулярним розв'язкам рівняння (30) відповідають умови $y(0) = 1$, $dy(\xi)/d\xi = 0$ за $\xi = 0$. Умова $y(\xi) = 0$ визначає безрозмірний радіус зорі $\xi_1(x_0|z)$. За $\varphi_1(\xi|z) = \varphi_2(\xi|z) = 0$ рівняння стає однопараметричним рівнянням рівноваги моделі С.Чандрасекара (стандартної моделі) у змінних ξ , $y_{Ch}(\xi) = \varepsilon_0^{-1}([1 + x^2(r)]^{1/2} - 1)$. Відмінність розв'язків рівняння (30) від розв'язків стандартної моделі ілюструє рис. 2. Залежність $\xi_1(x_0|z)$ від параметрів x_0 і z наведено в табл. 2. Як видно з цієї таблиці, відносне зменшення радіуса з урахуванням міжчастинкових взаємодій $\{\xi_1(x_0) - \xi_1(x_0|z)\}(\xi_1(x_0))^{-1}$ становить 0.7% за $z = 2$, 1.2% за $z = 6$, 1.85% за $z = 12$ і 3% за $z = 26$.

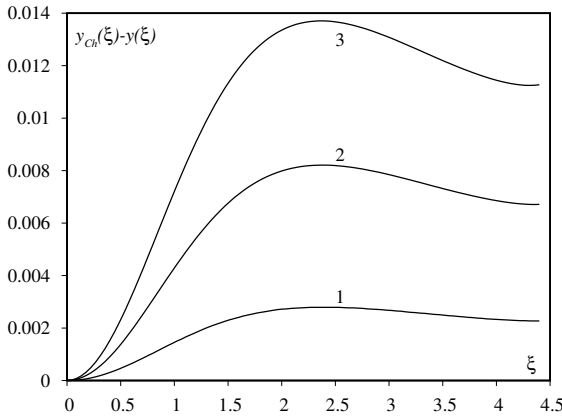


Рис. 2. Залежність відхилення $y_{Ch}(\xi) - y(\xi)$ від ξ та ряду ядра z (крива 1 — $z = 2$; 2 — $z = 12$; 3 — $z = 26$).

Масу й радіус зорі, що є функціями параметрів μ_e , z та x_0 , визначаємо співвідношеннями

$$M(x_0|\mu_e|z) = \frac{M_0}{\mu_e^2} \mathcal{M}(x_0|z),$$

$$\mathcal{M}(x_0|z) = \int_0^{\xi_1(x_0|z)} \left\{ y^2(\xi) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi) \right\}^{3/2} \xi^2 d\xi, \quad (31)$$

$$R(x_0|\mu_e|z) = \frac{R_0}{\mu_e} \cdot \frac{\xi_1(x_0|z)}{\varepsilon_0},$$

де масштабами маси й радіуса є комбінації універсальних сталих

$$M_0 = \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{hc}{Gm_u^2} \right)^{3/2} m_u, \quad (32)$$

$$R_0 = \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{h^3}{cG} \right)^{1/2} \frac{1}{m_0 m_u},$$

що мають такі числові значення:

$$M_0 = 5.740247 \cdot 10^{33} \text{ г} \approx 2.88695 M_\odot; \quad (33)$$

$$R_0 = 0.776885 \cdot 10^9 \text{ см} = 1.11623 \cdot 10^{-2} R_\odot.$$

Залежність величини $\mathcal{M}(x_0|z)$ від своїх параметрів показує табл. 3, де наведено також безрозмірну масу стандартної моделі $\mathcal{M}(x_0)$. Відносне зменшення маси за рахунок міжчастинкових взаємодій $\{\mathcal{M}(x_0) - \mathcal{M}(x_0|z)\}(\mathcal{M}(x_0))^{-1}$ в області $x_0 \geq 10$ становить приблизно 1.4% при $z = 2$, 2.7% при $z = 6$, 4.1% при $z = 12$, 7% при $z = 26$ (див. табл. 3).

x_0	$\xi_1(x_0)$	$\xi_1(x_0 z)$			
		$z = 2$	$z = 6$	$z = 12$	$z = 26$
1.0	1.03401	1.00101	0.98801	0.97401	0.94801
2.0	2.06001	2.02501	2.00601	1.98501	1.94801
3.0	2.78201	2.74601	2.72401	2.70001	2.65601
4.0	3.30701	3.27001	3.24701	3.22001	3.17201
5.0	3.70701	3.67001	3.64501	3.61701	3.56601
6.0	4.02301	3.98601	3.96001	3.93101	3.87801
7.0	4.28001	4.24301	4.21701	4.18701	4.13201
8.0	4.49301	4.45601	4.43001	4.39901	4.34401
9.0	4.67401	4.63701	4.61001	4.57901	4.52201
10.0	4.82801	4.79101	4.76401	4.73301	4.67601
15.0	5.35801	5.32201	5.29401	5.26301	5.20301
20.0	5.67001	5.63501	5.60701	5.57501	5.51501
25.0	5.87701	5.84201	5.81401	5.78201	5.72201
30.0	6.02401	5.98901	5.96101	5.92901	5.86901

Таблиця 2. Залежність безрозмірного радіуса зорі $\xi_1(x_0|z)$ від параметрів x_0 і z ($\xi_1(x_0)$ відповідає стандартній моделі).

x_0	$\mathcal{M}(x_0)$	$\mathcal{M}(x_0 z)$			
		$z = 2$	$z = 6$	$z = 12$	$z = 26$
1.0	0.707066	0.689037	0.673304	0.65581	0.624491
2.0	1.24303	1.22092	1.20126	1.17904	1.13834
3.0	1.51862	1.49465	1.47331	1.44912	1.4045
4.0	1.67141	1.64646	1.62426	1.59907	1.55247
5.0	1.76395	1.73843	1.71573	1.68996	1.64222
6.0	1.82404	1.79816	1.77515	1.74901	1.70056
7.0	1.86521	1.83909	1.81586	1.78948	1.74054
8.0	1.89462	1.86832	1.84495	1.81839	1.76911
9.0	1.91634	1.88992	1.86645	1.83976	1.79023
10.0	1.93284	1.90633	1.88277	1.85599	1.80626
15.0	1.97619	1.94943	1.92567	1.89863	1.84839
20.0	1.99337	1.96651	1.94268	1.91554	1.86508
25.0	2.00186	1.97495	1.95108	1.92389	1.87331
30.0	2.00665	1.97972	1.95583	1.92861	1.87795

Таблиця 3. Залежність безрозмірної маси зорі $\mathcal{M}(x_0|z)$ від параметрів x_0 , z ($\mathcal{M}(x_0)$ відповідає стандартній моделі).

Через те, що в області проміжних та великих значень параметра x функція $f(x|z)$ приблизно пропорційна до x^4 , то вираз $x^{-3}df/dx$ близький до сталої величини, а його похідна щодо x є малою. Це дає змогу одержати наближену оцінку характеристик без чисельного розв'язування рівняння (30). Оскільки в ядрі масивного карлика $x(r)$ близьке до значення x_0 , то у другому доданку правої частини рівняння (30) множник $(2x(r))^{-3}df/dx$ можна замінити на $\varphi_1(x_0|z) = (2x_0)^{-3}df(x_0|z)/dx_0$ і знехтувати доданком, пропорційним до $(\nabla x(r))^2$. Уводячи нову безрозмірну координату $\eta = \xi/k$ за $k = [1 - \varphi_1(x_0|z)]^{1/2}$, зведемо рівняння (30) до рівняння стандартної моде-

лі. У такому наближенні розв'язком рівняння (30) є

$$\tilde{y}(\xi) \simeq y_{\text{Ch}}(k\xi), \quad \tilde{\xi}_1(x_0|z) \simeq k\xi_1(x_0), \quad (34)$$

$$\tilde{\mathcal{M}}(x_0|z) \simeq k^3 \mathcal{M}(x_0),$$

де $y_{\text{Ch}}(\xi)$ — розв'язок рівняння стандартної моделі при заданому x_0 , а $\xi_1(x_0)$ та $\mathcal{M}(x_0)$ характеристики цієї моделі. Як видно з табл. 4, величина $\tilde{\mathcal{M}}(x_0|z)$ відрізняється від $\mathcal{M}(x_0|z)$, знайденої чисельним інтегруванням рівняння (30), на мізерну величину, а відносне відхилення $\tilde{\xi}_1(x_0|z)$ від $\xi_1(x_0|z)$ не більше за 0.4%.

x_0	$\tilde{\mathcal{M}}(x_0 z)$				$\tilde{\xi}_1(x_0 z)$			
	$z = 2$	$z = 6$	$z = 12$	$z = 26$	$z = 2$	$z = 6$	$z = 12$	$z = 26$
1.0	0.698071	0.689712	0.680305	0.663335	1.03067	1.02654	1.02185	1.01328
2.0	1.22614	1.21149	1.19504	1.16539	2.05071	2.04251	2.03323	2.01627
3.0	1.49846	1.48056	1.46048	1.42434	2.76986	2.75879	2.74626	2.72342
4.0	1.64937	1.62967	1.60756	1.5678	3.29291	3.27975	3.26485	3.23771
5.0	1.74063	1.71984	1.6965	1.65452	3.69122	3.67647	3.65977	3.62933
6.0	1.79981	1.77832	1.75418	1.71075	4.00587	3.98986	3.97173	3.93868
7.0	1.84033	1.81835	1.79366	1.74923	4.26151	4.24447	4.22518	4.19000
8.0	1.86927	1.84694	1.82186	1.77671	4.47378	4.4559	4.43563	4.39868
9.0	1.89065	1.86807	1.84269	1.79701	4.65315	4.63455	4.61347	4.57502
10.0	1.9069	1.88412	1.85852	1.81242	4.80689	4.78768	4.7659	4.72616
15.0	1.94967	1.92639	1.9002	1.853	5.33474	5.31341	5.28922	5.24507
20.0	1.9667	1.9432	1.91678	1.86913	5.64552	5.62295	5.59735	5.55058
25.0	1.97512	1.95153	1.92498	1.8771	5.85091	5.82752	5.80097	5.75247
30.0	1.97988	1.95623	1.92961	1.8816	5.99691	5.97294	5.94573	5.896

Таблиця 4. Залежність $\tilde{\mathcal{M}}(x_0|z)$ та $\tilde{\xi}_1(x_0|z)$ від параметра релятивізму та заряду ядра.

V. ВИРОДЖЕНІ КАРЛИКИ З ОСЬОВИМ ОБЕРТАННЯМ

Згідно з викладеним у попередньому розділі наближений спосіб урахування поправки на взаємодію в рівнянні стану еквівалентний вибору масштабу довжини $\tilde{\lambda}$, який потрібно визначати співвідношенням

$$\frac{32\pi^2 G}{3(hc)^3} (m_u \mu_e \varepsilon_0 m_0 c^2 \tilde{\lambda})^2 = 1 - \varphi_1(x_0|z), \quad (35)$$

замість співвідношення (26). У цьому наближенні рівняння (28) спрощується і набуває вигляду

$$\Delta(\xi, \theta) Y(\xi, \theta) = \tilde{\Omega}^2 - \left\{ Y^2(\xi, \theta) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y(\xi, \theta) \right\}^{3/2}, \quad (36)$$

але при цьому перенормовується параметр кутової швидкості,

$$\tilde{\Omega}^2 = \frac{2\omega^2 m_u \mu_e}{m_0 c^2 \varepsilon_0} \tilde{\lambda}^2. \quad (37)$$

Порядок величини цього параметра можна оцінити за допомогою масштабів (33),

$$\tilde{\Omega}^2 = \frac{2}{\mu_e} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon_0^3} (1 - \varphi_1(x_0|z)), \quad (38)$$

де $\omega_0^2 = GM_0 R_0^{-3}$. Згідно зі співвідношеннями (31) максимальне значення ω^2

$$\omega_{\text{max}}^2 \approx G \frac{\mathcal{M}(x_0|\mu_e|z)}{R^3(x_0|\mu_e|z)}, \quad (39)$$

тому

$$\tilde{\Omega}_{\text{max}}^2 \approx 2 \frac{\mathcal{M}(x_0|z)}{\xi_1^3(x_0|z)} (1 - \varphi_1(x_0|z)). \quad (40)$$

Звідси випливає, що в ультрарелятивістській границі $\tilde{\Omega}_{\text{max}}^2$ має порядок 10^{-2} .

Відповідно до умов (29) розв'язок рівняння (36) в області малих значень ξ можна зобразити рядом

$$Y(\xi, \theta) = 1 + \xi^2(a_2 + b_2\tilde{\Omega}^2 \sin^2 \theta) + \xi^4(a_4 + b_4\tilde{\Omega}^2 \sin^2 \theta) + \dots, \quad (41)$$

де

$$a_2 = -\frac{1}{6} \left(1 + \frac{2}{\varepsilon_0}\right)^{3/2}; \quad b_2 = \frac{1}{4}; \quad b_4 = -\frac{3}{56} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_0}\right) \left(1 + \frac{2}{\varepsilon_0}\right)^{1/2};$$

$$a_4 = \frac{1}{40} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_0}\right) \left(1 + \frac{2}{\varepsilon_0}\right)^2 + \frac{3}{280} \tilde{\Omega}^2 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_0}\right) \left(1 + \frac{2}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}; \dots \quad (42)$$

Для розв'язування рівняння (36) чисельним методом доцільно перейти від функції $Y(\xi, \theta)$ до допоміжної функції

$$\varphi(\xi, \theta) = Y(\xi, \theta) - \delta(\xi, \theta), \quad (43)$$

де $\delta(\xi, \theta) = \frac{1}{4} \tilde{\Omega}^2 \xi^2 \sin^2 \theta$. Оскільки $\Delta(\xi, \theta) \{\xi^2 \sin^2 \theta\} = 4$, то рівняння для $\varphi(\xi, \theta)$ набуває вигляду

$$\Delta(\xi, \theta) \varphi(\xi, \theta) = - \left\{ [\varphi(\xi, \theta) + \delta(\xi, \theta)]^2 + \frac{2}{\varepsilon_0} [\varphi(\xi, \theta) + \delta(\xi, \theta)] \right\}^{3/2}. \quad (44)$$

Поверхня зорі в цьому наближенні визначається умовою

$$\varphi(\xi, \theta) + \delta(\xi, \theta) = 0, \quad (45)$$

а умови

$$\varphi\left(\xi, \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\xi, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (46)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ \varphi(\xi, \theta) + \delta\left(\xi, \frac{\pi}{2}\right) \right\} = 0$$

визначають максимально допустиме значення безрозмірного параметра $\tilde{\Omega}_{\max}(x_0)$ і відповідне йому значення безрозмірного екваторіального радіуса $\xi_e^{\max}(x_0)$. За $\tilde{\Omega} > \tilde{\Omega}_{\max}(x_0)$ порушується стійкість зорі: густина речовини перестає бути монотонно спадною функцією координати ξ в околі екватора.

Через те, що за малих значень змінної ξ функція $\varphi(\xi, \theta)$ пропорційна до ξ^2 , то граничні умови для $\varphi(\xi, \theta)$ такі ж, як і для $Y(\xi, \theta)$. Згідно з розкладом (41) в області малих значень ξ

$$\varphi(\xi, \theta) = 1 + a_2 \xi^2 + \xi^4(a_4 + b_4 \tilde{\Omega}^2 \sin^2 \theta) + \dots, \quad (47)$$

звідки випливає, що функція $\varphi(\xi, \theta)$ значно менш залежна від змінної θ (і від параметра $\tilde{\Omega}^2$), ніж $Y(\xi, \theta)$. Цей факт дозволяє легко знайти наближений розв'язок рівняння (44) чисельним методом. Нехтуючи доданком $\xi^{-2} \Delta_\theta \varphi(\xi, \theta)$, одержуємо звичайне одновимірне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \varphi_0(\xi, \theta) + \frac{2}{\xi} \cdot \frac{d}{d\xi} \varphi_0(\xi, \theta)$$

$$= - \left\{ [\varphi_0(\xi, \theta) + \delta(\xi, \theta)]^2 + \frac{2}{\varepsilon_0} [\varphi_0(\xi, \theta) + \delta(\xi, \theta)] \right\}^{3/2}, \quad (48)$$

у якому змінна θ відіграє роль параметра і розв'язок якого є нульовим наближенням для функції $\varphi(\xi, \theta)$.

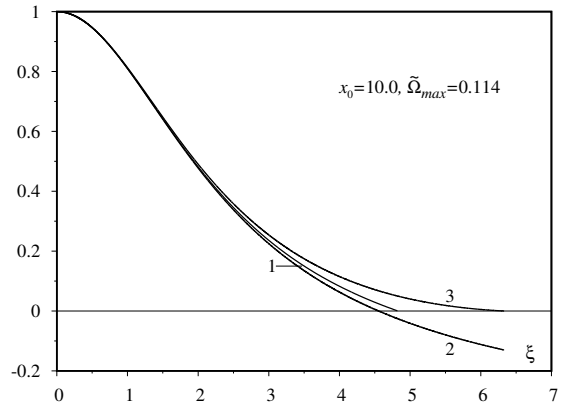
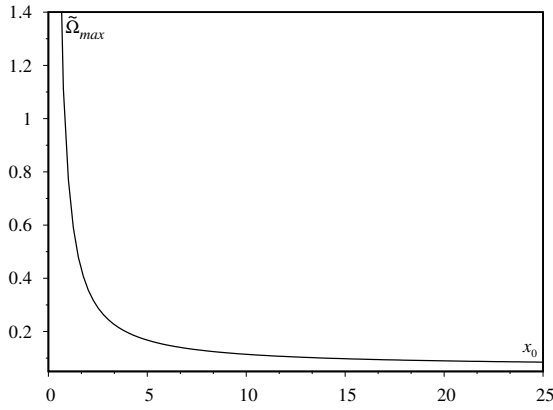


Рис. 3. Крива 2 — розв'язок рівняння (48) при значенні параметра релятивізму $x_0 = 10$, максимальній швидкості обертання $\tilde{\Omega}_{\max}$ і $\theta = \pi/2$; крива 3 — функція $Y(\xi, \pi/2)$; крива 1 відповідає стандартній моделі.

На рис. 3 зображено функції $\varphi_0(\xi, \theta)$ та $Y(\xi, \theta)$ за $\theta = \pi/2$ і $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_{\max}(x_0)$, а також функцію $y(\xi) \equiv \varphi_0(\xi, \theta)$ при $\tilde{\Omega} = 0$. Як видно з рисунка, екваторіальний радіус значно перевищує радіус карлика без обертання, однак у цьому наближенні полярний радіус (якщо $\theta = 0$) дорівнює радіусу зорі без обертання. Крім параметра θ , у рівнянні (48) фігурують ще два параметри — x_0 та $\tilde{\Omega}$. Залежність $\tilde{\Omega}_{\max}(x_0)$ від параметра x_0 , знайдена з умов (46), ілюструє рис. 4.


 Рис. 4. Залежність $\tilde{\Omega}_{max}$ від параметра релятивізму x_0 .

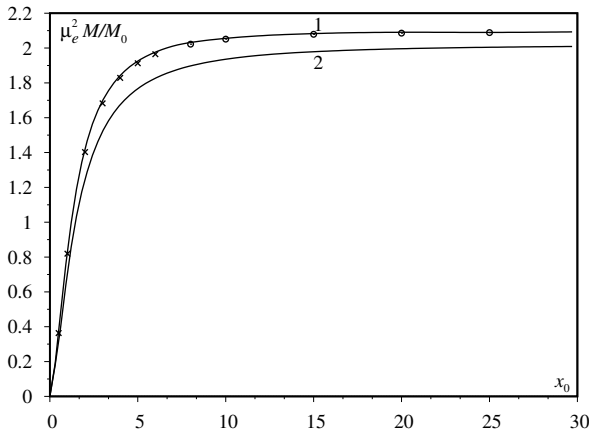
Маса зорі дорівнює

$$M(x_0|\mu_e|z|\omega) = \frac{M_0}{\mu_e^2} (1 - \varphi_1(x_0|z))^{3/2} \mathcal{M}(x_0, \tilde{\Omega}), \quad (49)$$

$$\mathcal{M}(x_0, \tilde{\Omega}) = 3 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta$$

$$\times \int_0^{\xi_0(\theta)} \xi^2 \left\{ Y^2(\xi, \theta) + \frac{2}{\varepsilon_0} Y(\xi, \theta) \right\}^{3/2} d\xi,$$

де $\xi_0(\theta) \equiv \xi_0(\theta|x_0, \tilde{\Omega})$ є розв'язком рівняння $Y(\xi, \theta) = 0$ і визначає форму поверхні зорі.


 Рис. 5. Залежність маси карлика від параметра релятивізму x_0 (крива 1 розрахована за формулою (49) у наближенні (48) за $\tilde{\Omega}_{max}(x_0)$, крива 2 відповідає стандартній моделі, хрестики відповідають роботі [4], кружечки відповідають формулі (49) у наближенні (54)).

На рис. 5 зображено залежність маси карлика від параметра x_0 при $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_{max}(x_0)$, розраховану за формулою (49) за $Y(\xi, \theta) = \varphi_0(\xi, \theta) - \frac{1}{4} \tilde{\Omega}_{max}^2 \xi^2 \sin^2 \theta$, а також аналогічну залежність у стандартній моделі (без урахування обертання й міжчастинкових взаємодій). Точнішу інформацію дає табл.5, у якій додатково наведено залежність маси карлика від x_0 за $\Omega_{max}(x_0)$,

розраховану в роботі [4] на основі чисельно знайденого розв'язку рівняння рівноваги (без урахування поправки на кулонівські взаємодії) за допомогою розкладів за поліномами Лежандра.

Результати розрахунків характеристик карликів у роботі [4] подано у вигляді таблиць як функції двох безрозмірних параметрів

$$D = D(x_0) = [1 + x_0^2]^{-1}, \quad (50)$$

$$A \equiv A(\omega, x_0) = \omega^2 (8\pi G \rho_c)^{-1},$$

де ρ_c — густина в центрі зорі. Як легко перекопатися,

$$A = \frac{\tilde{\Omega}^2}{4} \left(\frac{\varepsilon_0(x_0)}{x_0} \right)^3. \quad (51)$$

При заданому значенні D параметр A змінюється від 0 до $A_{max}(x_0)$ з малим кроком, але D приймає лише значення 0.025; 0.05; 0.1; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8, чому відповідає зміна x_0 від 6.24 до 0.5. Ця область відповідає карликам малих та проміжних мас. Величина $M_J(x_0)$ у табл. 5 відображає залежність маси від x_0 за $A_{max}(x_0)$. Цю залежність ми проінтерполювали в області $1/2 \leq x_0 \leq 6$. Як видно з таблиці, результати розрахунку мас у наближенні (48) виявились дуже близькими до результатів роботи [4]. Це видно також з рис. 5, де хрестики відповідають значенням маси, одержаним у роботі [4].

Через те, що полярний радіус у наближенні (48) дорівнює радіусу зорі без обертання, то наближення $\varphi_0(\xi, \theta)$ приводить до деякого завищення об'єму зорі та її маси. Розв'язок рівняння для функції $\varphi(\xi, \theta)$ можна уточнити, враховуючи доданок $\xi^{-2} \Delta_\theta \varphi(\xi, \theta)$ наближено. Оскільки функція $Y(\xi, \theta)$ за досить великих значень x_0 близька до розв'язку рівняння рівноваги для політропи з індексом $n = 3$, виберімо нульове наближення $Y(\xi, \theta)$ у вигляді

$$Y_0(\xi, \theta) = y(\xi|x_0) + \tilde{\Omega}^2 \{ \psi_0(\xi) + \psi_2(\xi) P_2(\cos \theta) \}. \quad (52)$$

Тут $y(\xi|x_0)$ — розв'язок рівняння рівноваги для виродженого карлика без обертання, $P_2(\cos \theta)$ — поліном Лежандра другого порядку, а функції $\psi_0(\xi)$, $\psi_2(\xi)$ є поправками на обертання для політропи з індексом $n = 3$. Вони розраховані чисельним методом у роботі [17], присвяченій рівнянню рівноваги зір-політроп з осьовим обертанням.

У наближенні

$$\frac{1}{\xi^2} \Delta_\theta \varphi(\xi, \theta) \Rightarrow \frac{1}{\xi^2} \Delta_\theta \left\{ Y_0(\xi, \theta) - \frac{1}{4} \tilde{\Omega}^2 \xi^2 \sin^2 \theta \right\} \quad (53)$$

рівняння для функції $\varphi(\xi, \theta)$ набуває вигляду

$$\Delta_\xi \varphi(\xi, \theta) = \tilde{\Omega}^2 P_2(\cos \theta) L(\xi) \quad (54)$$

$$- \left\{ [\varphi(\xi, \theta) + \delta(\xi, \theta)]^2 + \frac{2}{\varepsilon_0} [\varphi(\xi, \theta) + \delta(\xi, \theta)] \right\}^{3/2},$$

де $L(\xi) = 1 + \frac{6}{\xi^2}\psi_2(\xi)$, а функцію $\psi_2(\xi)$ на інтервалі $0 \leq \xi \leq 10$ можна апроксимувати виразом

$$\psi_2(\xi) = -\frac{a_1\xi^2 + a_2\xi^4 + a_3\xi^6}{1 + b_1\xi^2 + b_2\xi^4}, \quad (55)$$

якщо $a_1 = 0.71508, a_2 = 0.0281033, a_3 = 0.00189918, b_1 = 0.246087, b_2 = 0.0107494$. Функція $L(\xi)$ є від'ємною функцією змінної ξ , що видно з рис. 6. Тому доданок, пропорційний до $P_2(\cos \theta)$, має від'ємний знак за $\cos \theta > 3^{-1/2}$ і додатні — за $\cos \theta < 3^{-1/2}$. Це призводить до зменшення правої частини рівняння (54) за малих значень кута θ і збільшення — за великих. Рис. 7 ілюструє залежність функції $Y(\xi, \theta)$ від змінної ξ за $\tilde{\Omega}_{\max}^2(x_0)$ у випадку $x_0 = 10$. Для порівняння наведено також розв'язок рівняння рівноваги у стандартній моделі. Як видно з цього рисунка, таке уточнення розв'язку рівняння для функції $\varphi(\xi, \theta)$ коректно описує форму поверхні карлика з осьовим обертанням. Маса, розрахована за формулою (49) у наближенні (54), мало відрізняється від маси, розрахованої в наближенні $\varphi_0(\xi, \theta)$, особливо за великих значень x_0 , що видно з таблиці 5.

x_0	$M(x_0)$	$M_J(x_0)$	$M(x_0, \Omega)$	$M'(x_0, \Omega)$
0.5	0.312596	0.363745	0.374143	—
1.0	0.710438	0.819404	0.835164	—
2.0	1.24624	1.40298	1.42165	—
3.0	1.52172	1.68242	1.69812	—
4.0	1.67442	1.82893	1.84226	—
5.0	1.76691	1.91241	1.92539	—
6.0	1.82695	1.96490	1.97659	—
8.0	1.89746	—	2.03194	2.02218
10.0	1.93564	—	2.05574	2.05129
15.0	1.97893	—	2.08311	2.07876
20.0	1.99608	—	2.0906	2.0856
25.0	2.00454	—	2.08978	2.08877

Таблиця 5. Залежність безрозмірної маси від параметра релятивізму в різних наближеннях: $M(x_0)$ відповідає стандартній моделі, $M_J(x_0)$ розрахована в роботі [4], $M(x_0, \Omega)$ розрахована в наближенні (48), $M'(x_0, \Omega)$ — у наближенні (54).

x_0	$\tilde{\Omega}_{\max}^2$	$\xi_1(x_0)$	ξ_e	ξ_p
6.0	0.0192	4.023	5.736	3.737
8.0	0.0144	4.493	6.409	4.213
10.0	0.0118	4.828	6.770	4.555
15.0	0.0088	5.358	7.538	5.098
20.0	0.0074	5.670	7.808	5.421
25.0	0.0067	5.887	8.243	5.632

Таблиця 6. Залежність максимального значення параметра $\tilde{\Omega}_{\max}^2$, безрозмірних полярного й екваторіального радіусів, що відповідають цьому значенню, а також безрозмірного радіуса карлика без обертання, від параметра x_0 .

Значення максимальної швидкості обертання, а також полярного й екваторіального радіусів за цієї швидкості, наведені в табл. 6, знайдено чисельним інтегруванням рівняння (54).

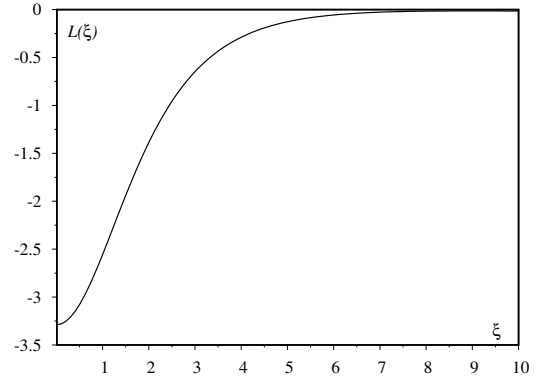


Рис. 6. Залежність функції $L(\xi)$ від змінної ξ .

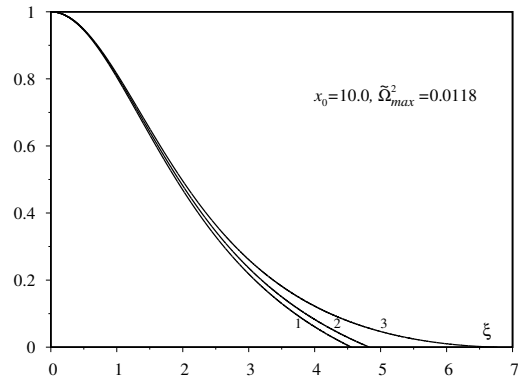


Рис. 7. Розв'язки рівняння (54) за фіксованого значення x_0 та $\tilde{\Omega}_{\max}^2$ (крива 1 відповідає куту $\theta = 0$, крива 3 — куту $\theta = \pi/2$, крива 2 — розв'язок рівняння рівноваги для стандартної моделі).

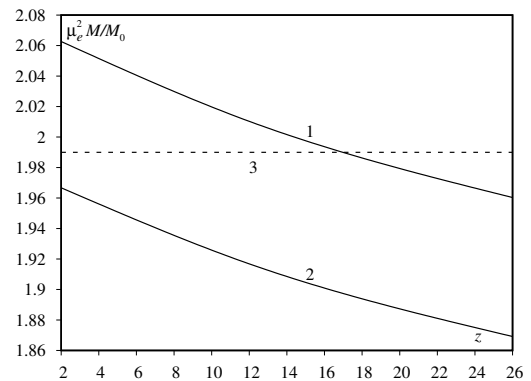


Рис. 8. Залежність безрозмірної маси карлика від заряду ядра z за значення параметра релятивізму $x_0 = 20$ (крива 1 відповідає масі карлика за максимальної швидкості обертання, 3 — стандартній моделі, 2 — масі карлика без обертання, але за врахуванням взаємодій).

x_0	$\mathcal{M}(x_0)$	$(1 - \varphi_1(x_0, z))^{3/2} \mathcal{M}(x_0)$			$\mathcal{M}(x_0, \tilde{\Omega}_{\max})$	$(1 - \varphi_1(x_0, z))^{3/2} \mathcal{M}(x_0, \tilde{\Omega}_{\max})$		
		$z = 2$	$z = 12$	$z = 26$		$z = 2$	$z = 12$	$z = 26$
1.0	0.707066	0.697700	0.679943	0.662983	0.835164	0.824101	0.803127	0.783095
2.0	1.24303	1.226509	1.195403	1.165746	1.42165	1.402755	1.367179	1.333261
3.0	1.51862	1.498396	1.460419	1.424280	1.69812	1.675506	1.633040	1.592629
4.0	1.67141	1.649128	1.607329	1.567568	1.84226	1.817701	1.771629	1.727804
5.0	1.76395	1.740419	1.696298	1.654323	1.92539	1.899706	1.851547	1.805730
6.0	1.82404	1.799697	1.754065	1.710638	1.97659	1.950211	1.900763	1.853704
7.0	1.86521	1.840310	1.7936401	1.7492106	2.01138	1.984528	1.934201	1.886290
8.0	1.89462	1.869321	1.821909	1.776757	2.03194	2.004807	1.953959	1.905534
9.0	1.91634	1.890746	1.842785	1.797095	2.04535	2.018033	1.966842	1.918078
10.0	1.93284	1.907022	1.858643	1.812542	2.05574	2.028280	1.976825	1.927793
15.0	1.97619	1.949781	1.900299	1.853099	2.08311	2.055272	2.003113	1.953359
20.0	1.99337	1.966725	1.916804	1.869154	2.0906	2.062655	2.010299	1.9603251
30.0	2.00665	1.979821	1.929557	1.881546	2.09306	2.065076	2.012647	1.962568

Таблиця 7. Залежність безрозмірної маси карлика від параметра x_0 у різних наближеннях: $\mathcal{M}(x_0)$, $(1 - \varphi_1(x_0, z))^{3/2} \mathcal{M}(x_0)$, $\mathcal{M}(x_0, \tilde{\Omega}_{\max})$, $(1 - \varphi_1(x_0, z))^{3/2} \mathcal{M}(x_0, \tilde{\Omega}_{\max})$.

VI. ВИСНОВКИ

Згідно зі співвідношенням (49), урахування взаємодій призводить до зменшення маси карлика, тоді як обертання збільшує масу. Це відображає табл.7, у якій наведено залежність від x_0 маси карлика в моделі С. Чандрасекара $\mathcal{M}(x_0)$ та маси карлика без обертання, але з урахуванням міжчастинкових взаємодій $[1 - \varphi_1(x_0, z)]^{3/2} \mathcal{M}(x_0)$, максимальної маси під час обертання (але без урахування взаємодій) $\mathcal{M}(x_0, \tilde{\Omega}_{\max})$, а також максимальної маси при одночасному врахуванні обертання та кулонівських взаємодій $[1 - \varphi_1(x_0, z)]^{3/2} \mathcal{M}(x_0, \tilde{\Omega}_{\max})$. Як впливає з табл. 7, осьове обертання може компенсувати зменшення маси за рахунок міжчастинкових взаємодій при

$z \leq 17$. Але оскільки обертання карликів з максимальною кутовою швидкістю є малоймовірним, то здебільшого збільшення маси за рахунок обертання не може повністю компенсувати зменшення маси за рахунок кулонівських взаємодій. Звідси випливає, що маси немагнітних карликів за $z < z_0$ можуть перевищувати масу, яку одержуємо з моделі С. Чандрасекара, за відповідного значення швидкості обертання. За $z > z_0$ маси немагнітних карликів менші від значення маси, що одержуємо зі стандартної моделі, безвідносно до величини кутової швидкості. Рис. 8 ілюструє залежність маси карлика від заряду ядра z за значення параметра релятивізму $x_0 = 20$ у різних наближеннях і встановлює характерні границі зміни маси карлика залежно від заряду ядра та кутової швидкості за великих значень параметра релятивізму.

-
- [1] M. V. Vavruk, S. V. Smerechinskii, *Astron. Rep.* **56**, 363 (2012).
 - [2] M. V. Vavruk, S. V. Smerechinskii, *Astron. Rep.* **57**, 913 (2013).
 - [3] M. V. Vavruk, D. V. Dzikovskyi, N. L. Tyshko, *Odessa Astron. Publ.* **28**, 82 (2015).
 - [4] R. A. James, *Astrophys. J.* **140**, 552 (1964).
 - [5] M. Vavruk S. Smerechynskyi, D. Dzikovskyi, *Math. Model. Comput.* **4**, 107 (2017).
 - [6] E. E. Salpeter, *Astrophys. J.* **134**, 669 (1961).
 - [7] T. Hamada, E. Salpeter, *Eur. Astrophys. J.* **133**, 683 (1961).
 - [8] С. А. Каплан, *Наук. записки Львів. ун-ту. Сер. фіз.-мат.* **15**(4), 109 (1949).
 - [9] Ya. B. Zeldovich, I. D. Novikov, *Relativistic astrophysics* (Nauka, Moskva, 1967).
 - [10] М. Ваврук, П. Костробій, Б. Маркович, *Базисний підхід в теорії багатоелектронних систем* (Растр-7, Львів, 2017).
 - [11] M. V. Vavruk, D. V. Dzikovskyi, N. L. Tyshko, *Condens. Matt. Phys.* **20**, 1 (2017).
 - [12] D. Ceperley, B. Alder, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 566 (1980).
 - [13] S. H. Vosko, L. Wilk, N. Nusair, *Can. J. Phys.* **58**, No 8, 1200 (1980).
 - [14] P. P. Ewald, *Ann. Phys.* **64**, 253 (1921).
 - [15] K. Fuchs, *Proc. Roy. Soc. A* **151**, 585 (1935).
 - [16] W. J. Carr, Jr., *Phys. Rev.* **122**, 1437 (1961).
 - [17] S. Chandrasekhar, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **93**, 390 (1933).

**THE INFLUENCE OF THE INTERACTIONS ON THE DEGENERATE DWARFS
CHARACTERISTICS**

M. V. Vavruk, D. V. Dzikovskyi, S. V. Smerechynskyi
*Ivan Franko National University of Lviv, Department for Astrophysics,
8, Kyrylo and Methodiy St., Lviv, UA-79005, Ukraine*

The energy of the ground state of a spatially homogeneous electron-nuclear model has been calculated in the reference system approach at high densities. The equation of state has been constructed in the approximation of the two-particle correlations of the relativistic degenerate homogeneous electrons model at the absolute zero temperature on a background of a positive compensating charge, which is necessary for the description of the white dwarf's inner structure. The relative decrease of pressure has been investigated as a function of the nuclear charge and a relativistic parameter. The equilibrium equation without rotation has been solved at the first stage. Here we have investigated the influence of interparticle interactions on the characteristics of a spherically symmetrical model. By using rescaling, the exact equilibrium equation for the model with axial rotation and interparticle interactions has been reduced to an equilibrium equation in partial derivatives for the model which takes into account the rotation with constant angular velocity, but without interparticle interactions. The approximate solutions to the obtained equation have been found numerically. Within this approach we have calculated the mass, the polar and equatorial radii as functions of the relativistic parameter in the stellar centre and dimensionless angular velocity. The dependence of the maximal angular velocity and maximal dwarf's mass on the relativistic parameter has been analyzed, as well as the resulting effect of interparticle interactions and axial rotation, which are competing factors, on the characteristics of massive dwarfs. It has been shown that the axial rotation causes an increase in the mass and size of a dwarf, while the interactions cause their decrease; moreover the influence of interparticle interactions essentially depends on the chemical composition. Also, we have established the conditions under which the axial rotation can compensate for weight loss of mass due to the Coulomb interactions. In addition, we have provided the tables of the characteristics' variations as the functions of the model parameters.