увеличения производительности обжигового агрегата, либо на повышение прочности окатышей.

Выводы и направление дальнейших исследований. Отечественная практика агломерационного производства в целом характеризуется наличием между интенсивностью спекания и выходом годного агломерате их спека, а также прочностью годного агломерата соответственно прямо и обратно пропорциональной зависимости. Наибольшую тесноту связи с прочностью спека и агломерата имеет показатель интенсивности горения углерода шихты.

Влияние на прочность окатышей различных приемов интенсификации обжига определяется направлением интенсифицирующего воздействия. Так, совершенствование состава и структуры сырых окатышей, как правило, сопровождается повышением прочности обожженных окатышей, а оптимизация параметров газообразного теплоносителя в большинстве случаев позволяет получить положительный результат либо в увеличении производительности машины, либо в повышении прочности окатышей.

Дальнейшее исследования по данной проблеме могут быть связаны с экспериментами, позволяющими определить количественные зависимости прочности окускованных продуктов от конкретного уровня использования различных приемов интенсификации процессов окускования.

Список литературы

1. **Швабе Г., Реллермейер Г.** Производство агломерата и его свойства // Черная металлургия, –М.: Металлургия, 1964. -№ 6. -С. 26-39.

2. **Базилевич С.В., Вегман Е.Ф.** Агломерация. –М.: Металлургия, 1967. -369 с.

3. Интенсификация производства и улучшение качества окатышей. **Ю.С. Юсфин, Н.Ф. Пашков, Л.К. Антоненко и др.** М.: Металлургия, 1994. –240 с.

УДК 621.84:519.853: 519.65

П.С. СМОЛЯНСКИЙ, канд. техн. наук, доц., Н.В. КРАВЕЦ, ассистент,
Криворожский технический университет

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ АДАПТИВНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ СПЛАЙНАМИ НА РАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

Предложенный метод позволяет эффективно находить все действительные корни гладкой функции на заданном отрезке при минимальном количестве вычислений функции. Метод базируется на адаптивной аппроксимации функции интерполяционными кубическими сплайнами на равномерных сетках, причем, чем выше гладкость функции, тем эффективнее процесс определения корней.

Запропонований метод дозволяє ефективно знаходити усі дійсні корені гладкої функції на заданому відрізку при мінімальній кількості обчислень функції. Метод базується на адаптивній апроксимації функції інтерполяційними кубічними сплайнами на рівномірних сітках, причому, чим вище гладкість функції, тим ефективніше процес визначення корінь.

Проблема и ее связь с научными и практическими задачами. Задача нахождения всех действительных корней гладкой функции на заданном интервале является весьма актуальной и в качестве составной части она входит во многие более сложные задачи. Однако имеется мало приемлемых методов для ее решения – это метод Рыбакова и родственные методы, основанные на использовании максимального модуля производной. Задача сильно усложняется, если вычисление значений функции требует существенных затрат и значительного времени, особенно в случае многократного использования алгоритма в процессе решения другой, более сложной задачи.

Примером актуальной научно-технической задачи, где систематически требуется решать указанную задачу, является задача оптимизации геометрических параметров системы "источник-датчик излучения". В работе [1] были предложены методы оптимизации геометрии системы измерения потока гамма-излучения на основании аппроксимации многомерным сплайном экспериментальных данных как функции четырех основных параметров, которые оказывают наибольшее влияние на точность измерения интенсивности регистрируемого датчиком излучения N (имп./с): $N=f(x, x_1, c, h)$, где x – расстояние от центра источника до датчика по горизонтали (см); x_1 – расстояние от центра источника до горной массы (см); c – глубина коллимационного канала источника излучения (см); h – расстояние от центра источника до датчика по вертикали (см). В результате проведенных экспериментов значения функции $f(x, x_1, c, h)$ определены на редкой сетке. По этим данным требовалось найти область, в которой изменения $N=f(x_1)$ было бы минимальным при x, c, h=const. Другими словами, требовалось найти геометрические параметры системы "источник-датчик излучения", которые обеспечили бы наиболее благоприятные условия для измерения интенсивности потока N при вариации толщины слоя горной массы. Задача сводилась, во-первых, к восстановлению значений функции $N=f(x, x_1, c, h)$, в любой точке 4-мерной области с минимальной погрешностью на основании известных значений этой функции в узловых точках; во-вторых, к поиску наиболее протяженной непрерывной линии с минимальной вариацией функции $N=f(x_1)$ для прямых x, c, h=const. Для решения первой задачи в работе [1] был использован интерполяционный кубический сплайн, и такое решение было эффективным, результаты вычислений с большой точностью совпадали с контрольными. Вторая задача была решена менее эффективно. При решении второй задачи были применены два метода: непосредственная численная оптимизация на основе полученной зависимости $N=f(x_1)$ и решение многомерной вариационной задачи. Последнее сводилось к оптимизации функционала в четырехмерном пространстве на основании алгебраических зависимостей, полученных на первом этапе. Оба решения требовали существенных вычислительных ресурсов, на решение второй задачи было затрачено более 90 % всего машинного времени. При непосредственной численной оптимизации требовалость многократно решать задачу определения всех действительных корней функции на заданном интервале.

Анализ предыдущих исследований. В настоящее время существует сравнительно немного методов, позволяющих находить все действительные корни функции на заданном интервале. Это метод Рыбакова [2] и родственные методы, основанные на использовании максимального модуля производной. Они позволяют находить конечное число действительных корней на отрезке [a, b] для уравнения с одним неизвестным f(x)=0. Сходимость итерационного процесса медленная, особенно вблизи корня. Это связано с тем, что итерационный процесс для таких методов строится на основании глобальной информации. Эффективные алгоритмы должны обладать свойством адаптивности, приспосабливаясь к конкретным особенностям задачи. Большим недостатком методов, основанных на использовании максимального модуля производной, является необходимость определения модуля максимальной производной. В случае завышения этой величины сходимость процесса нахождения корней ухудшается. Численные эксперименты показали, что для решения даже несложных уравнений с высокой точностью(10^{-8} и более) требуется порядка 10^5-10^6 вычислений функции для методов, основанных на использовании максимального модуля производной. Следует заметить, что оценка максимального модуля производной на протяженном отрезке также является непростой задачей.

Постановка задачи. Допустим, что требуется найти корни уравнения для функции *f(x)*, имеющей по крайней мере непрерывную первую производную, то есть $f(x) \in C^{(k)}[a,b],\ k \geq 1$. Будем считать, что все значения функции можно вычислить, а не получить из эксперимента. Функция вычисляется с малой погрешностью, близкой к машинной, однако вычисление функции в заданной точке требует большого времени – порядка тысячных долей секунды.

Изложение материала и результатов. Для решения задачи определения всех действительных корней функции на заданном интервале предлагается заменить заданную функцию интерполяционным сплайном *S(x)* относительно переменной $m_i=S'(x_i)$. Для кубического интерполяционного сплайна имеют место ряд оценок в зависимости от класса приближаемых функций [3]. Они выражаются в виде теорем, одним из частных случаев которых является следующий.

Если кубический интерполяционный сплайн S(x) интерполирует функцию *f(x)* на отрезке [a,b] на равномерной сетке с шагом h и удовлетворяет краевым условиям первого типа (заданы производные функции на концах отрезка), а функция *f(x)* принадлежит к классу функций $C^k[a,b]$, то имеет место оценка: $\|S(x) - f(x)\| < C_k$. Здесь класс функций $C^k[a,b]$ обозначает класс функций, имеющих непрерывные производные до k-ой включительно. Константа C_k равна: $C_2=13/48 \cdot h^2 \cdot \|f''\|$, $C_3=41/864 \cdot h^3 \cdot \|f'''\|$, $C_4=5/384 \cdot h^4 \cdot \|f^{(4)}\|$. Для k=1 константа равна: $C_1=9/8 \cdot h \cdot w(f')$, где $w(f')$ – максимальное колебание производной на всех отрезках $[x_i, x_{i+1}]$, где $h=x_{i+1}-x_i$. Здесь $\|g\|$ обозначает Чебышевскую норму: $\|g\| = \max|g(x)|,\ x \in [a,b]$.

Таким образом, если длина отрезка уменьшается в n раз, то погрешность аппроксимации уменьшается в n^k раз. Например, если n=4, то в зависимости от дифференциальных свойств функции погрешность аппроксимации уменьшается от 4 до 256 раз за один цикл алгоритма. Производная функции подобным же образом аппроксимируется производной сплайна, но показатель степени h уменьшается при этом на единицу. Кроме того, при равномерной разбивке всех отрезков на одно и то же число шагов и одинаковом типе краевых условий матрица для получения значений m_i будет постоянной для всех шагов алгоритма. Это позволяет в методе прогонки найти обратную матрицу один раз и использовать на всех этапах алгоритма. Таким образом, для гладких функций удобно использовать равномерную сетку, однако выбор оптимального количества узлов в общем виде затруднителен. Поэтому предлагается аппроксимировать функцию динамической адаптивной структурой на основании кубических интерполяционных сплайнов, реализованных на равномерных сетках. Причем все сплайны будут строиться относительно $m_i=S'(x_i)$ [3].

Алгоритм предлагаемого метода состоит из нескольких шагов.

На первом шаге осуществляется инициализация алгоритма. Она заключается в выборе количества повторений алгоритма – k(5-10), числа делений отрезков второго и последующих уровней n (n=4) и задании "рейтинга доверия" r отрезка. Последний параметр характеризует возможность наличия корня на отрезке, и для всех отрезков первого уровня он имеет одинаковое значение (3-4). Первоначально заданный отрезок [a,b] разбивается на небольшое число одинаковых отрезков первого уровня (t), и для них строится интерполяционный кубический сплайн – сплайн первого уровня. В качестве краевых условий на начальном этапе лучше всего использовать краевое условие четвертого типа [3], при этом никакой погрешности в задачу не вносится. Каждому из исходных отрезков присваивается "рейтинг доверия", который сохраняется в соответствующем элементе массива mas[i].

Следующим шагом алгоритма является нахождение отрезков текущего уровня, на которых $S(x)$ меняет знак. Для этого определяются точки минимума и максимума сплайна на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Как известно, кубический многочлен может достигать максимума и минимума либо на концах отрезка, либо в критических точках – решениях уравнения $S'(x)=0$. Восстановим уравнение сплайна по заданным величинам $y_i = S(x_i), m_i = S'(x_i)$ и $y_{i+1} = S(x_{i+1}), m_{i+1} = S'(x_{i+1})$ - другими словами построим Эрмитов сплайн на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. После этого можно решить квадратное уравнение $S'(x)=0$. Обозначим точки минимума и максимума сплайна $S(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ - x_{max} и x_{min}. В случае, если выполнено условие $S(x_{\max})\cdot S(x_{\min})\le 0$, проверим выполнение условия $f(x_{\max})\cdot f(x_{\min})\le 0$. Если это условие истинно, то на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ обязательно имеется корень уравнения $f(x)=0$ (и возможно не один).

Если решения x_{max} и x_{min} существуют и принадлежат отрезку $[x_i, x_{i+1}]$, то для проверки условия $f(x_{\max})\cdot f(x_{\min})\leq 0$ необходимо дополнительное вычисление двух значений функции на интервале $[x_i, x_{i+1}]$. Если условие $f(x_{\max})\cdot f(x_{\min})\leq 0$ выполнено, то отрезок $[x_i, x_{i+1}]$ запоминается и значение элемента mas[i] не меняется, иначе "рейтинг доверия" отрезка уменьшается на единицу. Те отрезки, для которых "рейтинг доверия" упал до нуля, из дальнейшего рассмотрения исключаются.

На третьем шаге алгоритма отрезок предыдущего уровня $[x_i, x_{i+1}]$, для которого "рейтинг доверия" еще отличен от нуля, опять разбивается на n равных отрезков, и для каждого из таких отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ строится новый кубический интерполяционный сплайн следующего уровня. В качестве краевых условий применяются условия первого типа (задана производная на концах отрезка). При этом используются известные по предыдущему этапу m_i и m_{i+1}. Кроме того, потребуется вычислить дополнительно значение функции $f(x)$ еще в n-2 точках, т. к. значения на концах отрезках $y_i=f(x)$ и $y_{i+1}=f(x_{i+1})$ уже известны по предыдущему этапу. Так поступаем для всех перспективных отрезков. Все корни быстро локализуются в небольшом числе отрезков.

Если после выполнения третьего шага не осталось отрезков с "рейтингом доверия", отличным от нуля, то осуществляется переход к последнему шагу алгоритма, иначе осуществляется возврат ко второму шагу. Алгоритм фактически продолжается до тех пор, пока не останутся только маленькие отрезки, которые обязательно содержат корни уравнения.

На последнем этапе алгоритма все корни находятся с помощью любого метода уточнения корней. В работе использовались эвристический метод Ньютона и метод половинного деления. Этот шаг завершающий, и выполняется один раз.

Таким образом, мы заменяем задачу решения уравнения $f(x)=0$ на более простую – нахождения и исследования на экстремум кубического интерполяционного сплайна.

Следует заметить, что несмотря на то, что количество отрезков теоретически может расти в геометрической прогрессии, и на последнем этапе может достигать $t\cdot n^k$, на самом деле это происходит только для первых r шагов, а дальше число отрезков практически постоянно или уменьшается.

Для выяснения степени эффективности алгоритма были проведены численные эксперименты с большим количеством различных функций. Определялось общее число вычислений функции, число вычислений функции, затраченное на уточнение корней, число вычислений функции для определения отрезков перемены знака. Отрезок, на котором определялись все действительные корни, был одинаковым для всех функций [-10,10]. При практическом решении задач типичными были такие параметры: максимальное число шагов алгоритма – 5, "рейтинг доверия" – 3, число отрезков на первом этапе алгоритма – 6, число разбиений на втором и последующих этапах - 4. Результаты расчетов приведены в таблице.

Номер функции	Функция	Общее кол-во вычислений функции	Уточнение корней	Определение максимума	Построение сплайна
1	$\prod_{i=1}^{40}(x-i/10-0.11)$	4057	160	121	3776
2	e^x+x+1	1190	19	0	1171
3	$arctg(x-1)+2\cdot x$	2502	74	5	2523
4	$0.5^x-(x-2)^2$	3341	163	5	3173
5	$f(x)=\sin(1/x), f(0)=1$	141282	20877	948	119457

Наиболее сложными оказались уравнения 1 и 5 (см. таблицу). Особенно следует отметить уравнение 5, в котором имеется бесконечное число корней. Для методов с использованием максимального модуля производной уравнения подобного типа представляют непреодолимые трудности. Единственный способ решения таких задач – исключить области бесконечного количества корней из остальной области, но для этого необходим предварительный аналитический анализ. Если же это невозможно, то все остальные известные методы практически несостоятельны. Следует заметить, что это уравнение формально не подлежит решению с помощью описываемого алгоритма. Оно имеет бесконечное количество корней вида $x_n=1/(\pi\cdot n)$, производная от функции $f(x)$ на отрезке [-10,10] неограниченна. Для такого уравнения необходимо найти максимальное число корней. Предложенный авторами метод позволил без предварительного анализа найти 721 решение этого уравнения. При этом использовались стандартные параметры, но "рейтинг доверия" был увеличен до 4.

Выводы и дальнейшее направление исследований. Предложенный метод позволяет эффективно находить все действительные корни гладкой функции на заданном отрезке с минимальным количеством вычислений функции. Метод реализует адаптивную аппроксимацию функции интерполяционными кубическими сплайнами на равномерных сетках, причем, чем выше гладкость функции, тем эффективнее процесс определения корней. В результате применения разработанных методов ко второй части задачи [1] общее время выполнения уменьшилось в 5,8 раз.

Список литературы

1. **Азарян А.А., Смолянский П.С., Смолянская С.А.** Оптимизация геометрических параметров системы оперативного контроля содержания полезного компонента в горной массе на конвейере // Оперативный контроль и управление качеством минерального сырья при добыче переработки. –Кривой Рог, 1996. –С. 48-50.
2. **Молчанов Н.Н.** Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций –Киев.: Наукова думка, 1987. –288 с.
3. **Завьялов Ю.С, Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. –М.: Наука, 1980. –252 с.