УДК 514.18

Холковський Ю.Р.

ДИСКРЕТНО-ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ МЕТОД МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТОПАРАМЕТРИЧНИХ ПРОЦЕСІВ, СИСТЕМ ТА СЕРЕДОВИЩ

Національний авіаційний університет України, м. Київ

Проектування складних технічних об'єктів, моделювання прогнозованого стану багатопараметричних систем і середовищ, наприклад екологічних, енергетичних, кліматичних, гідрологічних, геоморфологічних, геологічних систем у теперішній час є досить складною задачею в зв'язку з розвитком сучасних технологій. Такі системи або середовища досить складні і мають велику кількість різноякісних параметрів. Пошук і створення математичних моделей таких систем є актуальною задачею. Очевидно, що об'єкти, системи і середовища, що моделюються, і які не піддаються аналітичному опису, можуть бути описані за допомогою дискретних моделей. Метою даного дослідження є розробка методів і алгоритмів побудови дискретних математичних моделей складних багатопараметричних об'єктів, систем і середовищ. У даній роботі розглядається нетрадиційний підхід щодо моделювання складних технічних об'єктів, систем і середовищ, який базується на дискретно-інтерполяційному методі. Відповідні геометричні моделі будуються як деякі однопараметричні множини з використанням певних інтерполяційних схем. Оригінальність підходу полягає в тому, що під вузлами інтерполяції розуміються не точки, а більш складні об'єкти, такі як лінії, поверхні, матриці або навіть певні процеси, представлені у вигляді деяких функціоналів, як сукупності їх властивостей і параметрів. Отримані таким чином однопараметричні множини, що включають різноякісні і різноструктурні параметри, є дискретними математичними моделями багатопараметричних об'єктів, процесів і середовищ.

Ключові слова: інтерполяція, однопараметрична множина, вузол інтерполяції, дискретні функції, багатовимірна інтерполяція, дискретно-інтерполяційна матриця.

Постановка проблеми

Складні багатопараметричні процеси, системи та середовища відносяться до такого класу об'єктів та систем, що доволі складно описати аналітично, тобто у вигляді континуальної математичної моделі і, відповідно, моделювати. Наприклад, складні просторові криволінійні форми, як моделі технічних та архітектурно-будівельних об'єктів, певні виробничі та природні процеси та середовища. Цілком зрозуміло, вони характеризуються, по-перше, великою кількістю параметрів, по-друге, ці параметри, і саме це найбільш суттєво, як правило мають різноманітну структуру та різноякісні властивості. Також необхідно додати, що зазначені властивості параметрів часто мають певну анізотропію у часі або у просторі. Побудова неперервних аналітичних, тобто континуальних математичних моделей таких об'єктів, систем та середовищ практично є неможливою задачею. В той же час подібні об'єкти, системи і середовища є досить широко розповсюдженими, і вони використовуються у сучасних інженерних конструкціях, розробках, технологіях та різного роду наукових дослідженнях. Задача вивчення, класифікації та дослідження таких систем, визначення їх параметрів та їх властивостей, а також прогнозування у часі й просторі стану багатопараметричних систем і середовищ є досить актуальною задачею. Очевидно, що для розв'язання подібного роду задач необхідна розробка певних раціональних алгоритмів і методів та на їх основі подальше створення математичних моделей і, відповідно, моделювання багатопараметричних об'єктів, систем і середовищ.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Аналіз сучасної наукової літератури у галузі математичного моделювання показує, що випадки розглядання питань геометричного моделювання багатопараметричних об'єктів, систем та середовищ, побудови їх математичних моделей будь-якого типу зустрічаються досить рідко. Особливо це стосується таких багатопараметричних систем і середовищ, як, наприклад, екологічні, геологічні, енергетичні, кліматичні, гідрологічні, геоморфологічні системи тощо, які відрізняються великою кількістю різноманітних і різноякісних параметрів, і для яких аналіз і прогнозування стану є вкрай важливими практичними задачами.

Зазначимо, що алгоритми та методи геометричного моделювання складних багатопараметричних систем і середовищ з побудовою їх математичних, а саме, дискретних моделей у літературних джерелах практично відсутні. Таким чином, відповідно, можливо сформулювати наступні цілі дослідження.

Формулювання мети дослідження

Досить часто задачі геометричного моделювання об'єктів, процесів, систем і середовищ містять у собі необхідність побудови певних однопараметричних множин. Таким об'єктом може бути деяка поверхня, як геометрична модель складної просторової криволінійної технічної форми, що застосовуються у техніці, будівництві, архітектурі. Це може бути поверхня, як геометрична модель складного багатопараметричного процесу чи середовища, або ж деяка гіперповерхня, як n-вимірна модель певної системи чи середовища, що задана аналітично або дискретно. Як було зазначено вище, побудова неперервних аналітичних, тобто континуальних математичних моделей складних об'єктів, систем та середовищ практично неможлива. Вихід із такої ситуації, як правило, спонукає переходити до побудови різноманітних дискретних моделей з певним рівнем адекватності. Добре відомо, що саме дискретний спосіб надання інформації про об'єкт, систему чи середовище, що моделюються, є універсальним, і на цій основі може бути раціональним [1–2].

Аналіз і вивчення складних багатопараметричних об'єктів, процесів, систем і середовищ, розробка методів та раціональних алгоритмів побудови дискретних математичних моделей щодо моделювання таких систем та середовищ і є метою дослідження.

Викладення основного матеріалу дослідження

При моделюванні складних багатопараметричних об'єктів систем та середовищ, що не піддаються аналітичному опису часто доцільно та раціонально використовувати саме дискретні математичні моделі, що являють собою певні множини у вигляді деяких чисельних масивів, і які, в свою чергу, можуть бути надані у вигляді дискретних геометричних моделей (точкових або ж лінійних) [1–2]. Проведені дослідження показують, що подібні моделі як раз оптимально підходять для подальшої алгоритмізації, формалізації та проектування. Це пов'язано, у першу чергу, з подальшим розвитком та суттєвим ускладненням таких об'єктів, процесів, систем та середовищ, із великим рівнем їх параметричності, а також різноманітності та різноякісності їх параметрів.

В роботі пропонується оригінальний і нетрадиційний підхід щодо моделювання багатопараметричних об'єктів, процесів та середовищ, що базується на використанні дискретно-інтерполяційного методу. Розглянемо його сутність.

По-перше, у якості інструментального середовища були використані інтерполяційні поліноми Лагранжа. Зрозуміло, виникає питання: чому саме поліноми Лагранжа? На нашу думку, вибір саме інтерполяційних поліномів Лагранжа серед певної кількості інших інтерполяційних поліномів є оптимальним, і ось чому: саме обумовленість необов'язкового рівномірного розташуванням вузлів інтерполяції, можливість надання за кожною змінною своєї кількості вузлів інтерполяції. Досить важливим чинником є також і фактор стійкості та збіжності поліномів Лагранжа.

По-друге, на основі запропонованого методу та інтерполяційних поліномів Лагранжа були побудовані різноманітні інтерполяційні схеми, що характеризуються певною кількістю вузлів інтерполяції і, що є найголовнішим, саме характером самих вузлів інтерполяції. Відповідно, отримані таким чином інтерполяційні схеми дозволяють отримати, у випадку, наприклад, одновимірної інтерполяції, однопараметричну множину певних об'єктів, чи навіть процесів чи середовищ. У випадках більш складних систем та середовищ можливе й доцільне застосування багатовимірної інтерполяції.

По-третє, що є найголовнішим і складає оригінальність та нетрадиційність методу, під вузлами інтерполяції у запропонованому нами підході розуміються не точки, як у класичному математичному розумінні у випадку інтерполяції, а більш складні математичні об'єкти, а саме, лінії та поверхні, або ж, навіть, певні процеси, системи і середовища, що надані у вигляді деяких функціоналів, як сукупності їх властивостей та параметрів. Такий підхід дозволяє отримати дискретно-інтерполяційні моделі складних багатопараметричних об'єктів, процесів, систем та середовищ у вигляді деяких одно- чи багатопараметричних множин, у чому власне й полягає оригінальність запропонованого дискретно-інтерполяційного методу.

У будь-якому інтерполяційному процесі дуже важливим є фактор схеми інтерполяції. При нашому підході під схемою інтерполяції розуміється схема розташування саме вищевказаних вузлів інтерполяції, тобто у вузол інтерполяції розміщується певний дискретний чисельний масив у вигляді матриці.

У науковій та інженерній літературі взагалі відсутній такий підхід щодо моделювання складних багатопараметричних об'єктів, систем і середовищ, таких, як, наприклад, екологічні системи і середовища, екологічні ситуації, геологічні, енергетичні, кліматичні, гідрологічні, геоморфологічні процеси, явища чи середовища.

Одно- чи багатопараметричні множини, як певна сукупність, навіть, різноякісних і різноструктурних параметрів, отримані таким чином, саме й є дискретними математичними моделями певних процесів, систем і середовищ [1].

Зазначимо, що базисним елементом таких множин є певна дискретна функція або функціонал. У загальному випадку вони можуть бути надані, як дискретні чисельні масиви, розмірність яких може варіюватись. До речі, це фактор також є досить важливим, тому що підкреслює досить велику варіативність методу.

Надалі інтерполювання функцій, що можуть бути задані неявно чи параметрично, фактично зводиться до розміщення у вузлах інтерполяції, наприклад, певних рівнянь, якщо, зазвичай, можливий аналітичний спосіб завдання, чи певних дискретних масивів у вигляді матриць, та отримання деякого функціонала $\Phi(p_{i,j})$ з вектором параметрів, що включає в себе інтерполяційний параметр, координатні змінні, параметри, що характеризують форму та положення об'єктів, певні параметричні характеристики процесів, систем та середовищ, а саме: нехай $F(p_1,p_2,p_3,...,p_k,...,p_m)$ – багатопараметрична неявно задана функція. Сформуємо її у вигляді деякого функціонала $\Phi(p_{i,j})$, що заданий матрицею M[i, j]. Тоді

$$F(p_1,\ p2,p_3,...,p_k,...,p_m)=\Phi(p_{i,j})=M[i,j],$$

де $p_1,p_2,p_3,...,p_k,...,p_m$ – різноструктурні та різноякісні параметри (наприклад, показники забруднення, рівень концентрації певних речовин, врахування природних особливостей середовищ тощо), а M[i,j] (1) визначається, як:

$$M[i,\ j]=\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & \cdots & p_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m,1} & p_{m,2} & \cdots & \cdots & p_{m,n} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Тобто M[i, j] є вузловою дискретно-інтерполяційною матрицею [3].

Стає зрозумілим, що запропонований метод на основі дискретно-інтерполяційного підходу дозволяє включати в одно- чи багатопараметричну множину параметри та характеристики систем, процесів і середовищ, що мають різну структуру і, навіть, властивості.

Остання теза є надзвичайно важливою, тому що цікавим наслідком з неї випливає застосування запропонованого підходу щодо моделювання різного роду об'єктів, явищ, процесів і середовищ, що характеризуються великою кількістю різноякісних параметрів, які часто практично просто неможливо функціонально поєднати у звичайній аналітичній математичній моделі. Наприклад, саме такою, власне кажучи, й є, задача визначення прогнозованого стану певної екологічної системи чи середовища, геологічної, енергетичної, гідрологічної, геоморфологічної системи тощо і, відповідно, визначення рівня екологічної безпеки цих систем.

Цілком зрозуміло, що дискретний підхід можна вважати більш загальним, тому що від неперервно-аналітичної, себто континуальної, моделі практично завжди можна перейти до дискретної. У нашому випадку можемо перейти саме до дискретно-інтерполяційної моделі.

Це дає можливість отримати деякий функціонал $\Phi(p_{i,j})$, з вектором параметрів, що включає в себе інтерполяційний параметр, координатні змінні, параметри, що характеризують стан, структуру, положення екологічних, геологічних, гідрологічних, геоморфологічних, енергетичних об'єктів, певні параметричні характеристики процесів та систем [3].

Розглядаючи (1) у якості певного вузла інтерполяції, використаємо інтерполяційний поліном Лагранжа і в випадку одновимірної інтерполяції отримаємо $\Phi(p_{i,j})$ (2) як:

$$\Phi(p_{i,j})=\sum_{i=0}^{n-1} M_i(i,\ j)\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1}\frac{u-u_j}{u_i-u_j}\ , \quad (2)$$

де u – параметр інтерполяції, наприклад, певний вектор спрямованості; n – кількість вузлів інтерполяції.

Вираз $\Phi(p_{i,j})$, що являє собою узагальнену дискретно-інтерполяційну матрицю [3], і є дискретною геометричною моделлю певної системи чи середовища.

Отже, при використанні запропонованого дискретно-інтерполяційного методу інтерполяційний поліном Лагранжа (3) набуває такого вигляду:

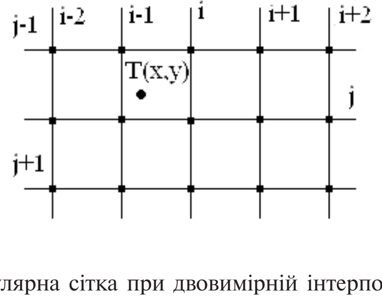
$$\Phi(u)_n = \sum_{i=0}^{n-1} F_i(p_1, p_2, \ldots, p_m) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n-1} \frac{u-u_j}{u_i-u_j}, \quad (3)$$

де u – параметр інтерполяції; $F(p_1,p_2,...p_k)$ – вузлова функція; p_1, p_2, ... p_k – параметри вузлової функції; n – кількість вузлів інтерполяції.

Багатопараметричні об'єкти, системи і середовища, на прикладі екологічних, геологічних, гідрологічних, геоморфологічних, енергетичних тощо систем, можуть бути настільки складними структурно й параметрично, що використання апарата одновимірної інтерполяції може виявитися недостатнім. У таких випадках пропонується використати апарат, наприклад, двовимірної інтерполяції. Враховуючи саме запропонований дискретно-інтерполяційний метод геометричного моделювання, ось у чому полягає його сутність.

Вид степеневого многочлена $\Phi_{m,n}(u,v)$ степеня m по u та n по v для вирішення певної прикладної чи інженерної задачі, наприклад, можна знайти, визначивши значення функціонала F у довільній точці з параметрами (u,v). Геометрично це означає, що при двовимірній інтерполяції через кожну вузлову точку буде проходити деяка поверхня $z=\Phi_{m,n}(u, v)$.

Якщо побудувати регулярну сітку та задати у вузлах сітки значення функції z, то вся область розпадається на mn прямокутників, в один з яких і потрапить точка (u,v) (рисунок).



Регулярна сітка при двовимірній інтерполяції

Наступним кроком є інтерполяція при різних u_i, але фіксованих v_j, після чого необхідно перейти до v_{j+1} і повторити знову всю процедуру. Отже, отримуємо двовимірну інтерполяцію $\Rightarrow P_{m,n}(x, y)$ степеня m по x і степеня n по y z(x, y) у довільній точці T(x, y).

Через вузлові точки проводиться деяка поверхня $z=P_{m,n}(x, y)$. Таким чином можемо отримати таку формулу (4) двовимірної інтерполяції за Лагранжем для побудови дискретних моделей складних багатопараметричних об'єктів, систем та середовищ:

$$P_{m,n}(x,y) = \\ = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n-1} z(x_j, y_j) \prod_{\substack{p=0 \\ p\neq i}}^{m-1} \prod_{\substack{q=0 \\ q\neq j}}^{n-1} \frac{(x-x_i)(y-y_j)}{(x_p-x_i)(y_q-y_j)}. \quad (4)$$

Зазначимо, що у найбільш загальному випадку при n-вимірній інтерполяції через вузлові точки проходить деяка гіперповерхня, що являє собою многочлен n змінних, а формула буде мати складніший, але, зрозуміло, аналогічний вигляд.

Інтерполяційний поліном, як відомо, фактично є зрізаним рядом (аналогом ряду Тейлора) у наслідок того, що він обмежений степенем n. Звідки випливає, що важливим фактором є введення певного критерію інтерполяції. Тому для збіжності відповідного аналога ряду Тейлора необхідно спадання абсолютної величини коефіцієнта при u з ростом степеня u. Як відомо, критерієм гарної апроксимації у випадку багатовимірної інтерполяції є спадання абсолютних величин похідних по всім змінним із зростанням їх порядку.

Отже, запропонований метод на основі дискретно-інтерполяційного підходу може бути досить ефективним при моделюванні об'єктів, процесів і середовищ, що характеризуються великою кількістю різноструктурних і різноякісних параметрів. Наприклад, при моделюванні багатопараметричного середовища, яким є певна, наприклад, екологічна система, можуть бути розглянуті задачі якісного й кількісного оцінювання впливу забруднення на навколишнє середовище з часом і у просторі, прогнозованого стану цієї та подібних систем. Відповідно, можна сформулювати такі перспективні задачі щодо вивчення та моделювання екологічних ситуацій у певних екологічних, геологічних, енергетичних, гідрологічних, геоморфологічних тощо системах чи середовищах:

– аналіз, наприклад, екологічного чи іншого стану певного середовища;

– визначення загального рівня шкідливості різного роду систем і середовищ;

– визначення й локалізація місць найбільшого та найменшого забруднення цих систем;

– динамічне та довгострокове прогнозування стану і, наприклад, забруднення навколишньої території.

Висновки

Таким чином, запропонований метод на основі дискретно-інтерполяційного підходу дає можливість моделювати складні багатопараметричні об'єкти, процеси, системи і середовища, що характеризуються великою кількістю різноманітних і різноякісних параметрів і властивостей, прогнозувати поведінку систем і середовищ, передбачати розвиток процесів у них.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Холковський Ю.Р.* Інтерполяція дискретних масивів у загальному випадку як спосіб моделювання багатопараметричних об'єктів та процесів // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – Вип. 4. – Т. 51. – С.156-160.

2. *Холковский Ю.Р.* Дискретно-интерполяционный подход при моделировании многопараметрических экологических систем // Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики: Сборник материалов 9-ой Межд. конф. – Минск. – 2013. – С.268-272.

3. *Холковський Ю. Р.* Дискретно-інтерполяційна екоматриця, як геометрична модель багатопараметричних процесів та систем в екології // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. «Прикладна геометрія та інженерна графіка». – Мелітополь: ТГАТУ, 2012. – Вип. 4 – Т.55. – С. 308-311.

Надійшла до редакції 10.10.2016

Рецензент: д.т.н., проф. Ковальов Ю.М.

ДИСКРЕТНО-ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, СИСТЕМ И СРЕД

Холковский Ю.Р.

Проектирование сложных технических объектов, моделирование прогнозируемого состояния многопараметрических систем и сред, например экологических, энергетических, климатических, гидрологических, геоморфологических, геологических систем в настоящее время является довольно сложной задачей в связи с развитием современных технологий. Такие системы или среды достаточно сложны и имеют большое количество разнокачественных параметров. Поиск и создание математических моделей таких систем является актуальной задачей. Очевидно, что моделируемые объекты, системы и среды, которые не поддаются аналитическому описанию, могут быть описаны с помощью дискретных моделей. Целью данного исследования является разработка методов и алгоритмов построения дискретных математических моделей сложных многопараметрических объектов, систем и сред. В настоящей работе рассматривается нетрадиционный подход к моделированию сложных технических объектов, систем и сред, основанный на дискретно-интерполяционном методе. Соответствующие геометрические модели строятся как некоторые однопараметрические множества с использованием определенных интерполяционных схем. Оригинальность подхода заключается в том, что под узлами интерполяции понимаются не точки, а более сложные объекты, такие как линии, поверхности, матрицы или даже определенные процессы, представленные в виде некоторых функционалов, как совокупности их свойств и параметров. Однопараметрические множества, полученные таким образом, и включающие разнокачественные и разноструктурные параметры, являются дискретными математическими моделями многопараметрических объектов, процессов и сред.

Ключевые слова: интерполяция, однопараметрическое множество, узел интерполяции, дискретные функции, многомерная интерполяция, дискретно-интерполяционная матрица.

DISCRETE INTERPOLATION METHOD FOR MODELING MULTIPARAMETRIC PROCESSES, SYSTEMS AND ENVIRONMENTS

Kholkovsky Yu. R.

The design of complex technical objects, the modeling of the predicted state of multiparametric systems and environments, for example, ecological, energy, climatic, hydrological, geomorphological, geological systems, is currently quite a challenge in connection with the development of modern technologies. Such systems or environments are quite complex and have a large number of different quality parameters. Finding and creating mathematical models of such systems is an urgent task. Obviously, simulated objects, systems and environments that can not be analytically described can be described using discrete models. The purpose of this study is the development of methods and algorithms for constructing discrete mathematical models of complex multiparametric objects, systems, and environments. In this paper, we consider a non-traditional approach to the modeling of complex technical objects, systems and environments, based on the discrete interpolation method. The corresponding geometric models are constructed as some one-parameter sets using certain interpolation schemes. The originality of the approach is that under the interpolation nodes, not points, but more complex objects, such as lines, surfaces, matrices or even certain processes, represented as some functionals, as a collection of their properties and parameters, are meant. Single-parameter sets obtained in this way and including different-quality and difference-structured parameters are discrete mathematical models of multiparametric objects, processes and environments.

Keywords: interpolation, one-parameter set, the host interpolated, discrete features, multivariate interpolation, discrete-interpolation matrix.