ЧОТИРИ-ІМПУЛЬС ТА МОМЕНТ ЧОТИРИ-ІМПУЛЬСУ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ СИСТЕМИ РЕЛЯТИВІСТСЬКИХ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК У НАБЛИЖЕННІ СЛАБКОЇ ВЗАЄМОДІЇ

Юрій Криницький
Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра теоретичної фізики,
вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005, Україна
e-mail: yurikryn@gmail.com

(Отримано 29 березня 2018 р.; в остаточному вигляді — 14 травня 2018 р.)

Знайдено вирази для 4-імпульсу та моменту 4-імпульсу електромагнітного поля системи двох (багатьох) релятивістських заряджених частинок у наближенні слабкої взаємодії як функції координат та швидкостей цих частинок. Записано та проаналізовано закон збереження 4-імпульсу і моменту 4-імпульсу частинок та поля. Також установлено, що в такому наближенні 4-імпульс та момент 4-імпульсу поля є сумами парних внесків.

Ключові слова: 4-імпульс, момент 4-імпульсу, система релятивістських заряджених частинок.

DOI: https://doi.org/10.30970/jps.22.2001

PACS number(s): 03.30.+p, 03.30.−z, 03.50.De

I. ВСТУП

Дослідженню задач класичної електродинаміки одно- та багаточастинкових систем заряджених частинок (див., для прикладу, [1–10] та посилання в них) присвячено багато праць. Серед них особливу увагу приділено дослідженням законів збереження, знаходженню 4-імпульсу системи заряджених частинок. Зокрема, автор статті [5] запропонував математичну процедуру переозначення розбіжних інтеґралів, що виникають у рівняннях електродинаміки точкових зарядів. Цю процедуру автори застосували для отримання 4-імпульсу системи заряджених частинок. У роботі [6] розглянуто 4-імпульс поля точкового заряду у випадку, коли лаґранжіан поля є нелінійним, та доведено, що 4-імпульс є 4-вектором. У праці [10] докладно досліджено задачу про взаємодію 2-х зарядів та показано, що рівняння руху цих зарядів є наслідком законів збереження 4-імпульсу та моменту 4-імпульсу частинок і поля.

У цій статті розглянуто систему заряджених частинок у наближенні слабкої взаємодії. Слабкість взаємодії ми розуміємо як довільну (формально безмежну) малість зарядів частинок. Це дозволяє нам знехтувати залежністю сил Лоренца від прискорень частинок та провести їх коректну редукцію до єдиного моменту часу. Також у цьому наближенні можна знехтувати силою радіаційного тертя та випромінюванням. Тобто задача стає чисто механічною. Водночас, ми ніяк не обмежуємо швидкості частинок, тобто система є строго релятивістською. Фізичну картину взаємодії такої системи можемо собі уявити так: частинки з безмежності налітають одна на одну та, провзаємодіявши, розлітаються на безмежність у майже тих самих напрямах, у яких летіли спочатку. Водночас, вони обмінюються 4-імпульсами та моментами 4-імпульсу за посередництвом електромагнітного поля. Поле має свої 4-імпульс та момент 4-імпульсу, що разом зі сумарними 4-імпульсами та моментами 4-імпульсу частинок утворюють відповідні інтеґрали руху.

Метою статті є отримати точні вирази для 4-імпульсу та моменту 4-імпульсу поля в заданому наближенні на основі рівнянь руху частинок і відповідних законів збереження.

Другий розділ статті присвячено знаходженням рівнянь руху системи двох релятивістських заряджених частинок у наближенні слабкої взаємодії. У третьому розділі розглянуто 4-імпульс частинок та поля та досліджено його закон збереження. Момент 4-імпульсу частинок і поля вивчено в четвертому розділі роботи. У п'ятому розділі результати та висновки досліджень двочастинкової системи узагальнена систему багатьох частинок. Висновки подано в шостому розділі.

II. РІВНЯННЯ РУХУ ДВОХ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК

Коли розглядають рівняння руху двох чи більше частинок, зазвичай оперують поняттями 4-кординати частинки, її 4-швидкості, 4-прискорення та 4-сили, що на неї діє, причому параметром світової лінії кожної частинки є її власний час (чи інтервал, бо тут і надалі $c = 1$). Тобто ми не маємо єдиного спільного параметра еволюції, яким могли би описати рух всіх частинок. Тому введемо "ґлобальний" час $\lambda = (\mathbf{tX})$, де $\mathbf{X}$ — 4-координата будь-якої точки простору-часу, а $\mathbf{t}$ — 4-вектор, нормований умовою $(\mathbf{tt}) = 1$. Тут і надалі дужки означають скалярний добуток у метриці Мінковського. Зауважимо, що такий вибір спільного параметра еволюції відповідає миттєвій формі релятивістської динаміки, див. [11, 12].

Гіперповерхні постійного λ розшаровують простір-час на гіперплощини, що визначають одночасні події для системи відліку, яка рухається з 4-швидкістю $\mathbf{t}$. Принцип рівноправності всіх інерціальних систем відліку проявляється в інваріантності рівнянь руху щодо вибору будь-якого часоподібного $\mathbf{t}$.

Розгляньмо дві частинки, позначені індексами a та b із зарядами e_a, e_b. 4-координати частинок $\mathbf{x}_a$ і $\mathbf{x}_b$ є функціями часу λ, а відповідні 4-швидкості визначимо як $\mathbf{a} = d\mathbf{x}_a/d\lambda$ та $\mathbf{b} = d\mathbf{x}_b/d\lambda$. Останні, як легко переконатись, нормуються умовою $(\mathbf{ta}) = (\mathbf{tb}) = 1$. Під позначенням $\mathbf{x} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$ ми будемо розуміти 4-вектор, напрямлений від частинки b до частинки a в той самий момент часу λ, тобто $\mathbf{x}$ завжди належить якійсь гіперплощині одночасності, а тому $(\mathbf{tx}) = 0$. У системі координат, природно зв'язаній зі $\mathbf{t}$-системою відліку, означені вектори мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= (1, \vec{0}),\\
\mathbf{x}_a &= (\lambda, \vec{r}_a),\\
\mathbf{x}_b &= (\lambda, \vec{r}_b)\\
\mathbf{a} &= (1, \vec{v}_a),\\
\mathbf{b} &= (1, \vec{v}_b),\\
\mathbf{x} &= (0, \vec{r}_a - \vec{r}_b).
\end{aligned} \tag{1}$$

Потенціал Лієнара–Віхерта в точці перебування частинки a в момент часу λ породжується частинкою b в деякий попередній момент часу $\tilde{\lambda}$ і має вигляд:

$$\tilde{\mathbf{A}}_b = e_b \frac{\tilde{\mathbf{b}}}{(\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{b}})}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_a - \tilde{\mathbf{x}}_b, \tag{2}$$

де тильда означає залежність відповідних величин від часу $\tilde{\lambda}$. Останній ж визначається ізотропністю $\tilde{\mathbf{x}}$, тобто умовою $(\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}) = 0$. Урахувавши цю умову, зробімо перетворення

$$(\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{b}}) = \sqrt{-\{(\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}})(\tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{b}}) - (\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{b}})^2\}} = \sqrt{-([\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{b}}][\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{b}}])}, \tag{3}$$

де ми використали позначення $([\mathbf{ab}][\mathbf{cd}]) = (\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) - (\mathbf{ad})(\mathbf{bc})$ для будь-яких 4-векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$. Цей вираз є антисиметричним щодо перестановки арґументів у квадратних дужках.

У наближенні слабкої взаємодії для обчислення $\mathbf{A}_b$ можна вважати, що частинка b рухається рівномірно і прямолінійно, тобто використати співвідношення:

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}, \tag{4}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_b = \mathbf{x}_b - \mathbf{b}(\lambda - \tilde{\lambda}), \tag{5}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{b}(\lambda - \tilde{\lambda}), \tag{6}$$

що приводить до такого результату для потенціалу:

$$\mathbf{A}_b = e_b \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{-([\mathbf{xb}][\mathbf{xb}])}}, \tag{7}$$

де тепер усі величини належать до моменту часу λ.

Запишімо тепер рівняння руху a-ї частинки під дією сили Лоренца $\mathbf{f}_{ab}$, що спричинена 4-потенціалом Лієнара–Віхерта $\mathbf{A}_b$ частинки b:

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{m_a \mathbf{a}}{\sqrt{(\mathbf{aa})}} = \mathbf{f}_{ab} = e_a \{\partial_{\mathbf{x}_a}(\mathbf{a}\mathbf{A}_b) - (\mathbf{a}\partial_{\mathbf{x}_a})\mathbf{A}_b\}. \tag{8}$$

Обчисливши 4-силу $\mathbf{f}_{ab}$, для компактності запису подаємо її скалярний добуток із довільним сталим вектором $\mathbf{n}$ (що цілком еквівалентно заданню самої сили):

$$(\mathbf{nf}_{ab}) = -e_a e_b \frac{(\mathbf{bb})([\mathbf{an}][\mathbf{xb}])}{(-([\mathbf{xb}][\mathbf{xb}]))^{3/2}}. \tag{9}$$

Для частинки b рівняння мають аналогічний вигляд, треба лише всюди поміняти місцями вектори та індекси a і b, а також замінити $\mathbf{x}$ на $-\mathbf{x}$. Ми побачимо, що тоді $\mathbf{f}_{ab} + \mathbf{f}_{ba} \neq 0$, і це природно, адже пов'язане зі зарядами електромагнітне поле є третім "тілом", яке бере участь у динаміці системи. Тому спробуймо знайти його внесок у сумарний 4-імпульс для того, щоб відновити закон збереження.

III. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ 4-ІМПУЛЬСУ

Перепишімо 4-силу $\mathbf{f}_{ab}$ так:

$$\mathbf{f}_{ab} = -\frac{d}{d\lambda}\varphi_{ab} = -(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \partial_{\mathbf{x}})\varphi_{ab}. \tag{10}$$

Остання рівність виникає тому, що ми нехтуємо похідними за часом від швидкостей у виразі для сили. Наша мета — отримати φ_{ab} як функцію $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ та $\mathbf{x}$ у момент часу λ. Для цього скористаймося можливістю вважати рух частинок рівномірно-прямолінійним, обчислюючи величини, які містять константу взаємодії $e_a e_b$, зокрема вважати 4-швидкості $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ сталими. Тому зробімо підстановку $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})\lambda$, де $\mathbf{x}_0$ — значення $\mathbf{x}$ у момент часу $\lambda = 0$. Тоді маємо:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{n}\varphi_{ab}) &= e_a e_b (\mathbf{bb}) \\
&\times \int \frac{([\mathbf{an}][\mathbf{x}_0 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})\lambda, \mathbf{b}])}{(-([\mathbf{x}_0 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})\lambda, \mathbf{b}][\mathbf{x}_0 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})\lambda, \mathbf{b}]))^{3/2}} d\lambda.
\end{aligned} \tag{11}$$

Увівши для спрощення обчислень такі позначення:

$$p = ([\mathbf{an}][\mathbf{xb}]), \quad p_0 = ([\mathbf{an}][\mathbf{x}_0\mathbf{b}]), \tag{12}$$

$$q = ([\mathbf{an}][\mathbf{ab}]) \tag{13}$$

$$r = -([\mathbf{xb}][\mathbf{xb}]), \quad r_0 = -([\mathbf{x}_0\mathbf{b}][\mathbf{x}_0\mathbf{b}]), \tag{14}$$

$$s = -([\mathbf{ab}][\mathbf{xb}]), \quad s_0 = -([\mathbf{ab}][\mathbf{x}_0\mathbf{b}]), \tag{15}$$

$$t = -([\mathbf{ab}][\mathbf{ab}]) \tag{16}$$

і зробивши такі перетворення

$$\begin{aligned}
\int \frac{p}{r^{3/2}} d\lambda &= \int \frac{p_0 + q\lambda}{(r_0 + 2s_0\lambda + t\lambda^2)^{3/2}} d\lambda \\
&= \frac{(p_0 t - s_0 q)\lambda + (p_0 s_0 - q r_0)}{(r_0 t - s_0^2)\sqrt{r_0 + 2s_0\lambda + t\lambda^2}} \\
&= \frac{ps - qr}{(rt - s^2)\sqrt{r}},
\end{aligned} \tag{17}$$

отримаємо відповідь

$$(\mathbf{n}\varphi_{ab}) = e_a e_b (\mathbf{bb}) \frac{([\mathbf{ab}][\mathbf{an}])([\mathbf{xb}][\mathbf{xb}]) - ([\mathbf{ab}][\mathbf{xb}])([\mathbf{xb}][\mathbf{an}])}{(([\mathbf{xb}][\mathbf{xb}])([\mathbf{ab}][\mathbf{ab}]) - ([\mathbf{ab}][\mathbf{xb}])^2)\sqrt{-([\mathbf{xb}][\mathbf{xb}])}}. \tag{18}$$

Для спрощення запису цього виразу введемо позначення

$$([[\mathbf{ab}][\mathbf{cd}]][[\mathbf{ef}][\mathbf{gh}]]) = ([\mathbf{ab}][\mathbf{ef}])([\mathbf{cd}][\mathbf{gh}]) - ([\mathbf{ab}][\mathbf{gh}])([\mathbf{cd}][\mathbf{ef}]). \quad \forall\, \mathbf{a}, \ldots, \mathbf{h}. \tag{19}$$

Отже, можемо записати:

$$(\mathbf{n}\varphi_{ab}) = e_a e_b \frac{(\mathbf{bb})([[\mathbf{ab}][\mathbf{xb}]][[\mathbf{an}][\mathbf{xb}]])}{([[\mathbf{ab}][\mathbf{xb}]][[\mathbf{ab}][\mathbf{xb}]])\sqrt{-([\mathbf{xb}][\mathbf{xb}])}}. \tag{20}$$

Знаменник можна мультиплікатизувати, скориставшись тотожністю:

$$([[\mathbf{xu}][\mathbf{xv}]][[\mathbf{yw}][\mathbf{yt}]]) = (\mathbf{xy})([\mathbf{xuv}][\mathbf{ywt}]). \tag{21}$$

Вираз $([\mathbf{xuv}][\mathbf{ywt}])$ означає, як і написані вище скорочені позначення, визначник, побудований зі скалярних добутків векторів $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ з векторами $\mathbf{y}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{t}$. Зауважимо, що ці вирази є антисиметричними щодо перестановок арґументів у квадратних дужках.

У підсумку остаточний результат має такий вигляд:

$$(\mathbf{n}\varphi_{ab}) = e_a e_b \frac{([[\mathbf{ab}][\mathbf{xb}]][[\mathbf{an}][\mathbf{xb}]])}{([\mathbf{xab}][\mathbf{xab}])\sqrt{-([\mathbf{xb}][\mathbf{xb}])}}. \tag{22}$$

Тоді рівняня руху частинки a можна записати так:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{m_a\mathbf{a}}{\sqrt{(\mathbf{aa})}} + \varphi_{ab}\right) = 0, \tag{23}$$

тобто ми можемо силу Лоренца, у нашому наближенні слабкої взаємодії, повністю "перевести" в 4-імпульс. Насправді останє рівняння неприйнятне, бо φ_{ab} має розбіжність при $([\mathbf{xab}][\mathbf{xab}]) = 0$, тобто якщо $\mathbf{x} \parallel \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Навпаки, розбіжність за $([\mathbf{xb}][\mathbf{xb}]) = 0$ є природною, оскільки можлива лише за умови $\mathbf{x} = 0$, тобто коли $\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b$ у той самий момент часу λ.

Ураховуючи, що $\varphi_{ab}(-\mathbf{x}) = \varphi_{ab}(\mathbf{x})$, запишімо закон збереження 4-імпульсу частинок та поля:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{m_a\mathbf{a}}{\sqrt{(\mathbf{aa})}} + \frac{m_b\mathbf{b}}{\sqrt{(\mathbf{bb})}} + \varphi_{ab} + \varphi_{ba}\right) = 0, \tag{24}$$

де 4-імпульс поля $\varphi_{ab} + \varphi_{ba}$ має вигляд

$$\begin{aligned}(\mathbf{n}, \varphi_{ab} + \varphi_{ba}) &= e_a e_b \frac{([[\mathbf{ab}][\mathbf{xb}]][[\mathbf{an}][\mathbf{xb}]])}{([\mathbf{xab}][\mathbf{xab}])\sqrt{-([\mathbf{xb}][\mathbf{xb}])}} \\ &+ e_a e_b \frac{([[\mathbf{ba}][\mathbf{xa}]][[\mathbf{bn}][\mathbf{xa}]])}{([\mathbf{xab}][\mathbf{xab}])\sqrt{-([\mathbf{xa}][\mathbf{xa}])}}.\end{aligned} \tag{25}$$

Бачимо, що в цьому виразі розбіжності за $([\mathbf{xab}][\mathbf{xab}]) = 0$ немає. Заодно зведемо формулу до найпростішого вигляду. Для цього введімо зручні скорочені позначення:

$$\begin{aligned} B &= ([[\mathbf{ab}][\mathbf{xb}]][[\mathbf{an}][\mathbf{xb}]]), \\ A &= ([[\mathbf{ba}][\mathbf{xa}]][[\mathbf{bn}][\mathbf{xa}]]), \\ d &= ([\mathbf{xab}][\mathbf{xab}]), \\ \beta &= -([\mathbf{xb}][\mathbf{xb}]), \\ \alpha &= -([\mathbf{xa}][\mathbf{xa}]), \\ \gamma &= -([\mathbf{xa}][\mathbf{xb}]). \end{aligned} \tag{26}$$

Відтак вираз набуває компактного вигляду:

$$(\mathbf{n}, \varphi_{ab} + \varphi_{ba}) = \frac{e_a e_b}{d}\left(\frac{B}{\sqrt{\beta}} + \frac{A}{\sqrt{\alpha}}\right). \tag{27}$$

Зауважимо, що за $\mathbf{x} \neq 0$ завжди $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Проведемо далі такий ланцюжок перетворень:

$$\begin{aligned}(\mathbf{n}, \varphi_{ab} + \varphi_{ba}) &= \frac{e_a e_b}{d}\left(\frac{B}{\sqrt{\beta}} + \frac{A}{\sqrt{\alpha}}\right) \\ &= \frac{e_a e_b}{d} \cdot \frac{B\sqrt{\alpha} + A\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} \cdot \frac{\sqrt{\alpha\beta} + \gamma}{\sqrt{\alpha\beta} + \gamma} \\ &= \frac{e_a e_b}{d} \cdot \frac{(B\gamma + A\beta)\sqrt{\alpha} + (A\gamma + B\alpha)\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha\beta} + \gamma)} \\ &= \frac{e_a e_b}{\sqrt{\alpha\beta} + \gamma}\left(\frac{B\gamma + A\beta}{d} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta}} + \frac{A\gamma + B\alpha}{d} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \\ &= \frac{e_a e_b}{\sqrt{\alpha\beta} + \gamma}\left(\frac{B_1}{\sqrt{\beta}} + \frac{A_1}{\sqrt{\alpha}}\right),\end{aligned} \tag{28}$$

де ми ввели нові позначення:

$$B_1 = \frac{B\gamma + A\beta}{d} = (\mathbf{an})\beta + (\mathbf{bn})(\mathbf{xa})(\mathbf{xb}) - (\mathbf{xn})(\mathbf{ab})(\mathbf{xb}), \tag{29}$$

$$A_1 = \frac{A\gamma + B\alpha}{d} = (\mathbf{bn})\alpha + (\mathbf{an})(\mathbf{xa})(\mathbf{xb}) - (\mathbf{xn})(\mathbf{ab})(\mathbf{xa}). \tag{30}$$

Зовсім нетривіальним є факт, що дроби A_1,B_1 скорочуються, поглинаючи в такий спосіб розбіжність за d.

Після зведення подібних доданків, що містять $\mathbf{n}$, вираз для вектора 4-імпульсу поля набуває остаточного вигляду:

$$\varphi_{ab}+\varphi_{ba}=e_ae_b\left(1+\frac{(\mathbf{xx})(\mathbf{ab})}{\sqrt{\alpha\beta}+\gamma}\right)\left(\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\mathbf{b}}{\sqrt{\beta}}\right)-e_ae_b\frac{\mathbf{x}(\mathbf{ab})}{\sqrt{\alpha\beta}+\gamma}\left(\frac{(\mathbf{xa})}{\sqrt{\alpha}}+\frac{(\mathbf{xb})}{\sqrt{\beta}}\right). \tag{31}$$

Легко переконатися, що цей вираз має очікувану границю $\varphi_{ab}+\varphi_{ba}\to 0$ під час розлітання частинок ($\mathbf{x}\to\infty$). Тобто сумарна енергія та імпульс частинок до та після взаємодії залишаються незмінними – цілком аналогічно до нерелятивістської ситуації.

У нерелятивістському наближення швидкості частинок **a** та **b** близькі до швидкості системи відліку **t**, тому, беручи до уваги відповідні границі:

$$\mathbf{a},\mathbf{b}\to\mathbf{t}, \tag{32}$$
$$(\mathbf{xa}),(\mathbf{xb})\to 0, \tag{33}$$
$$(\mathbf{aa}),(\mathbf{bb}),(\mathbf{ab})\to 1, \tag{34}$$
$$\alpha,\beta,\gamma\to-(\mathbf{xx}), \tag{35}$$

у підсумку отримаємо

$$\varphi_{ab}+\varphi_{ba}=\frac{e_ae_b}{\sqrt{-(\mathbf{xx})}}\mathbf{t}=\left(\frac{e_ae_b}{|\vec r_a-\vec r_b|},\vec 0\right) \tag{36}$$

— кулонівський потенціал та 3-й закон Ньютона.

IV. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ МОМЕНТУ 4-ІМПУЛЬСУ

Уведімо тензор моменту 4-імпульсу частинки так:

$$x^ip^j-x^jp^i\equiv[\mathbf{xp}]. \tag{37}$$

Тоді, спираючись на рівняння руху a-ї частинки, маємо

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\mathbf{x}_a,\frac{m_a\mathbf{a}}{\sqrt{(\mathbf{aa})}}\right]=\left[\mathbf{x}_a,\frac{d}{d\lambda}\frac{m_a\mathbf{a}}{\sqrt{(\mathbf{aa})}}\right]=[\mathbf{x}_a\mathbf{f}_{ab}]. \tag{38}$$

Можемо перетворити праву частину так:

$$[\mathbf{x}_a\mathbf{f}_{ab}]=\left[\mathbf{x}_a,-\frac{d}{d\lambda}\varphi_{ab}\right]=-\frac{d}{d\lambda}[\mathbf{x}_a\varphi_{ab}]+[\mathbf{a}\varphi_{ab}]. \tag{39}$$

Тоді:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\left[\mathbf{x}_a,\frac{m_a\mathbf{a}}{\sqrt{(\mathbf{aa})}}\right]+[\mathbf{x}_a\varphi_{ab}]\right)=[\mathbf{a}\varphi_{ab}]=-\frac{d}{d\lambda}\psi_{ab}. \tag{40}$$

Інтеґрування останньої рівності з метою знайти ψ_{ab} є нашим черговим завданням. Аналогічно до виведення в попередньому розділі будемо працювати зі скалярами. Тоді для будь-яких сталих $\mathbf{n},\mathbf{m}$ маємо

$$\begin{aligned}([\mathbf{mn}][\mathbf{a}\varphi_{ab}])&=(\mathbf{ma})(\mathbf{n}\varphi_{ab})-(\mathbf{na})(\mathbf{m}\varphi_{ab})\\&=e_ae_b\frac{(\mathbf{ma})([[\mathbf{ab}][\mathbf{xb}]][[\mathbf{an}][\mathbf{xb}]])-(\mathbf{na})([[\mathbf{ab}][\mathbf{xb}]][[\mathbf{am}][\mathbf{xb}]])}{([\mathbf{xab}][\mathbf{xab}])\sqrt{-([\mathbf{xb}][\mathbf{xb}])}}=e_ae_b\frac{p_a}{d\sqrt{\beta}},\end{aligned} \tag{41}$$

де введено позначення

$$p_a=(\mathbf{ma})([[\mathbf{ab}][\mathbf{xb}]][[\mathbf{an}][\mathbf{xb}]])-(\mathbf{na})([[\mathbf{ab}][\mathbf{xb}]][[\mathbf{am}][\mathbf{xb}]]). \tag{42}$$

Означивши

$$q_a=(\mathbf{ma})([[\mathbf{ab}][\mathbf{xb}]][[\mathbf{an}][\mathbf{ab}]])-(\mathbf{na})([[\mathbf{ab}][\mathbf{xb}]][[\mathbf{am}][\mathbf{ab}]]), \tag{43}$$

$$s_b=-([\mathbf{ab}][\mathbf{xb}]),\quad s_a=-([\mathbf{ab}][\mathbf{xa}]),\quad t=-([\mathbf{ab}][\mathbf{ab}]) \tag{44}$$

і пам'ятаючи, що індекс 0 означає підстановку $\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0$, проінтеґруймо вираз для ψ_{ab}:

$$\begin{aligned}([\mathbf{mn}],\psi_{ab})&=-\frac{e_ae_b}{d}\int\frac{p_{a0}+q_a\lambda}{\sqrt{\beta_0+2s_{b0}\lambda+t\lambda^2}}d\lambda\\&=-e_ae_b\frac{q_a}{d\,t}\sqrt{\beta_0+2s_{b0}\lambda+t\lambda^2}+e_ae_b\frac{q_as_{b0}-tp_{a0}}{d\,t^{3/2}}\ \operatorname{arsh}\left(\frac{s_{b0}+t\lambda}{\sqrt{\beta_0t-s_{b0}^2}}\right)\\&=-e_ae_b\frac{q_a}{d\,t}\sqrt{\beta}+e_ae_b\frac{q_as_b-tp_a}{d\,t^{3/2}}\ \operatorname{arsh}\left(\frac{s_b}{\sqrt{\beta t-s_b^2}}\right).\end{aligned} \tag{45}$$

Урахувавши такі спрощення:

$$\frac{q_a s_b - t p_a}{d} = (\mathbf{aa})(\mathbf{bb})([\mathbf{ab}][\mathbf{mn}]), \tag{46}$$

$$q_a = (\mathbf{ab})([\mathbf{xa}][\mathbf{mn}])t - (\mathbf{ab})([\mathbf{ab}][\mathbf{mn}])s_a, \tag{47}$$

$$\beta t - s_b^2 = (\mathbf{bb})d, \tag{48}$$

у підсумку отримуємо результат інтеґрування:

$$([\mathbf{mn}], \psi_{ab}) = -e_a e_b \frac{(\mathbf{ab})([\mathbf{xa}][\mathbf{mn}])}{d}\sqrt{\beta} + e_a e_b \frac{(\mathbf{ab})([\mathbf{ab}][\mathbf{mn}])}{t}\frac{s_a\sqrt{\beta}}{d}$$
$$+ e_a e_b \frac{(\mathbf{aa})(\mathbf{bb})([\mathbf{ab}][\mathbf{mn}])}{t^{3/2}}\ \operatorname{arsh}\left(\frac{s_b}{\sqrt{(\mathbf{bb})}\sqrt{d}}\right). \tag{49}$$

Рівняння руху для моменту 4-імпульсу a-тої частинки набуває вигляду:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\left[\mathbf{x}_a, \frac{m_a \mathbf{a}}{\sqrt{(\mathbf{aa})}}\right] + \mu_{ab}\right) = 0, \tag{50}$$

де

$$\mu_{ab} = [\mathbf{x}_a \varphi_{ab}] + \psi_{ab} = [\mathbf{x}_a \varphi_{ab}] - e_a e_b \frac{(\mathbf{ab})[\mathbf{xa}]}{d}\sqrt{\beta} + e_a e_b \frac{(\mathbf{ab})[\mathbf{ab}]}{t}\frac{s_a\sqrt{\beta}}{d}$$
$$+ e_a e_b \frac{(\mathbf{aa})(\mathbf{bb})[\mathbf{ab}]}{t^{3/2}}\ \operatorname{arsh}\left(\frac{s_b}{\sqrt{(\mathbf{bb})}\sqrt{d}}\right). \tag{51}$$

Аналогічно до φ_{ab} ця величина має розбіжні паталогії, якщо $d \to 0$ та $t \to 0$. Останнє еквівалентне границі $\mathbf{a} \to \mathbf{b}$. Але нас цікавить момент 4-імпульсу сумарного поля, що дорівнює $\mu_{ab} + \mu_{ba}$.

Оскільки $(\mathbf{bb})d = t\beta - s_b^2$ і $(\mathbf{aa})d = t\alpha - s_a^2$, то

$$\operatorname{arsh}\left(\frac{s_b}{\sqrt{(\mathbf{bb})}\sqrt{d}}\right) - \operatorname{arsh}\left(\frac{s_a}{\sqrt{(\mathbf{aa})}\sqrt{d}}\right) = \operatorname{arsh}\left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{(\mathbf{aa})(\mathbf{bb})}} \cdot \frac{s_b\sqrt{\alpha} - s_a\sqrt{\beta}}{d}\right). \tag{52}$$

Наступний вираз регуляризується подібно до того, як було зроблено раніше:

$$\frac{s_b\sqrt{\alpha} - s_a\sqrt{\beta}}{d} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta} + \gamma}\left(\frac{s_b\gamma - s_a\beta}{d}\sqrt{\alpha} - \frac{s_a\gamma - s_b\alpha}{d}\sqrt{\beta}\right) = \frac{(\mathbf{xb})\sqrt{\alpha} + (\mathbf{xa})\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta} + \gamma}. \tag{53}$$

Остаточно вираз для моменту 4-імпульсу поля набуває такого вигляду:

$$\mu_{ab} + \mu_{ba} = e_a e_b \left(1 + \frac{(\mathbf{xx})(\mathbf{ab})}{\sqrt{\alpha\beta} + \gamma}\right)\left(\frac{[\mathbf{x}_b \mathbf{a}]}{\sqrt{\alpha}} + \frac{[\mathbf{x}_a \mathbf{b}]}{\sqrt{\beta}}\right) + e_a e_b \frac{[\mathbf{x}_a \mathbf{x}_b](\mathbf{ab})}{\sqrt{\alpha\beta} + \gamma}\left(\frac{(\mathbf{xa})}{\sqrt{\alpha}} + \frac{(\mathbf{xb})}{\sqrt{\beta}}\right)$$
$$- e_a e_b \frac{(\mathbf{ab})[\mathbf{ab}]}{t} \cdot \frac{(\mathbf{xb})\sqrt{\alpha} + (\mathbf{xa})\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta} + \gamma} + e_a e_b \frac{(\mathbf{aa})(\mathbf{bb})[\mathbf{ab}]}{t^{3/2}} \operatorname{arsh}\left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{(\mathbf{aa})(\mathbf{bb})}} \cdot \frac{(\mathbf{xb})\sqrt{\alpha} + (\mathbf{xa})\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta} + \gamma}\right), \tag{54}$$

а закон збереження моменту 4-імпульсу частинок та поля запишемо як:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\left[\mathbf{x}_a, \frac{m_a \mathbf{a}}{\sqrt{(\mathbf{aa})}}\right] + \left[\mathbf{x}_b, \frac{m_b \mathbf{b}}{\sqrt{(\mathbf{bb})}}\right] + \mu_{ab} + \mu_{ba}\right) = 0. \tag{55}$$

У 3-му та 4-му доданках $\mu_{ab} + \mu_{ba}$ залишається в знаменнику $t = -([\mathbf{ab}][\mathbf{ab}])$, але розбіжності за $t \to 0$ скорочуються, тож вираз є реґулярним, за природним винятком $\mathbf{x} \to 0$.

Цікавою є поведінка моменту 4-імпульсу поля, якщо $\mathbf{x} \to \infty$. Цю границю можна отримати, зробивши підстановки $\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_{a0} + \mathbf{a}\lambda$, $\mathbf{x}_b = \mathbf{x}_{b0} + \mathbf{b}\lambda$ та $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})\lambda$ (розуміємо, що $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$) і спрямувавши λ до $\pm\infty$. Перші три доданки скорочуються, але залишається останній:

$$\mu_{ab} + \mu_{ba}|_{\lambda \to \pm\infty} = \pm e_a e_b \frac{(\mathbf{aa})(\mathbf{bb})[\mathbf{ab}]}{t^{3/2}} \times \operatorname{arsh}\left(\frac{(\mathbf{aa}) - (\mathbf{bb})}{2\sqrt{(\mathbf{aa})(\mathbf{bb})}}\right). \quad (56)$$

Хоч у наближенні слабкої взаємодії швидкості $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ можна вважати сталими, цю ненульову границю неможливо усунути перенормуванням на костанту, адже вона різна, якщо $\lambda \to \pm\infty$.

Зручно переписати 4-координати частинок щодо точки, нерухомої в $\mathbf{t}$-системі відліку, тобто зробити підстановку $\mathbf{x}_a = \lambda\mathbf{t} + \tilde{\mathbf{x}}_a$, $\mathbf{x}_a = \lambda\mathbf{t} + \tilde{\mathbf{x}}_a$, при цьому $\mathbf{x}$ залишається незмінним, а також $(\mathbf{t}\tilde{\mathbf{x}}_a) = (\mathbf{t}\tilde{\mathbf{x}}_b) = 0$. Тоді закон збереження моменту 4-імпульсу матиме вигляд:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\lambda\left[\mathbf{t}, \frac{m_a\mathbf{a}}{\sqrt{(\mathbf{aa})}} + \frac{m_b\mathbf{b}}{\sqrt{(\mathbf{bb})}} + \varphi_{ab} + \varphi_{ba}\right] + \left[\tilde{\mathbf{x}}_a, \frac{m_a\mathbf{a}}{\sqrt{(\mathbf{aa})}}\right] + \left[\tilde{\mathbf{x}}_b, \frac{m_b\mathbf{b}}{\sqrt{(\mathbf{bb})}}\right] + \tilde{\mu}_{ab} + \tilde{\mu}_{ba}\right) = 0, \quad (57)$$

де $\tilde{\mu}_{ab} + \tilde{\mu}_{ba}$ виражені через $\tilde{\mathbf{x}}_a$, $\tilde{\mathbf{x}}_b$. Тут містяться як звичний закон збереження моменту 3-імпульсу частинок та поля, так і три інтеґрали типу рівномірного руху центра мас системи. Можна переконатись, що в нерелятивістському наближенні поле не робить внеску в ці закони (вплив $\mu_{ab} + \mu_{ba}$ проявляється, лише починаючи з постньютонівського наближення).

V. УЗАГАЛЬНЕННЯ НА СИСТЕМУ БАГАТЬОХ ЧАСТИНОК

Доволі легко поширити попередні міркування на систему n частинок ($n > 2$). Для цього зауважмо, що φ_{ab} виникає від сили, яка діє з боку b-ї частинки на частинку a. З принципу суперпозиції полів отримуємо рівняння руху i-ї частинки, у якому враховано вплив усіх решти частинок:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{m_i\mathbf{v}_i}{\sqrt{(\mathbf{v}_i\mathbf{v}_i)}} + \sum_{j\neq i}\varphi_{ij}\right) = 0, \quad \forall\, i = 1\ldots n. \quad (58)$$

Просумувавши всі рівності за i, отримаємо закон збереження 4-імпульсу системи:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\sum_i \frac{m_i\mathbf{v}_i}{\sqrt{(\mathbf{v}_i\mathbf{v}_i)}} + \sum_{i>j}\sum(\varphi_{ij} + \varphi_{ji})\right) = 0. \quad (59)$$

Як бачимо, у формулі доданки φ_{ij} паруються з φ_{ji}, тому 4-імпульс поля не містить розбіжностей.

Цілком аналогічні міркування стосуються й закону збереження моменту 4-імпульсу. В підсумку бачимо, що 4-імпульс та момент 4-імпульсу поля в наближенні слабкої взаємодії є сумами парних внесків.

VI. ОБГОВОРЕННЯ ТА ВИСНОВКИ

Ми отримали замкнуті вирази для 4-імпульсу та моменту 4-імпульсу електромагнітного поля в наближенні слабкої взаємодії між частинками, ніяк не обмежуючи їхньої швидкості. Ці вирази є функціями координат і швидкостей частинок, узятими в один і той самий момент часу щодо певної, довільно вибраної системи відліку. Спосіб отримання цих виразів передбачав автоматичне виконання відповідних законів збереження. Тобто в наближенні слабкої взаємодії двох (чи більше) частинок сума 4-імпульсів частинок та 4-імпульсу поля залишається незмінною. Коли частинки прилітають із безмежності чи віддаляються на безмежність ($\lambda \to \pm\infty$), 4-імпульс поля прямує до нуля. Це свідчить про те, що сумарна енерґія та імпульс частинок до та після взаємодії залишаються незмінними, як і в нерелятивістському випадку.

Аналогічно знайдено закон збереження моменту 4-імпульсу, який містить закон збереження моменту 3-імпульсу частинок і поля та три інтеґрали типу рівномірного руху центра мас системи. На відміну від ситуації з 4-імпульсом, цього разу момент 4-імпульсу не зникає, якщо $\lambda \to \pm\infty$, а прямує до різних за знаком ненульових значень. Це означає, що сумарний момент 4-імпульсу самих частинок до та після взаємодії змінюється, тобто не зберігається. Тут ми бачимо максимальний прояв далекодійного характеру електромагнітної взаємодії, тобто навіть коли частинки розлетілись як завгодно далеко між собою, момент 4-імпульсу поля залишається ненульовим.

Така поведінка моменту 4-імпульсу слабковзаємодіючої системи заряджених релятивістських частинок наводить на запитання: чи є ця система лаґранжевою, тобто чи можна знайти частинковий (безпольовий) лаґранжіан, наклавши попередньо на нього певні розумні обмеження, який у наближенні слабкої взаємодії відтворив би рівняння руху частинок (які ми беремо з електродинаміки) та відповідні закони збереження? Можна показати, що такого лаґранжіана справді немає, окрім випадку, коли швидкості частинок $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ дуже (слаборелятивістсько) близькі до швидкості системи відліку $\mathbf{t}$ (яка задає гіперплощини ґлобального часу), і ним є добре відомий лаґранжіан Дарвіна. Це питання заслуговує висвітлення в окремій роботі.

Результати узагальнено на систему багатьох частинок. Ми дійшли висновку, що 4-імпульс та момент 4-імпульсу поля системи багатьох частинок у наближенні слабкої взаємодії є сумами парних внесків.

ПОДЯКИ

Автор дуже вдячний доцентові Христині Гнатенко за неоціненну допомогу під час написання цієї статті.

[1] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics; 3rd Ed.* (Wiley, New York, 1998).
[2] W. K. H. Panofsky, M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism; 2nd Ed.* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1969).
[3] R. Stettner, Ann. Phys. **67**, 238 (1971).
[4] A. Lozada, P. L. Torres, J. Math. Phys. **29**, 1361 (1988).
[5] M. Marino, Ann. Phys. **301**, 85 (2002).
[6] M. B. Ependiev, Theor. Math. Phys. **191**, 836 (2017).
[7] L. F. Blazhyevskyi, Yu. S. Krynytskyi, Condens. Matter Phys. **1**, 569 (1998).
[8] Yu. Yaremko, J. Phys. A **36**, 5149 (2003).
[9] Yu. Yaremko, J. Phys. A. **37**, 1079 (2004).
[10] Yu. Yaremko, J. Math. Phys. **50**, 112901 (2009).
[11] P.A.M. Dirac, Rev. Mod. Phys. **21**, 392 (1949).
[12] В. Третяк, *Форми релятивістичної лаґранжевої динаміки* (Наукова думка, Київ, 2011).

FOUR-MOMENTUM AND ANGULAR FOUR-MOMENTUM OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD OF A SYSTEM OF RELATIVISTIC CHARGED PARTICLES IN A WEAK INTERACTION APPROXIMATION

Yuri Krynytskyi

Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv, 12, Drahomanov St., Lviv, UA–79005, Ukraine

We consider a system of two charged particles in a weak interaction approximation. In the approximation, the charges of the particles are assumed to be arbitrary small. This allows us to neglect the dependence of the Lorentz force on the acceleration of particles and make a correct reduction to the common moment of time. Also, in the approximation, radiation and radiation friction force can be neglected. In other words, the problem becomes purely mechanical. At the same time, we do not take into consideration restrictions on the velocity of the particles; therefore, the system is strictly relativistic. One can imagine the physical picture of interaction in such a system in the following way: the particles move towards each other from infinity, then interact, and then fly away to infinity in almost the same directions from which they initially came. The particles exchange 4-momentum and the angular 4-momentum through the electromagnetic field. The 4-momentum and the angular 4-momentum of the field together with the 4-momentum and the angular 4-momentum of the particles form the corresponding integrals of motion.

We obtain exact expressions for the 4-momentum and angular 4-momentum of the field in a weak interaction approximation as the functions of coordinates and the velocities of the particles. The expressions are generalized to the case of many particles. It is shown that in this case the 4-momentum and the angular 4-momentum of the field depend on the sums of the pairwise contributions. The expressions are analyzed for the particles flying away to infinity. We obtain the result that, in contrast to the 4-momentum, the angular 4-momentum of the field does not tend to zero. The law of 4-momentum conservation and the law of angular 4-momentum conservation are analyzed in the non-relativistic limit.