УДК 519.8

Ус С.А. [а], Станіна О.Д. [б]

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН З ДОДАТКОВИМИ ЗВ'ЯЗКАМИ

[а] ДВНЗ «Національний гірничий університет», м. Дніпро, Україна
[б] ДВНЗ «Український державний хіміко-технологічний університет», м. Дніпро, Україна

Задачі розміщення виробництва активно досліджуються протягом більше ніж ста років, але до цього часу вони не втратили своєї актуальності. Наприклад, хоча запропонована велика кількість моделей і методів розв'язування дискретних задач розміщення, практично не має досліджень континуальних задач. В той же час розвиток виробництва потребує вирішення цілої низки проблем, які описуються саме такими моделями. Серед них задачі розміщення багатоетапного виробництва з метою мінімізації сумарної вартості доставки продукції та сировини і забезпечення покриття певної зони обслуговування. Тут вихідна множина неперервна за своєю природою, а існуючі дискретні моделі потребують великої кількості спрощень, які негативно впливають на кінцевий результат. В статті розглянуто задачу оптимального розбиття множин із додатковими зв'язками та розміщенням центрів підмножин, яка є математичною моделлю двохетапної континуальної задачі розміщення-розподілу. Складність дослідження полягає в тому, що математична модель включає в себе як дискретну так і неперервну частини, а тому вимагає комбінованих методів розв'язку. Необхідність розробки таких алгоритмів безперечна, оскільки за подібними моделями описують цілу низку практично важливих задач, зокрема задачі розміщення пунктів збору та переробки природної сировини. Крім того, розглянута задача є розвитком теорії оптимального розбиття множин, і тому має також теоретичне значення. Особлива увага була звернута до підходу до розв'язку цієї задачі. Він полягає в перетворенні вихідної задачі в задачу нескінченновимірного математичного програмування через введення характеристичних функцій, а потім в задачу скінченновимірної оптимізації за допомогою функції Лагранжа. Надано алгоритм розв'язування задачі оптимального розбиття множин з додатковими зв'язками. Він може мати цінність як з точки зору практичного застосування для розв'язування прикладних задач, так і з точки зору подальшого розвитку теорії оптимального розбиття множин.

Ключові слова: задачі розміщення-розподілу, оптимізація, задачі оптимального розбиття множин, багатоетапні задачі, математичні моделі.

Постановка проблеми

Задача оптимального розміщення об'єктів в заданій області – одна з найбільш актуальних і активно досліджуваних проблем в області дослідження операцій. Її вивченню присвячена велика кількість робіт і наразі сформульовані різні класи і типи таких задач. Однак, в більшості своїй вони присвячені дослідженню дискретних задач, або зведенню до них. В той же час дослідження задач розміщення-розподілу у яких множина можливих місць розміщення об'єктів і споживачів є континуальними майже не проводилися.

В даній роботі досліджується багатоетапна задача розміщення підприємств, в якій множина можливих місць розміщення підприємств одного з етапів континуальна, а множина можливих місць розміщення підприємств іншого етапу – дискретна.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Велику кількість вітчизняних і зарубіжних публікацій було присвячено вивченню дискретних і неперервних задач розміщення. Огляд математичних моделей і підходів до розв'язання таких задач, можна побачити в L. Cooper, Z. Drezner [1,2]. Також, такі задачі досліджувалися у роботах В.А. Трубіна [3].

Слід зауважити, що окремі дискретні задачі розміщення на сьогоднішній день вже досить добре вивчені, в той час як неперервні задачі розміщення вимагають подальшого вивчення і розширення, оскільки крім практичної користі, також дозволяють отримати теоретично обґрунтований розв'язок деяких класів прикладних задач.

На сьогоднішній день у зв'язку з розвитком електронно-обчислювальної техніки і появи нових джерел статистичних даних, а також систем їх візуалізації, з'являється можливість побудувати більш складні моделі задач розміщення-розподілу, які охоплюють широке коло реальних задач. І ця ситуація вимагає подальшого розвитку теорії задач розміщення-розподілу.

В даний час одним з напрямків досліджень, які активно розвиваються, є неперервні задачі оптимального розбиття множин (ОРМ). Вперше, вони були сформульовані у 60-х роках XX сторіччя в роботах H.W. Corley та S.D. Roberts, Е.М. Кисельової та І.В. Бейко. Зараз дослідження в даному напрямі активно ведуться науковою школою О.М. Кісельової [4,5]. Ці дослідження стосуються подальшого узагальнення теорії ОРМ та розповсюдження її на нові класи задач. Одним із таких напрямів є неперервні задачі ОРМ при наявності додаткових зв'язків та попередньо невідомого розміщення центру підмножин.

Окремо необхідно відзначити перспективність розгляду багатоетапних задач розміщення підприємств з неперервно-розподіленим ресурсом, як різновид неперервних задач ОРМ. Серед авторів, що займались дискретними багатоетапними задачами, слід відзначити В.Л. Береснева, Е.Х. Гімаді, Ю.А. Кочетова, В.А. Трубіна, Д.Б. Юдіна [3,6] та інших.

Формулювання цілей дослідження

Метою даної роботи є створення алгоритму розв'язання задачі оптимального розбиття множин з додатковими зв'язками, як різновиду нескінченномірної багатоетапної задачі розміщення.

Викладення основного матеріалу дослідження

Змістовну постановку задачі оптимального розбиття множин з додатковими зв'язками (ОРМДЗ) можна сформулювати у такий спосіб. Припустимо маємо деяке виробництво, що пов'язане з суб'єктами, які отримують сировину від постачальників неперервно розподілених в області, переробляють його і відправляють для реалізації (або подальшої переробки) в пункти, розташування яких заздалегідь відомо. Пункти, що переробляють сировину, будемо називати пунктами первинного перероблення або підприємствами першого етапу, а пункти подальшого перероблення – подальшого перероблення або підприємствами другого етапу. Припустимо також, що відомо: попит b_j^{II} на продукцію для підприємствами другого етапу, j=1,2,...,M; запас c(x) ресурсу в кожній точці області Ω; вартість доставки одиниці ресурсу , i=1,2,...,N – з точки x в пункт первинного перероблення τ_i^I; вартість перевезення одиниці продукту $c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I,\tau_j^{II}\right)$ з пункту первинного перероблення τ_i^I в пункт τ_j^{II}.

Відзначимо, що кожен постачальник сировини $x\in\Omega$ пов'язаний тільки з одним підприємством першого етапу, i=1,2,...,N, який в свою чергу може бути пов'язаний з одним або декількома підприємствами другого етапу, j=1,2,...,M.

Необхідно розмістити підприємства першого етапу, визначити зони обслуговування для кожного з них та обсяги перевезень між підприємствами першого та другого етапів таким чином, щоб забезпечити мінімальну сумарну вартість доставки сировини і кінцевої продукції.

Для формування математичних постановок названої та наступних двоетапних задач ОРМДЗ введемо такі позначення: Ω – область, в якій розміщується підприємства; N – необхідна кількість підприємств I етапу; M – кількість підприємств II-го етапу; b_j^{II} – потужність j-го підприємства II-го етапу; $c_i^I\left(x,\tau_i^I\right)$ – вартість доставки одиниці сировини з точки $x\in\Omega$ до i-го підприємства I етапу; $c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I,\tau_j^{II}\right)$ – вартість доставки одиниці сировини від i-го підприємства I етапу до j-го підприємства II етапу; ρ(x) – кількість ресурсу в точці x області Ω; $\tau_i^r=\left(\tau_{i1}^r,\tau_{i2}^r\right)$ – координати i-го підприємства r-го етапу; v_{ij} – обсяг продукції, що постачається від i-го підприємства I етапу до j-му підприємству II етапу.

Нехай Ω – замкнута, обмежена, опукла, вимірна за Лебегом множина евклідового простору E^n. Введемо до розгляду множину всіх можливих розбиттів множини Ω на N підмножин, що не перетинаються:

$$\sum\nolimits_{\Omega}^{N}=\left\{\begin{array}{l}(\Omega_1,...,\Omega_N):\bigcup\limits_{i=1}^{N}\Omega_i=\Omega,\ \left(\Omega_i\cap\Omega_j\right)=\varnothing,\\ i\neq j,\ i,j=1,...,N\end{array}\right\}.$$

Тоді математична модель задачі ОРМДЗ може бути записана у такий спосіб:

Задача А. Потрібно знайти таке розбиття множини Ω на N вимірних по Лебегу підмножин $\Omega_1,\Omega_2,...,\Omega_N$ (серед яких можуть бути й порожні), визначити координати $\tau_1^I,\ldots,\tau_N^I$ центрів цих підмножин та такі обсяги перевезень $v_{11},...,v_{NM}$, які забезпечують мінімум функціоналу:

$$F\left(\left\{\Omega_1,...,\Omega_N\right\},\left\{\tau_1^I,...,\tau_N^I\right\},\left\{v_{11},...,v_{NM}\right\}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)dx+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})v_{ij}\ , \quad (1)$$

при обмеженнях:

$$\int_{\Omega_i}\rho(x)dx=\sum_{j=1}^{M}v_{ij}\ ,\ i=1,2,...,N, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{N}v_{ij}=b_j^{II}\ ,\ j=1,2,...,M, \quad (3)$$

$$\left\{\Omega_1,...,\Omega_N\right\}\in\sum\nolimits_{\Omega}^{N}\ ,$$

$$v_{ij}\ge 0,\ i=1,2,...,N,\ j=1,2,...,M,$$

$$\tau^I=(\tau_1^I,\tau_2^I,...,\tau_N^I),\quad \tau^I\in\Omega^N. \quad (4)$$

Тут $x=(x^{(1)},...,x^{(n)})\in\Omega$; b_j^{II} , j=1,2,...,M – задані дійсні невід'ємні числа.

Функції $c_i^I(x,\tau_i^I)$, i=1,2,...,N – дійсні, обмежені, вимірні з аргументу x на Ω, та опуклі з τ на Ω для всіх; $\rho(x)$ – дійсна функція, що інтегрується і визначена на множині Ω; τ_j^{II} , j=1,2,...,M – задані точки області Ω, $c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})$, i=1,2,...,N, j=1,2,...,M – задані дійсні, обмежені невід'ємні функції.

Тут обмеження (2)–(3) описують баланс між потужностями підприємств першого та другого етапів, отже мають бути виконані умови розв'язності задачі, а саме:

$$\sum_{j=1}^{M}b_j^{II}=\int_{\Omega}\rho(x)dx\ .$$

Опишемо алгоритм розв'язку задачі А, заснований на єдиному підході до вирішення подібних задач. Він полягає в перетворенні вихідних задач в задачі нескінченновимірного математичного програмування, за допомогою характеристичних функцій, а потім в скінченномірну задачу оптимізації за допомогою функціоналу Лагранжа.

Для цього розглянемо таку розширену функцію:

$$G\left(\tau,v,\psi,\eta\right)=\int_{\Omega}\min_{k=1,N}\left(c_i^I(x,\tau_i^I)+\psi_i\right)\rho(x)dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left(c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})+\eta_j-\psi_i\right)v_{ij}-\sum_{j=1}^{M}b_j^{II}\eta_j+$$

$$+D\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\max{}^2\left(0;-v_{ij}\right)+$$

$$+D\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\max{}^2\left(0;\psi_i+\eta_j+c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})\right),$$

де D – досить велике додатне число.

Крок 0.

1. Область Ω заключаємо в паралелепіпед П, сторони якого паралельні осям декартової системи координат, вважаємо $\rho(x)=0$, при $x\in П\backslash\Omega$. Паралелепіпед П покриваємо прямокутної сіткою і задаємо початкове наближення $\left(\tau^I,\psi\right)=\left(\tau^{I(0)},\psi^{(0)}\right)$ та $(v,\eta)=(v_0,\eta_0)$.

2. Обчислюємо значення $\lambda^{(0)}(x)$ в вузлах сітки наступним чином:

$$\lambda_i(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } c_i^I(x,\tau_i^I)+\psi_i=\\ =\min\limits_k\left(c_k^I(x,\tau_k^I)+\psi_i\right), & \\ 0, & \text{в інших випадках,}\end{cases} \quad (5)$$

при $\tau^I=\tau^{I(0)}$, $\psi=\psi^{(0)}$.

3. Обчислюємо значення градієнтів в вузлах сітки за формулами:

$$g^{\tau}=\int_{\Omega}\rho(x)g_{c_i^I}^{\tau_i}\lambda_i(x)dx+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}g_{c^{II}}^{\tau_i}v_{ij}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}2D\max\left(0;\psi_i+\eta_j-c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})\right), \quad (6)$$

$$g^{\psi}=\int_{\Omega}\rho(x)\lambda_i(x)dx-\sum_{j=1}^{M}v_{ij}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}2D\max\left(0;\psi_i+\eta_j-c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})\right), \quad (7)$$

де $g^{\tau^{\varnothing}}$ – і-а компонента N-мірного вектора узагальненого градієнта g_i^{τ} функції c_i^{I} в точці τ^I, $g^{\tau^{\varnothing}{}_i}$ – і-а компонента N-мірного вектора узагальненого градієнта $g_{c^{II}}^{\tau_i}$ функції c_{ij}^{II} в точці τ^I.

$$g^{\eta} = \sum_{i=1}^{N} v_{ij} - b_j^{II} + \sum_{j=1}^{M} 2D\max\left(0;\psi_i + \eta_j\right), \quad (8)$$

$$g^{v} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij}(\tau_i^{I}, \tau_j^{II}) - \eta_j + \psi_i - 2D\max\left(0;-v_{ij}\right), (9)$$

при $\tau^I=\tau^{I(0)}$, $\lambda=\lambda^{(0)}$, $l=l^{(0)}$, $v=v^{(0)}$, $\eta=\eta^{(0)}$.

4. Обираємо початковий пробний крок $h_0>0$ r-алгоритму і знаходимо:

$$\tau^{I(0)} = P_{\Pi}\left(\tau^{I(0)} - h_0 g^{\tau}(\tau^{I(0)}, \psi^{(0)}, \eta^{(0)}, v^{(0)})\right);$$

$$\psi^{I(0)} = \psi^{I(0)} + h_0 g^{\psi}(\tau^{I(0)}, \psi^{(0)}, \eta^{(0)}, v^{(0)});$$

$$\eta^{I(0)} = \eta^{I(0)} + h_0 g^{\eta}(\tau^{I(0)}, \psi^{(0)}, \eta^{(0)}, v^{(0)});$$

$$v^{I(0)} = v^{I(0)} + h_0 g^{v}(\tau^{I(0)}, \psi^{(0)}, \eta^{(0)}, v^{(0)}),$$

де P_{Π} – оператор проектування на Ω.

Нехай вже проведено l=(l–1) крок алгоритму, опишемо l-ий крок.

Крок l.

1. Обчислюємо значення $\lambda^{(l)}(x)$ в вузлах сітки за формулою (5).

2. Обчислюємо значення градієнтів в вузлах сітки за формулами (6)–(9) при $\tau^I=\tau^{I(l-1)}$, $\psi=\psi^{I(l-1)}$, $\lambda=\lambda^{(l-1)}$, $v=v^{(l-1)}$, $\eta=\eta^{(l-1)}$.

3. Проводимо l-ий крок r-алгоритму і знаходимо:

$$\tau^{I(l)} = P_{\Pi}\left(\tau^{I(l)} - h_{l-1} g^{\tau}\left(\tau^{I(l-1)}, \psi^{(l-1)}, \eta^{(l-1)}, \nu^{(l-1)}\right)\right);$$

$$\psi^{I(l)} = \psi^{I(l-1)} + h_{l-1} g^{\psi}\left(\tau^{I(l-1)}, \psi^{(l-1)}, \eta^{(l-1)}, \nu^{(l-1)}\right);$$

$$\eta^{I(l)} = \eta^{I(l-1)} + h_{l-1} g^{\psi}\left(\tau^{I(l-1)}, \psi^{(l-1)}, \eta^{(l-1)}, \nu^{(l-1)}\right);$$

$$\nu^{I(l)} = \nu^{I(l-1)} + h_{l-1} g^{v}\left(\tau^{I(l-1)}, \psi^{(l-1)}, \eta^{(l-1)}, \nu^{(l-1)}\right),$$

де h_l – кроковий множник, вибір якого здійснюється з умови мінімуму у напрямку B_l^{τ}, B_l^{ψ}, B_l^{η}, B_l^{v} – оператори перетворення простору в основний простір E_N, що мають вигляд:

$$B_l^{w} = B_{l-1}^{w}\left(I + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\theta_{l-1}^{w}\left(\theta_{l-1}^{w}\right)^{T}\right),$$

де w – відповідна змінна, I – одинична матриця відповідної розмірності, θ_{l-1}^{w} – відповідає нормованому вектору різниці двох послідовних псевдоградієнтів в перетвореному просторі, тобто:

$$\theta_{l-1}^{w} = \frac{\left(B_{l-1}^{w}\right)^{T}\begin{pmatrix} g_P^{w}\left(\tau^{(l)}, \psi^{(l)}, \eta^{(l)}, \nu^{(l)}\right) - \\ -g_P^{w}\left(\tau^{(l-1)}, \psi^{(l-1)}, \eta^{(l-1)}, \nu^{(l-1)}\right) \end{pmatrix}}{\left\|\left(B_{l-1}^{w}\right)^{T}\begin{pmatrix} g_P^{w}\left(\tau^{(l)}, \psi^{(l)}, \eta^{(l)}, \nu^{(l)}\right) - \\ -g_P^{w}\left(\tau^{(l-1)}, \psi^{(l-1)}, \eta^{l-1}, \nu^{(l-1)}\right) \end{pmatrix}\right\|},$$

за умови, що

$$\left\|\left(B_{(l-1)}^{w}\right)^{T}\begin{pmatrix} g_P^{w}\left(\tau^{(l)}, \psi^{(l)}, \eta^{(l)}, \nu^{(l)}\right) - \\ -g_P^{w}\left(\tau^{(l-1)}, \psi^{(l-1)}, \eta^{(l-1)}, \nu^{(l-1)}\right) \end{pmatrix}\right\| \ge \varepsilon_0, \text{ та}$$

$\theta_{l-1}^{w}=0$ в інших випадках. Тут ε_0 – точність надання нуля ЕОМ.

4. Якщо умова

$$\left\|\begin{matrix} \left(\tau^{(l)}, \psi^{(l)}, \eta^{(l)}, \nu^{(l)}\right) - \\ -g_P^{w}\left(\tau^{(l-1)}, \psi^{(l-1)}, \eta^{(l-1)}, \nu^{(l-1)}\right) \end{matrix}\right\| \le \varepsilon$$

а, $\varepsilon>0$ виконується, то кінець алгоритму, якщо ні – повертаємося до кроку l.

Висновки

Проблеми розміщення підприємств є сприятливим підґрунтям для розвитку нових методів моделювання, інноваційних алгоритмів розв'язку і цікавих додатків. На сьогодні практично немає досліджень нескінченномірних багатоетапних задач розміщення через їх складність. В даній роботі запропоновано алгоритм розв'язання таких задач, який може мати цінність як з точки зору практичної значущості для вирішення прикладних задач, так і з точки зору подальшого розвитку теоретичних питань.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Drezner, Z., Hamacher H.W.* Facility location. Application and Theory – Springer, 2004. – 457 p.

2. *Farahani R.Z., Hekmatfar M.* Facility Location: Concepts, Models, Algorithms and Case Studies – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009. – p.549.

3. *Trubin V.A., Sharifov F.A.* Simple multistage location problem on a treelike network // Cybernetics and Systems Analysis. November–December 1992. – Vol. 28. – Is. 6. – p.912-917.

4. *Киселева Е.М., Шор Н.З.* Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: Монография – К.: Наукова думка, 2005. – 564 с.

5. *Киселева Е.М., Коряшкина Л.С., Ус С.А.* Теория оптимального разбиения множеств в задачах распознавания образов, анализа и идентификации систем. – Д.: НГУ, 2015. – 270 с.

6. *Кочетов Ю.А., Панин А.А., Плясунов А.В.* Сравнение метаэвристик для решения двухуровневой задачи размещения предприятий и фабричного ценообразования // Дискретн. анализ и исслед. Опер. – 2015. – Т. 22. – № 3. – С.36-54.

Надійшла до редакції 14.10.2017

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

Ус С.А., Станина О.Д.

Задачи размещения производства активно исследуются в течение более чем ста лет, но до настоящего времени они не потеряли своей актуальности. Например, хотя предложено большое количество моделей и методов решения дискретных задач размещения, практически нет исследований континуальных задач. В то же время развитие требует решения целого ряда проблем, которые описываются именно такими моделями. Среди них задачи размещения многоэтапного производства с целью минимизации суммарной стоимости доставки продукции и сырья и обеспечения покрытия определенной зоны обслуживания. Здесь исходное множество непрерывно по своей природе, а существующие дискретные модели требуют большого количества упрощений, которые негативно влияют на конечный результат. В статье рассмотрена задача оптимального разбиения множеств с дополнительными связями и размещением центров подмножеств, которая является математической моделью двухэтапной континуальной задачи размещения-распределения. Сложность исследования заключается в том, что математическая модель включает в себя как дискретную так и непрерывную части, а потому требует комбинированных методов решения. Необходимость разработки таких алгоритмов бесспорна, поскольку подобными моделями описывают целый ряд практически важных задач, в частности задачи размещения пунктов сбора и переработки природного сырья. Кроме того, рассмотренная задача развивает теорию оптимального разбиения множеств, и поэтому имеет также теоретическое значение. Особое внимание было уделено подходу к решению этой задачи. Он заключается в преобразовании исходной задачи в задачу бесконечномерного математического программирования через введение характеристических функций, а затем в задачу конечномерной оптимизации с помощью функции Лагранжа. Представлен алгоритм решения задачи оптимального разбиения множеств с дополнительными связями. Он может иметь ценность как с точки зрения практического применения для решения прикладных задач, так и с точки зрения дальнейшего развития теории оптимального разбиения множеств.

Ключевые слова: задачи размещения-распределения, оптимизация, задачи оптимального разбиения множеств, многоэтапные задачи, математические модели.

ALGORITHM TO SOLVE A PROBLEM OF OPTIMUM SEPARATION OF SETS WITH ADDITIONAL COUPLINGS

Us S.A. [a], Stanina O.D. [b]

[a] **National Mining University, Dnipro, Ukraine**

[b] **Ukrainian State University of Chemical Technology, Dnipro, Ukraine**

Problems of manufacturing arrangement have been considered for more than a century. However, they are still topical. For instance, despite the fact that a number of models and techniques to solve discrete problems of arrangement have been proposed, studies concerning continual problems are not practically available. At the same time, production development involves solution of a variety of problems which are described with the help of such models. Problems of multistage production to minimize total cost of product delivery and raw material as well as to provide coverage of a certain service area are among them. In this context, original set is continuous by its nature, and available discrete models need a great number of simplifications being detrimental to the final result. The paper considers a problem of optimum separation of sets with additional connections and arrangement of centres of subsets, which is a mathematical model of two-stage continual location-allocation problem. Complexity of the studies is that a mathematical model involves both discrete part and continual one thus requiring combined solution techniques. The necessity to develop such algorithms is undisputable since such models describe a number of important practical problems including those concerning the arrangement of points for natural raw material accumulating and processing. Moreover, the considered problem develops the theory of optimum separation of sets, and so it is important in terms of theory as well. Specific attention has been paid to the approach for the problem solving. The approach is to transform the original problem into a problem of infinite-dimensional mathematical programming and then into a problem of finite-dimensional optimization with the help of Lagrange function. Algorithm to solve a problem of optimum separation of sets with additional connections has been represented. The algorithm may be important from the viewpoint of its application to solve applied problems as well as from the viewpoint of further development of the theory of optimum separation of sets.

Keywords: location-allocation problem, optimization, optimal partitioning sets problem, multi-stage problem, mathematical models.

REFERENCES

1. Drezner Z., Hamacher H.W. *Facility location. Application and Theory*, Springer, 2004, 457 p.

2. Farahani R.Z., Hekmatfar M. *Facility Location: Concepts, Models, Algorithms and Case Studies*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009. 549 p.

3. Trubin V.A., Sharifov F.A. *Simple multistage location problem on a treelike network,* Cybernetics and Systems Analysis. November-December, 1992, vol. 28, Issue 6, pp. 912-917.

4. Kiseliova E.M., Shor N.Z. *Nepreryvnye zadachi optimal'nogo razbienija mnozhestv: teorija, algoritmy, prilozhenija: Monografija* [Continuous problems of optimum set separation: theory, algorithms, applications: Monograph], K.: Naukova dumka, 2005, 564 p. (*in Russian*).

5. Kiseliova E.M., Koriashkina L.S., Us S.A. *Teorija optimal'nogo razbienija mnozhestv v zadachah raspoznavanija obrazov, analiza i identifikacii sistem* [Theory of optimum set separation in the problems of image identification, analysis, and identification of systems] Ministry of education and science of Ukraine; National Mining University, D.: NMU, 2015, 270 p. *(in Russian).*

6. Kochetov Yu.A., Panin A.A., Plyasunov A.V. *Sravnenie metajevristik dlja reshenija dvuhurovnevoj zadachi razmeshhenija predprijatij i fabrichnogo cenoobrazovanija* [Comparison of metaheuristics for the bilevel facility location and mill pricing problem], Diskretn. Anal. Issled. Oper., 2015, vol. 22, Issue 3, pp. 36-54. *(in Russian).*