УДК 519.85

*Косолап А.И.*

# ВЫПУКЛАЯ РЕЛАКСАЦИЯ В МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

**ГВУЗ «Украинский государственный химико-технологический университет», г. Днепр**

В данной работе рассматриваются многоэкстремальные задачи в конечномерном евклидовом пространстве. Они возникают при математическом моделировании сложных систем в экономике, финансах, управлении, технологических процессах, на транспорте, проектировании, информатике и других областях. Известно, что к этому классу задач преобразуются дискретные задачи, а также задачи решения нелинейных уравнений и другие прикладные задачи. В настоящее время для решения многоэкстремальных задач разработаны методы ветвей и границ, полуопределенное программирование, двойственные методы, генетические и эволюционные методы и многие другие. Эти методы используются для решения прикладных задач, а также для решения многочисленных тестовых задач. Многочисленные эксперименты показывают, что только для некоторых тестовых задач существующие методы позволяют находить оптимальные решения. Однако эти методы не гарантируют получение наилучших решений в прикладных задачах. Выпуклая релаксация многоэкстремальных задач позволяет преобразовать их к выпуклым одноэкстремальным задачам. Для некоторых многоэкстремальных задач такое преобразование будет точным. Для полуопределенной оптимизации это будет тогда, когда найденная матрица имеет ранг единицу. Для двойственной релаксации, когда разрыв двойственности равен нулю. В общем случае, выпуклая релаксация позволяет получить только оценку оптимального решения. Используются различные виды выпуклой релаксации: полуопределенная, лагранжева двойственность, точная квадратичная регуляризация, reformulation-linearization техника. Наиболее эффективным способом выпуклой релаксации является точная квадратичная регуляризация. При ее использовании получаем наиболее широкий класс многоэкстремальных задач, для которого выпуклая релаксация будет точной. Это достигается преобразованием исходной задачи с последующем смещением пространства. Эффективность точной квадратичной регуляризации подтверждается многочисленными экспериментами при решении тестовых и прикладных многоэкстремальных задач.

**Ключевые слова:** многоэкстремальные задачи, выпуклая релаксация, полуопределенная оптимизация, Лагранжева двойственность, точная квадратичная регуляризация.

### *Постановка проблемы и анализ последних исследований и публикаций*

Классический математический анализ позволяет исследовать поведение дифференцируемых функций в окрестности точки. В экстремальных точках градиент функции равен нулю. Эти точки могут быть точками минимума, максимума или седловыми точками функции. Для идентификации этих точек используются вторые частные производные функции, которые образовывают квадратные матрицы. Если такая матрица положительно определенная в данной точке, то в ней достигается минимум функции. Для отрицательно определенных матриц получаем точки максимума. Для неопределенных матриц – седловые точки. Если матрицы нулевые, то вторых производных недостаточно для определения типа экстремальной точки. Задача определения экстремальных точек усложняется при наличии ограничений на переменные функций. В этом случае строят функцию Лагранжа, зависящую от неопределенных множителей, и таким образом сводят задачу определения экстремальных точек к исследованию функции Лагранжа. Если функция имеет много экстремальных точек, то средствами классического анализа ищутся все экстремальные точки и среди них находят наилучшую – глобальный минимум или максимум функции. Ничего лучшего не было предложено до середины прошлого века. Однако появилось много прикладных задач, математические модели которых содержат $2^n$ или n! локальных экстремумов. Перебор всех экстремальных точек в таких задачах невозможен. Поэтому в рамках классического анализа решить проблему глобального экстремума невозможно.

За последние 30 было разработано много методов для решения многоэкстремальных задач. Это методы ветвей и границ [1], полуопределенное программирование [2], двойственные методы [3], генетические и эволюционные алгоритмы [4], reformulation-linearization техника [5]. Однако эффективность этих методов существенно падает при увеличении размерности задачи. Прогресс в решении многоэкстремальных задач может быть обеспечен посредством преобразования многоэкстремальных задач к одноэкстремальным выпуклым задачам.

Значительным прогрессом в теории экстремальных задач явилась разработка выпуклого анализа [6,7]. Было показано, что выпуклые функции содержат только одну экстремальную точку. Это условие сохраняется и для минимума выпуклой функции на выпуклом множестве. Особенностью выпуклых функций является то, что ее вариация в окрестности точки нарушает ее выпуклость. Было показано, что очень многие математические модели прикладных задач можно представить алгебраическими выражениями выпуклых функций. Например, широкий класс функций можно представить разностью двух выпуклых функций. Такие классы задач называются DC оптимизацией [7]. Также широким классом задач являются выпуклые задачи с одним обратно-выпуклым (reverse convex) ограничением [1] и задачи выпуклой максимизации на выпуклом множестве [1]. Для этих классов задач были разработаны алгоритмы поиска глобального экстремума, но они оказались неэффективными. Проблема в том, что эти задачи могут иметь такое же число локальных экстремумов, что и исходные задачи. Наилучшим решением было бы преобразование многоэкстремальных задач к выпуклым одноэкстремальным задачам. Частично это достигается посредством выпуклой релаксации. Такое преобразование позволяет получить выпуклую задачу, решение которой совпадает с решением исходной задачи или является его оценкой.

Целью данной статьи является использование выпуклых релаксаций для решения многоэкстремальных задач. Будет показано, что лучшим средством для решения этого класса задач является разработанная автором точная квадратичная регуляризация [8].

***Постановка задачи и ее решение***

Задача оптимизации в конечномерном пространстве сводится к поиску:

$$\min\{f_0(x) \mid f_i(x) \le 0,\ i = 1, ..., m,\ x \in E^n\}, \quad (1)$$

где все $f_i(x)$ – дважды дифференцируемые функции, а $E^n$ – евклидовое пространство. Такая задача может иметь много локальных минимумов. Обычно рассматривают классы таких задач. Достаточно широким классом являются общие квадратичные задачи или задачи с полиномиальными функциями. Эти классы также многоэкстремальные, но для их решения может быть использована выпуклая релаксация.

*Полуопределенная релаксация*

Общую задачу квадратичной оптимизации

$$\min\left\{\begin{array}{l} x^T A_0 x + b_0^T x \mid x^T A_i x + b_i^T x \le c_i, \\ i = 1,\ ...,\ m \end{array}\right\}, \quad (2)$$

где $A_0$ – симметричная матрица (n×n); $A_i$ – симметрические матрицы (n×n); b, d – векторы размерности n; c – вектор размерности m; x – вектор переменных размерности n, можно преобразовать к виду:

$$\min\left\{\begin{array}{l} \bar{A}_0 \times X \mid \bar{A}_i \times X \preceq 0,\ i = 1, ..., m, \\ I_0 \times X = 1,\ X \succeq 0 \end{array}\right\}, \quad (3)$$

где $X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & xx^T \end{pmatrix}$,

$$I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix},$$

$$x^T A_i x + b_i^T x - c_i = \begin{pmatrix} -c_i & \frac{b_i^T}{2} \\ \frac{b_i}{2} & A_i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & xx^T \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -c_i & \frac{b_i^T}{2} \\ \frac{b_i}{2} & A_i \end{pmatrix} \times X = \bar{A}_i \times X,\ i = 0,1,...,m,$$

а $A \times X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}$

определяет скалярное произведение матриц. Преобразованная задача (3) будет эквивалентной задаче (2), если X – полуопределенная матрица ранга единица. Если X – матрица произвольного ранга, то задача (3) становится выпуклой и легко решаемой. Однако найденное решение будет совпадать с решением задачи (2) только в том случае, когда ранг найденной матрицы X будет равен единице. В других случаях будет получена нижняя оценка значения целевой функции. Решение задачи (3) будет иметь ранг 1, если оно достигается в крайней точке выпуклого конуса X≥0.

К квадратичным задачам преобразовываются также полиномиальные задачи посредством понижения степени функций заменой $z_i = x_i x_j$ и $z_i = x_i^2$. Такое преобразование увеличивает число ограничений задачи, но позволяет преобразовать полиномиальные задачи к квадратичным.

Если ограничения в задачи (2) являются линейными, то их полуопределенная релаксация будет точной. В результате решением задачи (3) будет допустимая точка задачи (2).

В некоторых частных случаях полуопределенная релаксация будет точной. Пусть P – прямоугольный параллелепипед, который представим в виде:

$$P=\{x \mid (x_i-a_i)(x_i-b_i) \le 0,\ i=1,...,n\}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Полуопределенная релаксация для квадратичной задачи*

$$\max\{\| x \|^2 \mid x \in P\} \tag{4}$$

*является точной.*

Доказательство. Допустим противное, что ранг матрицы X (соответствующей задачи SDP) больше единицы и равен k. Так как ограничения задачи (4) независимы, то достаточно рассмотреть первое ограничение задачи SDP:

$$\begin{pmatrix} 0 & -(a_1+b_1)/2 \\ -(a_1+b_1)/2 & 1 \end{pmatrix} \times$$
$$\times \left[ \begin{pmatrix} 1 & x_{11} \\ x_{11} & x_{11}^2 \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} 1 & x_{1k} \\ x_{1k} & x_{1k}^2 \end{pmatrix} \right] = -a_1 b_1 .$$

Откуда

$$x_{11}^2 - (a_1+b_1)x_{11} + ... + x_{1k}^2 - (a_1+b_1)x_{1k} = -a_1 b_1.$$

Рассмотрим другое выпуклое множество – симплекс, который зададим следующим образом

$$D=\{x \mid x_i(x_i-a) \le 0,\ i=1,...,n,\ c^T x=1\}.$$

Для этого выпуклого множества справедливо аналогичное утверждение.

Теорема 2. *Полуопределенная релаксация для квадратичной задачи*

$$\max\{\| x \|^2 \mid x \in \Delta\} \tag{5}$$

*является точной.*

Доказательство. Рассмотрим ограничения

$$\begin{pmatrix} 0 ... 0 \quad -a/2 \quad 0 ... 0 \\ 0 .......................... 0 \\ -a/2 \ \ 0 ... \ 1 \ \ 0 ....... \ 0 \\ 0 .......................... 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \quad x_1 \quad x_2 .... x_n \\ x_1 \ \ x_{11} \ \ x_{12} ... x_{1n} \\ .................... \end{pmatrix} \le 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 \ \ c_1/2 \ \ c_2/2 \ ... \ c_n/2 \\ c_1/2 \ \ 0 .................... 0 \\ .................................. \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \ \ x_1 \ \ x_2 ... x_n \\ x_1 \ x_{11} \ x_{12} ... x_{1n} \\ ..................... \end{pmatrix} = 1.$$

Эти ограничения равносильны ограничениям:

$$x_{ii} - a x_i \le 0,\ i = 1,...,n;$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n = 1$$

соответственно. Пусть решение соответствующей задачи SDP достигается в точке x, тогда

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{c_i}, \ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1, \ a \geq 0.$$

Теперь задача SDP равносильна следующей

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{c_i} \mid \sum_{i=1}^{n} a_i = 1, \ a \geq 0 \right\}.$$

Решение этой задачи равно

$$x_k = \frac{1}{\min c_i},$$

но тогда

$$x_{kk} = a \frac{1}{\min c_i},$$

откуда следует, что в общем случае, $x_k^2 \neq x_{kk}$. Это означает, что ранг матрицы X будет равен 2, но полуопределенная релаксация будет точной, так как решение задачи (5) определяется первой строкой матрицы X. Теорема доказана.

Замечание. В отличие от параллелепипеда, для симплекса соответствующая задача SDP будет иметь ранг 2. Это означает, что требование равенства матрицы задачи SDP рангу единицы, при котором полуопределенная релаксация будет точной, является только достаточным, но не необходимым условием.

Рассмотренные примеры являются достаточно простыми, хотя и многоэкстремальными задачами. Вопрос о выделении подкласса прикладных многоэкстремальных задач для которых полуопределенная релаксация будет точной является открытым.

*Теория двойственности для многоэкстремальных задач*

Теория двойственности занимает центральное место в линейной и выпуклой оптимизации. Часто решение двойственной задачи является более простым, и оптимальное решение двойственной задачи позволяет определить решение прямой задачи. Теорию двойственности используют при разработке эффективных методов решения линейных и выпуклых задач. В настоящее время наиболее эффективным методом решения линейных и выпуклых задач оптимизации является прямо-двойственный метод внутренней точки [9]. Преимущество двойственности заключается в том, что двойственная задача будет выпуклой и одноэкстремальной и в том случае, когда прямая задача будет многоэкстремальной. Однако при решении многоэкстремальных задач возникает разрыв двойственности. В этом случае значения целевых функций прямой и двойственной задачи в оптимальной точке не совпадают. Поэтому двойственность является выпуклой релаксацией прямой задачи.

Рассмотрим общую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min\{x^T A_0 x + b_0^T x \mid x^T A_i x + b_i^T x + c_i \leq 0, \\ i = 1,\dots,m, \ x \in E^n\}, \tag{6}$$

где все матрицы $A_i$ — симметричные, $b_i$, $x$ — n-мерные векторы евклидового пространства $E^n$, $c_i$ — числа. Будем предполагать, что задача (6) имеет решение. Используем точную квадратичную регуляризацию [8] для преобразования задачи (6) к виду

$$\max\{\|z\|^2 \mid x^T A_0 x + b_0^T x + s + (r-1)\|z\|^2 \leq d, \\ x^T A_i x + b_i^T x + c_i + r\|z\|^2 \leq d, \ i = 1,\dots,m\}, \tag{7}$$

где вектор $z=(x, x_{n+1})$, параметр s удовлетворяет условию

$$s \geq \|x^*\|^2 - x^{*T} A_0 x^* - b_0^T x^*,$$

где $x^*$ — решение задачи (6), а параметр $r>0$ выбирается таким, чтобы матрицы $A_0+(r-1)I$, $A_i+rI$, $i=1,\dots,m$ были положительно определенные, где I — единичная матрица. Для этого достато-чно найти минимальное значение r, удовлетворяющее условиям

$$a_{jj}^i + r > \sum_{\forall k \neq j} |a_{jk}^i| + 1, \ \forall i, j, \tag{8}$$

где $a_{jk}^i$ — элементы матрицы $A_i$. При выполнении условий (8), допустимое множество задачи (7) будет выпуклым.

В задаче (7) необходимо найти минимальное значение переменной $d=d_{min}$ при котором ее решение $z^*$ удовлетворяет условию $r\|z^*\|^2 = d_{min}$. Такое значение $d_{min}$ будем находить методом дихотомии. Решим задачу выпуклой оптимизации

$$\max\{d \mid x^T A_0 x + b_0^T x + s + (r-1)\|z\|^2 \leq d, \\ x^T A_i x + b_i^T x + c_i + r\|z\|^2 \leq d, \\ i = 1,\dots,m, \ r\|z\|^2 \leq d\}.$$

Если для ее решения ($z^0$, $d_0$) выполняется условие $r\|z^0\|^2 = d_0$, то задача (6) решена и ее решение $x^*=x^0$ [6]. В противном случае, если $r\|z^0\|^2 = d_0$, будем увеличивать значение переменной $d=d_0+h$ ($h>0$) и для каждого такого значения d решать задачу (7). При увеличении d значение $r\|z\|^2 - d$ будет монотонно возрастать. Поэтому методом дихотомии легко найти значение d, для которого будет выполняться равенство $r\|z\|^2 - d$. Если найденное значение d минимальное, то задача (6) решена. В противном случае, найдена только точка локального максимума задачи (7). Таким образом, для нахождения минимального значения d необходимо находить точку глобального максимума в задаче (7). Для этого воспользуемся двойственным методом.

Построим для задачи (7) функцию Лагранжа

$$L(z,\lambda) = \| z \|^2 - \lambda_0 (x^T A_0 x + b_0^T x + s +$$
$$+(r-1)\| z \|^2 - d) -$$
$$-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x^T A_i x + b_i^T x + c_i + r\| z \|^2 - d) .$$

Введем обозначения

$$Q(\lambda) = (1-\lambda_0(r-1))I - r\sum_{i=1}^{m}\lambda_i I - \sum_{i=0}^{m}\lambda_i A_i;$$

$$b(\lambda) = -\lambda_0 b_0 - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i b_i;$$

$$c(\lambda) = -\lambda_0 (s-d) - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i (c_i - d),$$

тогда

$$L(z,\lambda) = z^T Q(\lambda) z + b^T(\lambda) z + c(\lambda). \quad (9)$$

В точке максимума градиент функции Лагранжа (9) равен нулю, откуда находим

$$z(\lambda) = -\frac{1}{2} Q^{-1}(\lambda) b(\lambda). \quad (10)$$

После подстановки найденного значения $z(\lambda)$ в функцию Лагранжа (9), получим двойственную функцию:

$$g(\lambda) = -\frac{1}{4} b^T(\lambda) Q^{-1}(\lambda) b(\lambda) + c(\lambda)$$

и двойственную задачу:

$$\min\{g(\lambda) \mid \lambda \ge 0\} . \quad (11)$$

Задача (11) имеет решение, если функция $g(\lambda)$ – выпуклая. Для этого достаточно, чтобы матрица – $Q(\lambda)$ была положительно определенной. Если параметр r удовлетворяет условию (8), то достаточным условием положительной определенности матрицы – $Q(\lambda)$ будет

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \ge 1 .$$

Для целевых функций прямой (7) и двойственной задачи (11) справедливо равенство

$$\| z \|^2 \le g(\lambda) .$$

Поэтому решение двойственной задачи (11) позволяет найти верхнюю оценку значения целевой функции задачи (7). Если для решения выпуклой задачи (11) выполняется условие

$$\| z(\lambda) \|^2 = g(\lambda) ,$$

где $z(\lambda)$ определяем по формуле (10), то разрыв двойственности равен нулю и $z(\lambda)$ – решение задачи (7). Это будет в том случае, когда для оптимальных множителей Лагранжа $\lambda$, матрица $Q(\lambda)$ – положительно полуопределенная. Если это не так, то будут найдены другие множители Лагранжа, которые удовлетворяют равенству (градиент функции Лагранжа (11) равен нулю)

$$2Q(\lambda) z + b(\lambda) = 0 . \quad (12)$$

При подстановке оптимальных множителей Лагранжа эта линейная система относительно вектора z будет иметь единственное решение. Для неоптимальных множителей Лагранжа система (12) может иметь неединственное решение. Покажем, что среди этих решений может быть оптимальное решение задачи (7).

Добавим к ограничениям двойственной задачи (11) ограничения прямой задачи (7), выраженные через двойственные переменные

$$\min\{g(\lambda)\,|\,\frac{1}{4}b^T(\lambda)Q^{-1}(\lambda)(A_0+$$
$$+(r-1)I)Q^{-1}(\lambda)b(\lambda)-\frac{1}{2}b_0^TQ^{-1}(\lambda)b(\lambda)+s\le d,$$
$$\frac{1}{4}b^T(\lambda)Q^{-1}(\lambda)(A_i+rI)Q^{-1}(\lambda)b(\lambda)-$$
$$-\frac{1}{2}b_i^TQ^{-1}(\lambda)b(\lambda)+c_i\le d,\ i=1,...,m,$$
$$\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\ge a,\ \lambda\ge 0\},\qquad(13)$$

где значение a>0 необходимо выбрать таким, при котором достигается максимум $\|z(\lambda)\|^2$. Ограничения задачи (15) будут выпуклыми, так как матрицы $A_0+(r-1)I$ и все $A_i+rI$ – положительно определенные. При малых значениях a функция $g(\lambda)$ будет вогнутой и решение задачи (13) даст значение $\|z(\lambda)\|^2$ меньше оптимального. Увеличение значения a сокращает допустимую область задачи (13), что приводит к возрастанию $g(\lambda)$. Одновременно будет увеличиваться и $\|z(\lambda)\|^2$. Это возрастание будет до тех пор, пока допустимая область задачи (13) не станет пустой либо произойдет убывание, связанное с тем, что минимум $g(\lambda)$ сместится во внутрь допустимой области исходной задачи (13). Значение a, при котором достигается максимальное значение $\|z(\lambda)\|^2$, определит решение задачи (13).

Заметим, что двойственная функция $g(\lambda)$ дважды дифференцируемая и ее частные производные равны

$$\frac{\partial g(\lambda)}{\partial\lambda_0}=-\frac{1}{4}b^T(\lambda)Q^{-1}(\lambda)((r-1)I+A_0)\times$$
$$\times Q^{-1}(\lambda)b(\lambda)+\frac{1}{2}b^T(\lambda)Q^{-1}(\lambda)b_0-(s-d);$$
$$\frac{\partial g(\lambda)}{\partial\lambda_i}=-\frac{1}{4}b^T(\lambda)Q^{-1}(\lambda)(A_i+rI)Q^{-1}(\lambda)b(\lambda)+$$
$$+\frac{1}{2}b^T(\lambda)Q^{-1}(\lambda)b_i-(c_i-d),\quad i=1,...,m;$$

$$\frac{\partial^2 g(\lambda)}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}=-\frac{1}{4}b^T(\lambda)Q^{-1}(\lambda)(A_i+r_iI)Q^{-1}(\lambda)\times$$
$$\times(A_j+r_jI)Q^{-1}(\lambda)b(\lambda)-\frac{1}{4}b^T(\lambda)Q^{-1}(\lambda)\times$$
$$\times(A_j+r_jI)Q^{-1}(\lambda)(A_i+r_iI)Q^{-1}(\lambda)b(\lambda)+$$
$$+\frac{1}{2}b^T(\lambda)Q^{-1}(\lambda)(A_j+r_jI)Q^{-1}(\lambda)b_i-$$
$$-\frac{1}{2}b_i^TQ^{-1}(\lambda)b_j+\frac{1}{2}b^T(\lambda)Q^{-1}(\lambda)(A_i+r_iI)\times$$
$$\times Q^{-1}(\lambda)b_j,\forall i,j,$$

где $r_i=r$ и $r_j=r$, $\forall i$, $j\ge 1$, $r_0=r-1$.

Двойственную задачу можно упростить, если преобразовать квадратичные функции к каноническому виду. Задачу (6) можно преобразовать к виду

$$\max\{\|z\|^2\,|\sum_{j=1}^{n}c_j^i(x-a_j^i)^2\le r_i^2,$$
$$i=1,...,m,Px=q\}.\qquad(14)$$

Например, квадратичное ограничение

$$x_1x_2-x_1^2+x_3^2-x_1x_3+x_2\le 10$$

преобразуется к виду

$$x_4^2-4x_1^2+x_5^2+x_3^2+2x_2\le$$
$$\le 20,x_1+x_2-x_4=0,x_1-x_3-x_5=0,$$

а после использования точной квадратичной регуляризации получим

$$6x_4^2+x_1^2+6x_5^2+6x_3^2+5(x_2+0.2)^2+5x_6^2\le$$
$$\le 20.2+d,x_1+x_2-x_4=0,x_1-x_3-x_5=0,$$

где r=5.

Решение задачи (14) равно

$$x(\lambda,\mu) = -\frac{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i c^i a^i + \sum_{j=1}^{k}\mu_j p^j / 2}{1-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i c^i},$$

где $p^j$ — j-я строка матрицы P, а k — число линейных ограничений. Двойственная функция будет равна

$$g(\lambda,\mu) = \sum_{j=1}^{n}\frac{(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i c_j^i a_j^i + \sum_{i=1}^{k}\mu_i p_j^i / 2)^2}{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i c_j^i - 1} -$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i (c^i \| a^i \|^2 - r_i^2) - \sum_{i=1}^{k}\mu_i q_i,$$

а двойственная задача

$$\min\{g(\lambda,\mu) \mid c^i \| x(\lambda,\mu) - a^i \|^2 \le r_i^2,$$
$$\lambda^T c^i \ge 1,\ i=1,...,m,\ Px(\lambda,\mu) = q,\ \lambda \ge 0\}$$

будет выпуклой. Однако ее решение в общем случае позволяет найти только оценку оптимального решения задачи (14).

*Точная квадратичная регуляризация*

Задача (1) точной квадратичной регуляризацией преобразуется к виду

$$\max\{\| x \|^2 \mid f_0(x) + s + (r-1)\| x \|^2 \le$$
$$\le d, f_i(x) + r\| x \|^2 \le d,\ i=1,...,m,\ x \in E_+^n\}. \quad (15)$$

В задаче (15) необходимо найти минимальное значение d, при котором решение задачи (15) удовлетворяет условию $r\|x\|^2 = d$. Решение задачи (15) начинаем с минимального значения d и изменяем его с определенным шагом, решая каждый раз задачу (15) прямо-двойственным методом внутренней точки [9] пока не достигнем условия $r\|x\|^2 = d$. Задача (15) многоэкстремальная и выбор шага изменения d может привести в точку локального максимума. Поэтому произведем смещение пространства в направлении биссектрисы положительного ортанта. Тогда задача (15) примет вид

$$\max\{\| x-h \|^2 \mid f_0(x-h) + s + (r-1)\| x-h \|^2 \le$$
$$\le d, f_i(x-h) + r\| x-h \|^2 \le d, i=1,...,m, x \ge h\}. (16)$$

Теперь к задаче (16) снова применим точную квадратичную регуляризацию. Получим задачу

$$\max\{\| x \|^2 \mid -\| x-h \|^2 + s_0 + 2\| x \|^2 \le q,$$
$$x \in S\}, \quad (17)$$

где

$$S = \{x \mid f_0(x-h) + s + (r-1)\| x-h \|^2 \le$$
$$\le d, f_i(x-h) + r\| x-h \|^2 \le d, i=1,...,m, x \ge h\}$$

выпуклое множество. В точках локального максимума задачи (17) первое ограничение будет активным (обращаться в равенство).

Теорема 3. *Задача* (17) *одноэкстремальная если из неравенства* $\| y-h \|^2 < \| x-h \|^2$ *следует неравенство* $\| y \|^2 < \| x \|^2$.

Доказательство. Допустим противное, что задача (17) имеет два локальных максимума в точках $x^1$ и $x^2$, причем $\| x^2 \|^2 > | x^1 \|^2$ в которых выполняются условия $3\| x^1 \|^2 = q_1$ и $3\| x^2 \|^2 = q_2$ соответственно. Тогда из условий

$$-\| x^1 - h \|^2 + s_0 + 2\| x^1 \|^2 = q_1;$$
$$-\| x^2 - h \|^2 + s_0 + 2\| x^2 \|^2 = q_2$$

следуют равенства

$$-\| x^1 - h \|^2 + s_0 + 2\| x^1 \|^2 = q_1;$$
$$-\| x^2 - h \|^2 + s_0 + 2\| x^2 \|^2 = q_2$$

откуда

$$-\| x^1 - h \|^2 + s_0 = \| x^1 \|^2;$$
$$-\| x^2 - h \|^2 + s_0 = \| x^2 \|^2.$$

Из этих двух равенств и неравенства $\| x^2 \|^2 > | x^1 \|^2$ следует неравенство

$$\| x^2 - h \|^2 < \| x^1 - h \|^2.$$

Но тогда $\| x^2 \|^2 < \| x^1 \|^2$, что противоречит предположению. Теорема доказана.

Рассмотренное смещение пространства позволяет преобразовать многоэкстремальные задачи к одноэкстремальным и во многих других случаях.

***Выводы***

В работе показано каким образом многоэкстремальные задачи могут быть преобразованы к одноэкстремальным, для которых разработаны эффективные алгоритмы. В основе таких преобразований лежит выпуклая релаксация. Получены некоторые классы многоэкстремальных задач, для которых выпуклая релаксация будет точной. В общем случае, выпуклая релаксация позволяет находить только оценки оптимальных решений. Помимо рассмотренных видов выпуклой релаксации используются и другие. Например, reformulation-linearization техника. Однако наибольший эффект получаем при использовании точной квадратичной регуляризации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Horst R., Tuy H.* Global Optimization: Deterministic Approaches. 3rd ed. – Berlin: Springer-Verlag, 1996. – 727 p.
2. *Laurent M., Vallentin F.* Semidefinite Optimization. – Technical University of Delft, 2012. – 150 p.
3. *Audet C., Hansen P., Savard G.* Essays and surveys in Global optimization. – Springer Science+Business Media, Inc., 2005. – 301 p.
4. *Kenneth V.P., Storn R.M., Lampinen J.A.* Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 542 p.
5. *Sherali H.D., Adams W.P.* A Reformulation-Linearization Technique for Solving Discrete and Continuous Nonconvex Problems. – Springer, 2010. – 518 p.
6. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 471 с.
7. *Tuy H.* Convex Analysis and Global Optimization. – Kluwer, 1998. – 350 p.
8. *Косолап А.И.* Глобальная оптимизация. Метод точной квадратичной регуляризации – Днепропетровск: ПГАСА, 2015. – 164 с.
9. *Nocedal J., Wright S.J.* Numerical optimization. – Springer, 2006. – 685 p.


Поступила в редакцию 19.04.2018

### ОПУКЛА РЕЛАКСАЦІЯ В БАГАТОЕКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

***Косолап А.І.***

*У даній роботі розглядаються багатоекстремальні задачі в скінченномірному евклідовому просторі. Вони виникають при математичному моделюванні складних систем в економіці, фінансах, управлінні, технологічних процесах, на транспорті, проектуванні, інформатиці та інших областях. Відомо, що до цього класу задач перетворюються дискретні задачі, а також задачі розв'язування нелінійних рівнянь та інші прикладні задачі. В даний час для розв'язування багатоекстремальних задач розроблені методи гілок і меж, напіввизначене програмування, двоїсті методи, генетичні та еволюційні методи та багато інших. Ці методи використовуються для розв'язування прикладних задач, а також для розв'язування численних тестових задач. Обчислювальні експерименти показують, що тільки для деяких тестових задач існуючі методи дозволяють знаходити оптимальні розв'язки. Проте ці методи не гарантують отримання найкращих розв'язків в прикладних задачах. Опукла релаксація багатоекстремальних задач дозволяє перетворити їх до опуклих одноекстремальних задач. Для деяких багатоекстремальних задач таке перетворення буде точним. Для напіввизначеної оптимізації це буде тоді, коли знайдена матриця має ранг одиниця. Для двоїстої релаксації, коли розрив двоїстості дорівнює нулю. У загальному випадку, опукла релаксація дозволяє отримати тільки оцінку оптимального розв'язку. Використовуються різні види опуклої релаксації: напіввизначена, лагранжева двоїстість, точна квадратична регуляризація, reformulation-linearization техніка. Найбільш ефективним способом опуклої релаксації є точна квадратична регуляризація. При її використанні отримуємо найбільш широкий клас багатоекстремальнох задач, для якого опукла релаксація буде точною. Це досягається перетворенням початкової задачі з наступним зміщенням простору. Ефективність точної квадратичної регуляризації підтверджується численними експериментами при розв'язуванні тестових і прикладних багатоекстремальних задач.*

**Ключові слова:** багатоекстремальні задачі, опукла релаксація, напіввизначена оптимізація, лагранжева двоїстість, точна квадратична регуляризація.

## CONVEX RELAXATION IN MULTIEXTREMAL PROBLEMS

***Kosolap A.I.***

**Ukrainian State University of Chemical Technology, Dnipro, Ukraine**

*In this paper multiextremal problems in a finite-dimensional Euclidean space are considered. Such problems arise in the mathematical modeling of complex systems in the economy, finance, management, technological processes, transport, design, computer science and other fields. It is known that this class of problems contains discrete problems, the problems of solving nonlinear equations and other applied problems To solve multiextremal problems branch and boundary methods, semidefinite programming, duality methods, genetic and evolutionary methods, and many others are used nowadays. These methods are used to solve applied problems and to solve numerous test problems. Numerous experiments show that only for some test problems the existing methods allow finding optimal solutions. These methods, however, do not guarantee the best solutions in applied problems. Convex relaxation of multiextremal problems allows one to transform them to convex one-extremal problems. For some multiextremal problems such a transformation will be exact. For semi-definite optimization, this will be when the found matrix has rank one. For dual relaxation, it will happen when the duality gap is zero. In the general case, convex relaxation allows one to obtain only an estimate of the optimal solution. Various types of convex relaxation are used: semidefinite, Lagrange duality, exact quadratic regularization, reformulation-linearization technique. The most effective method of convex relaxation is the exact quadratic regularization. With its use, we obtain the widest class of multiextremal problems, for which convex relaxation will be exact. This is achieved by transformation of the original problem and displacement of the space. The efficiency of exact quadratic regularization is confirmed by numerous experiments for solving testing and applied multiextremal problems.*

**Keywords:** multiextreme problems, convex relaxation, semidefinete optimization, Lagrange duality, exact quadratic regularization.

## REFERENCES

1. Horst R., Tuy H. *Global Optimization: Deterministic Approaches. 3rd ed.* Springer-Verlag, Berlin, 1996. 727 p.

2. Laurent M., Vallentin F. *Semidefinite Optimization*. Technical University of Delft, 2012. 150 p.

3. Audet C., Hansen P., Savard G. *Essays and surveys in Global optimization*. Springer Science+Business Media, Inc., 2005. 301 p.

4. Kenneth V.P., Storn R.M., Lampinen J.A. *Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005. 542 p.

5. Sherali H.D., Adams W.P. *A Reformulation-Linearization Technique for Solving Discrete and Continuous Nonconvex Problems.* Springer, 2010. 518 p.

6. Rockafellar R.T. *Vyipuklyiy analiz* [Convex analysis]. Princeton, Princeton University press. 1970. 451 p. *(in Russian)*.

7. Tuy H. *Convex Analysis and Global Optimization*. Kluwer, 1998. 350 p.

8. Kosolap A.I. *Globalnaya optimizatsiya. Metod tochnoy qvadratichnoy regulyarizatsyi* [Global optimization. A method of exact quadratic regularization]. Dnipropetrovsk, PGASA [PSAES], 2015. 164 p. (*in Russian*).

9. Nocedal J., Wright S.J. *Numerical optimization*. Springer, 2006. 685 p.