УДК 539.3

Дисковский А.А., Малая Ю.А.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С ОТВЕРСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Национальная металлургическая академия Украины, г. Днепр, Украина

Для исследования влияния произвольного свободного отверстия на частоты собственных колебаний прямоугольных пластин используется вариационный принцип Рейсснера. Прогиб и моменты аппроксимируются независимо друг от друга R-функциями с неопределенными параметрами так, чтобы выполнялись граничные условия на краях пластинки. Граничные условия на свободном отверстии приняты в форме, предложенной Пуассоном. Предлагаемый алгоритм был реализован для определения влияния свободного центрального кругового отверстия в квадратной пластинке на основной тон ее колебаний. При этом для простоты в разложениях было оставлено по одной аппроксимирующей функции. Результаты были сравнены с результатами, полученными в работе Р. Негарта и Т. Ариман. Наибольшее расхождение, около 16%, имеет место при малых отверстиях, с увеличением размера отверстия оно падает до 10%. С целью проверки реализованного алгоритма была решена тестовая задача определения собственной частоты сплошной шарнирно опертой квадратной пластинки. Расхождение результатов с точным решением составило меньше 2%. Предложенный алгоритм определения собственной частоты колебаний прямоугольных пластин со свободным отверстием имеет ряд преимуществ по сравнению с методами, использованными в работах У. Кристенсана, В. Соедела и Р. Негарта. Например, он не накладывает ограничений на размер, форму и расположение отверстия, легко распространяется на случаи нескольких отверстий и других условий закрепления пластины и отверстия. При этом, необходимо отметить недостаток, который имеет место при использовании принципа Рейсснера в задачах о колебаниях. В то время как метод Рэлея-Ритца дает значение частот, которые больше соответствующих точных значений, принцип Рейсснера этого не гарантирует. Вычисленные частоты могут быть больше или меньше точных значений и нет никаких приемов, позволяющих определить знак этого отклонения.

Ключевые слова: прямоугольная пластина, свободное отверстие, собственные частоты, принцип Рейсснера, R-функции.

Постановка проблемы

Прямоугольные пластины с вырезами (отверстиями) достаточно широко используются в конструкциях ракетной и авиационной техники, судостроении, строительных сооружениях и машин. Одной из основных задач при расчете вибрационных характеристик таких элементов конструкций, особенно на этапе проектирования, является определение частот свободных колебаний. В настоящее время изучены только частные случаи с отвертиями определенной формы и расположения. Поэтому разработка алгоритма позволяющего исследовать влияние отверстия произвольной формы на частоты собственных колебаний представляется актуальной.

Анализ последних исследований и публикаций

Решению вопроса о влиянии вырезов различной формы на собственные частоты колебаний прямоугольных пластин посвящено большое количество работ. В частности, в работе [1] с помощью метода Бубнова-Галеркина исследовано влияние вырезов на собственные колебания тонкой упругой прямоугольной пластины. Были определены низшие частоты для пластин ослабленных центральным вырезом квадратной, прямоугольной, круглой и овальной формы. С использованием балочных функций колебаний в работе [2] определены собственные частоты прямоугольной пластины с центральным прямоугольным вырезом при произвольном закреплении кромок пластины. В работе [3] рассматриваемая задача решалась методом Рэлея-Ритца. Следует отметить, что решение таких задач традиционными методами Рэлея-Ритца или Бубнова-Галеркина сопряжено со значительными трудностями, связанными с выбором аппроксимирующих функций для прогиба, удовлетворяющих граничным условиям [4]. Поэтому много исследований в этом направлении выполнялись экспериментально [5,6] или теоретико-экспериментальным методом [7]. Объектом испытаний в этих работах являлись квадратные пластины с защемленными краями, поскольку такие граничные условия наиболее просто реализуются экспериментально. Собственные колебания шарнирно-опертых квадратных пластин с центральным круговым отверстием, свободным от напряжений, исследовались в работе [8]. Однако результаты, полученные в этой работе, ограничены случаями сравнительно малых отверстий: $r/a \leq 0{,}3$ (a – длина стороны пластинки, r – радиус отверстия).

Формулирование целей статьи (постановка задачи)

В данной работе для исследования влияния произвольного свободного отверстия на частоты собственных колебаний прямоугольных пластин (рис. 1) предлагается использовать вариационный принцип Рейсснера.

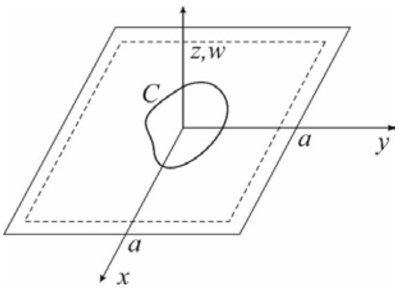

Рис. 1. Квадратная шарнирно-опертая пластинка со свободным отверстием

Этот принцип был успешно применен в работе [9] к задачам об изгибе и колебаниях сплошной консольной пластинки. Можно ожидать, что подобный метод будет также эффективен и для решения рассматриваемой задачи, поскольку основные особенности исследования собственных колебаний консольной и многосвязной пластинок (необходимость удовлетворения различных граничных условий на разных участках контура) совпадают.

Изложение основного материала исследования

В случае собственных колебаний принцип Рейсснера для тонких пластин [9] имеет вид:

$$\delta\left\{\iint_A \left[\begin{aligned}&-M_x\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}-M_y\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+2M_{xy}\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}-\\&-\frac{\left(M_x^2+M_y^2+2(1+\nu)M_{xy}^2\right)}{2\left(1-\nu^2\right)}-\\&-\frac{\Omega^2\rho}{2}\omega^2\end{aligned}\right]dxdy-\int_c\left[M_n\frac{\partial\omega}{\partial n}+\left(\frac{\partial M_n}{\partial n}+2\frac{\partial M_{nt}}{\partial t}\right)\omega\right]dt\right\}=0, \quad (1)$$

где $D=\dfrac{Eh^2}{12\left(1-\nu^2\right)}$; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; Ω – круговая частота; ρ – плотность массы на единицу площади.

Вариационное уравнение (1) эквивалентно дифференциальным уравнениям равновесия пластинки, физическим соотношениям упругости и статистическим граничным условиям на контуре отверстия С.

Уравнение (1) используется для приближенного определения собственной частоты колебаний следующим образом. Прогиб и моменты аппроксимируются независимо друг от друга функциями с некоторым числом неопределенных параметров в каждом выражении так, чтобы выполнялись граничные условия на краях пластинки. Подставляя эти выражения в вариационное уравнение (1) и производя варьирование, получаем алгебраическую систему линейных однородных уравнений относительно параметров. Приравнивая определитель этой системы нулю, находим уравнение для определения собственной частоты.

Успех описанного метода зависит от того, насколько удачно предложенные функции для прогиба и моментов аппроксимируют истинные функции при соответствующем выборе неопределенных параметров. Поэтому для улучшения сходимости вычислительного процесса целесообразно подчинить аппроксимирующие функции также и граничным условиям на контуре отверстия. При этом в вариационном уравнении исчезает криволинейный интеграл и исходная система уравнений существенно упрощается.

Граничные условия для шарнирно- опертой квадратной пластинки со свободным отверстием (рис. 1) возьмем в следующем виде:

при $\xi^2=1$, $\omega=0$, $M_x=0$; при $\eta^2=1$, $\omega=0$, $M_\eta=0$; (2)

на контуре отверстия C:

$$M_n = M_\xi \cos^2\varphi + M_\eta \sin^2\varphi - $$
$$-M_{\xi\eta}\cos\varphi\cdot\sin\varphi = 0;$$

$$M_{nt} = M_{\xi\eta}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) + $$
$$+\left(M_\xi - M_\eta\right)\cos\varphi\cdot\sin\varphi = 0;$$

$$Q_n = \left(\frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial\eta} + \frac{\partial M_\xi}{\partial\xi}\right)\cos\varphi + $$
$$+\left(\frac{\partial M_\eta}{\partial\eta} - \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial\xi}_\eta\right)\sin\varphi = 0, \qquad (3)$$

где $\xi=\frac{2x}{a}$, $\eta=\frac{2y}{a}$, φ – угол между осью x и нормалью к контуру отверстия C.

Здесь приняты граничные условия на свободном отверстии (3) в форме, предложенной Пуассоном. Отказ от киргофовских граничных условий вызван тем, что принятые граничные условия можно разрешить относительно M_ξ, M_η, $M_{\xi\eta}$. В результате получим, что на границе отверстия:

$$M_\xi=M_\eta=M_{\xi\eta}=0. \qquad (4)$$

Прогиб и моменты выгодно представить следующими выражениями, удовлетворяющими граничными условиями:

$$\omega = \omega_1\sum_{n=1}^{k} c_{1n}\varphi_{1n}\,;\quad M_\xi = \omega_2\sum_{n=1}^{k} c_{2n}\varphi_{2n}\,;$$

$$M_\eta = \omega_3\sum_{n=1}^{k} c_{3n}\varphi_{3n}\,;\quad M_{\xi\eta} = \omega_4\sum_{n=1}^{k} c_{4n}\varphi_{4n}\,, \qquad (5)$$

здесь $\omega_i=0$ на тех участках границы, где этого требует выполнение граничных условий (2), (3); φ_{in} – некоторые выбранные заранее аппроксимирующие функции; c_{in} – произвольные постоянные. Используя для построения ω_i – функции Рвачева [10], [11] нетрудно удовлетворить граничным условиям пластинки с отверстием произвольной формы.

Описанный выше алгоритм был реализован для определения влияния свободного центрального кругового отверстия в квадратной пластинке на основной тон ее колебаний. При этом для простоты в разложениях (5) было оставлено по одной аппроксимирующей функции:

$$\omega = c_1\cos\frac{\pi\xi}{2}\sin\frac{\pi\eta}{2}\,;$$

$$M_\xi = c_{21}\left(\xi^2-\eta^2-R^2\right)\cos\frac{\pi\xi}{2}\sin\frac{\pi\eta}{2}\,;$$

$$M_\eta = c_3\left(\xi^2+\eta^2-R^2\right)\cos\frac{\pi\xi}{2}\sin\frac{\pi\eta}{2}\,;$$

$$M_{\xi\eta} = c_4\left(\xi^2+\eta^2-R^2\right)\sin\frac{\pi\xi}{2}\sin\frac{\pi\eta}{2}\,. \qquad (6)$$

Результаты были сравнены с результатами, полученными в работе [8] (рис. 2). Наибольшее расхождение, около 16%, имеет место при малых отверстиях, с увеличением размера отверстия оно падает до 10%. Это объясняется тем, что принятая аппроксимация моментов (6) не обеспечивает предельного перехода к сплошной пластине. Но, поскольку в работе [8] получена оценка собственной частоты сверху то, очевидно, истинная погрешность полученных результатов будет ниже указанного расхождения.

С целью проверки реализованного алгоритма была решена тестовая задача определения собственной частоты сплошной шарнирно-опертой квадратной пластинки. При этом ее прогиб и моменты аппроксимировались следующими выражениями:

$$\omega = c_1\sin\frac{N\pi\xi}{2}\sin\frac{N\pi\eta}{2}\,;$$

$$M_\xi = c_2\cos\frac{N\pi\xi}{2}\cos\frac{N\pi\eta}{2}\,;$$

$$M_\eta = c_3\cos\frac{N\pi\xi}{2}\sin\frac{N\pi\eta}{2}\,;$$

$$M_{\xi\eta} = c_4\sin\frac{N\pi\xi}{2}\sin\frac{N\pi\eta}{2}\,. \qquad (7)$$

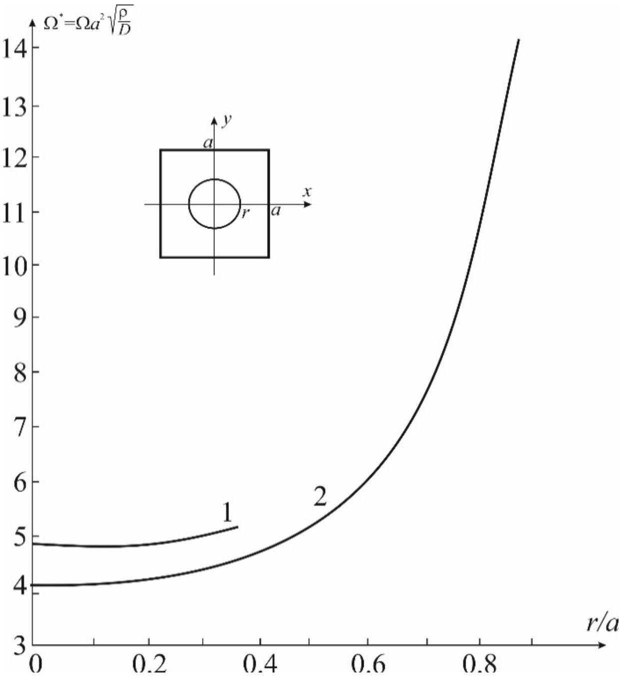

Рис. 2. Зависимость основной частоты собственных колебаний пластины от радиуса отверстия: 1 – результат работы [4]; 2 – результаты авторов

Расхождение результатов с точным решением составило меньше 2%.

Выводы

Предложенный алгоритм определения собственной частоты колебаний прямоугольных пластин со свободным отверстием имеет ряд преимуществ по сравнению с методами, использованными в работах [1–4]. Он не накладывает ограничений на размер, форму и расположение отверстия, легко распространяется на случаи нескольких отверстий и других условий закрепления пластины и отверстия. При этом, необходимо отметить недостаток, который имеет место при использовании принципа Рейсснера в задачах о колебаниях. В то время как метод Рэлея-Ритца дает значение частот, которые больше соответствующих точных значений, принцип Рейсснера этого не гарантирует [9]. Вычисленные частоты могут быть больше или меньше точных значений и нет никаких приемов, позволяющих определить знак этого отклонения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Казачек Ю.Н.* Собственные колебания прямоугольной пластины ослабленной вырезом // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Общая и прикладная механика. – 2011. – № 4 (2). – С.165-166.

2. *Завьялов В.Н., Романовский В.М.* Определение частот собственных колебаний прямоугольных пластин с прямоугольными вырезами // Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии. – Омск, 2011. – Вып. 1 (19). – С.37-39.

3. *Сафронов В.С.* Исследование частот собственных колебаний й плоской трехслойной сотовой пластины с отверстием // Авиакосмическое приборостроение. – 2014. – № 9. – С.19-26.

4. *Москаленко Л.В.* Колебания пластин с вырезами и трещиной // Научный вестник МГТУ ГА. – 2005. – № 85. – С.21-26.

5. *Kristiansen U., Soedel W.* Fundamental of cutout square plates with clamped edges // *J. Eng. Ind.* – 93 (1). – 1971. – P.343-345.

6. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. – Москва: КомКнига, 2006. – 440 с.

7. *Коноплев Ю.Г., Шишкин А.Г.* Собственные колебания прямоугольных пластин с вырезами // Труды 9 Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. – Ленинград: Судостроение. – 1975. – С.54-62.

8. *Hegarty R.F., Ariman T.* Elasto-dynamic analysis of rectangular plates with circular holes // International Journal of Solids and Structures. – 11 (7-8). – 1975. – p. 895-906.

9. *Пласс Г., Гейне Дж., Ньюсом К.* Применение вариационного принципа Рейснера к изгибу и колебаниям консольной пластины // Прикладная механика, труды амер. общества инж.-механиков, русс, перевод, серия Е. – 1962. – т. 29. – № 1. – С.43-54.

10. *Чопоров С.В., Лисняк А.А., Гоменюк С.И.* Использование функций В.Л. Рвачева для геометрического моделирования областей сложной формы // Прикладная информатика. – 2010. – № 2 (26). – С.109-122.

11. *Максименко-Шейко К.В.* R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей / К.В. Максименко-Шейко – Харьков: ИПМаш НАН Украины. – 2009. – 306 с.

Поступила в редакцию 08.10.2017

МОДЕЛЮВАННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ З ОТВОРОМ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ

Дисковський О.А., Мала Ю.А.

Для дослідження впливу довільного вільного отвору на частоти власних коливань прямокутних пластин використовується варіаційний принцип Рейсснера. Прогин і моменти апроксимуються незалежно один від одного R-функціями з невизначеними параметрами так, щоб виконувалися граничні умови на краях пластини. Граничні умови на вільному отворі прийняті у формі, які запропоновані Пуассоном. Пропонований алгоритм був реалізований для визначення впливу вільного центрального кругового отвору в квадратній пластині на основний тон її коливань. При цьому для простоти в розкладаннях було залишено по одній апроксимуючій функції. Результати були порівняні з результатами, які отримані в роботі Р. Негарта і Т. Ариман. Найбільша розбіжність, близько 16% має місце при малих отворах, зі збільшенням розміру отвору вона падає до 10%. З метою перевірки реалізованого алгоритму була розв'язана тестова задача визначення власної частоти суцільної шарнірно-опертої квадратної пластинки. Розбіжність результатів з точним розв'язком склало менше 2%. Запропонований алгоритм визначення власної частоти коливань прямокутних пластин з вільним отвором має низку переваг в порівнянні з методами, які були використані в роботах У. Крістенсана, В. Соедела і Р. Негарта. Наприклад, він не накладає обмежень на розмір, форму і розташування отвору, легко поширюється на випадки декількох отворів і інших умов закріплення пластини і отвору. При цьому, необхідно відмітити недолік, який має місце при використанні принципу Рейсснера в задачах про коливання. У той час як метод Релея-Рітца дає значення частот, які більше відповідних точних значень, принцип Рейсснера цього не гарантує. Обчислені частоти можуть бути більше або менше точних значень і немає ніяких прийомів, що дозволяють визначити знак цього відхилення.

Ключові слова: прямокутна пластина, вільний отвір, власні частоти, принцип Рейсснера, R-функції.

FREE VIBRATIONS MODELING OF THE RECTANGULAR PLATE WITH AN ARBITRARY FROM HOLE

Diskovskiy O.A., Mala Yu.A.

National Metallurgical Academy of Ukraine, Dnipro, Ukraine

The Reissner variations principle is used to study influence of an arbitrary hole on the frequencies of rectangular plate. Deflection and moments are approximated independently through the R-functions with a few (not defined yet) parameters in order to satisfy boundary conditions on the plate edges. The boundary conditions on contour hole are considered in form proposed by Poisson. The described algorithm has been realized numerically to study influence of the free central circle hole localized in a square plate on its fundamental frequency of vibration. For simplicity, we have used only one approximating functions in the series. Our results have been compared with those obtained by R. Hegarty and T. Ariman. The largest error on amount of 16% occurs for small holes; increase of the hole size decreases the error to 10%. In order to validate the proposed algorithm, a test problem is solved to define the fundamental frequency of the continuous simply supported square plate. A difference comparing with the exact result achieved less than 2%. It should be emphasized that the proposed algorithms of the estimation of fundamental frequency of vibrations of the rectangular plates with free hole has numerous advantages in comparison to the methods used in works by U. Kristiansen, W. Soedel and R. Hegarty. Namely, it does not introduce any limits on the dimensions, form and location of a hole, and can be extended to study a case with several holes and other boundary conditions for the plate and hole. There is, however, one drawback while applying the Reissner principle to the problems of vibrations. In the contrary to the Rayleigh-Ritz method, which allows to estimates frequencies located over their exact values, the Reissner method cannot guarantee this. In words, the obtained frequencies can be either larger or smaller than the exact values, and there is no way to estimate a sign of this deviation.

Keywords: rectangular plate, arbitrary hole, fundamental frequency of vibration, Reissner principle, R-functions.

REFERENCES

1. Kazachek Yu.N. *Sobstvennyye kolebaniya pryamougol'noy plastiny oslablennoy vyrezom.* [Natural oscillations of rectangular plates weakened by cuts]. Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Obschaya i prikladnaya mehanika, 2011, № 4 (2), pp. 165-166. *(in Russian).*

2. Zavyalov V.N, Romanovsky V.M. *Opredeleniye chastot sobstvennykh kolebaniy pryamougol'nykh plastin s pryamougolnymi vyrezami* [The definition of own frequency oscillations the rectangular plates with holes]. Vestnik Sibirskoy gosudarstvennoy avtomobilno-dorozhnoy akademii, Omsk, 2011, vol. 1 (19), pp. .37-39. *(in Russian).*

3. Safronov V.S. *Issledovaniye chastot sobstvennykh kolebaniy y ploskoy trekhsloynoy sotovoy plastiny s otverstiyem* [Study of the frequency of natural oscillationsof the flat three-layer mobile plate with holes]. Aviakosmicheskoye priborostroyeniye, 2014, № 9, pp. 19-26. *(in Russian).*

4. Moskalenko L.V. *Kolebaniya plastin s vyrezami i treshchinoy* [Rippling of a rektangular plate with an aperture or crack]. Nauchnyy vestnik MGTU GA, 2005, № 85, pp. 21-26. *(in Russian).*

5. Kristiansen U., Soedel W. *Fundamental of cutout square plates with clamped edges. J. Eng. Ind.*, 93 (1), 1971, pp. 343-345.

6. Timoshenko S.P. *Kolebaniya v inzhenernom dele.* [Oscillations in Engineering]. Moscow, KomKniga, 2006, 440 p. *(in Russian).*

7. Konoplev Yu.G., Schischkin A.G. *Sobstvennyye kolebaniya pryamougolnykh plastin s vyrezami* [Own oscillations of rectangular plates with notches]. Leningrad, Sudostrojenye, 1975, pp. 54-62. *(in Russian).*

8. Hegarty R.F., *Ariman T. Elasto-dynamic analysis of rectangular plates with circular holes.* International Journal of Solids and Structures, 11(7-8), 1975, pp. 895-906.

9. Plass G., Geyne Dzh., Nyusom K. Primenenie variatsionnogo printsipa Reysnera k izgibu i kolebaniyam konsolnoy plastinyi [Application of the Reissner variational principle to the problems of bending and clawing of the cantilever plate]. Prikladnaya mehanika, trudyi amer. obschestva inzh.-mehanikov, russ, perevod, seriya E, 1962, 29 (1), pp. 43-54. *(in Russian).*

10. Choporov S.V., Lisnyak A.A., Gomenyuk S.I. *Ispol'zovaniye funktsiy V.L. Rvacheva dlya geometricheskogo modelirovaniya oblastey slozhnoy formy* [Using the functions of VL Rvachev for geometric modeling of regions of complex shape]. Applied Informatics, 2010, № 2 (26), pp. 109-122. *(in Russian).*

11. Maksimenko-Sheiko K.V. *R-funktsii v matematicheskom modelirovanii geometricheskikh ob»yektov i fizicheskikh poley* [R-functions in mathematical modeling of geometric objects and physical fields]. Kharkov: IPMash NAS of Ukraine, 2009, 306 p. *(in Russian).*