УДК 624.04:004.942:519.853

Егоров Е.А., Кучеренко А.Е.

ПОИСК ЭФФЕКТИВНОЙ ТОПОЛОГИИ СТРУКТУРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

ГВУЗ «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», г. Днепр, Украина

В статье рассматривается задача поиска оптимальной топологии пространственных ферменных структур. В математическом контексте предложенный подход объединяет задачу выпуклой оптимизации с дополнительными невыпуклыми условиями и сводит ее к полуопределенной оптимизационной задаче. Целью предложенного алгоритма является минимизация массы пространственной конструкции в соответствии с такими невыпуклыми условиями, как условие прочности и устойчивости. В принципе количество таких условий не ограничивается. В общем случае рассматриваемую проблему можно определить как задачу многокритериальной оптимизации $\{J_v,J_u,-J_\sigma\}\rightarrow\min$, где J_v – функционал объема, J_u – функционал жесткости, J_σ – функционал прочности. Для поиска оптимальной топологии стержневой системы с оптимальным значением функционала J_u в работе используется модифицированная задача полуопределенной оптимизации (SDP). Гипотеза, положенная в основу рассматриваемого подхода, состоит в том, что минимизация энергии упругой деформации стержневой системы приводит к геометрически неизменяемой схеме с оптимальным соотношением между объемами стержней. Решение полуопределенной задачи оптимизации топологии стержневой системы задает соотношение между объемами стержней $v_1:v_2:...:v_m$. Объем каждого стержня можно вычислить как $t_i=V\cdot v_i$, где интегральный параметр V, определяющий значение функционала J_v, можно получить из дополнительных условий прочности и устойчивости. Условие прочности записывается в соответствии с ДБН В.2.6-198:2014, а критерий устойчивости принимается в виде $\det K_\tau>0$, где K_τ – касательная матрица жесткости стержневой системы. Для иллюстрации работы предложенного подхода решена задача оптимизации топологии структурной плиты с размерами 9 м×8 м×2 м и различными вариантами расположения опор.

Ключевые слова: топология, оптимизация, стержневая система, структурная плита, момент инерции, кусочно-линейная аппроксимация, устойчивость.

DOI: 10.32434/2521-6406-2019-5-1-9-14

Постановка проблемы

Эффективность пространственных стержневых систем, которые нашли широкое применение в промышленном, гражданском и военном строительстве, в значительной мере зависит от правильно выбранной конструктивной схемы, или – в общем случае – топологии. В свою очередь, задача определения рациональной топологии пространственной системы неразрывно связана с проблемой снижения материалоемкости и обеспечения надежности функционирования конструкции. Зачастую решить такую задачу очень сложно, поэтому обычно приходится рассматривать множество возможных вариантов. При этом далеко не факт, что среди рассмотренных окажется такой вариант, который обеспечивает минимум расхода материала. Отсюда следует, что во всех таких случаях актуальными становятся оптимизационные алгоритмы, позволяющие решать подобные задачи в более строгой постановке.

Анализ последних исследований и публикаций

Обычно работы, существующие в области оптимального проектирования, либо исследуют сугубо математическую сторону вопроса, или ограничиваются решением инженерных прикладных задач. К первой группе можно отнести работы Н.В. Баничука [1], Т. Такады [2], А. Бен-Таля [3]. Так, в [1] аналитически решается задача оптимального проектирования в виде функционалов. В [2] автор рассматривает задачу оптимизации топологии с позиций линейного программирования, а в работе [3] проводится анализ и обоснование проблемы оптимизации стержневых систем, которая представлена как задача полуопределенного программирования.

Из второй группы можно выделить работы В.Б. Гринева [4], А.В. Перельмутера, В.А. Пермякова [5], В.В. Трофимовича [6], С.Ф. Пичугина [7]. В [4] автор, например, рассматривает оптимизацию элементов конструкций по спектру собственных частот. В [5] авторы приводят практические методы решения некоторых оптимизационных задач. В [6] среди прочего рассматривается оптимизация предварительно напряженных металлических конструкций, а в [7] используется вероятностные методы для подбора параметров элементов стальных конструкций.

Формулирование цели исследования

В указанных выше работах можно отметить следующие особенности: общие оптимизационные методы малоприменимы для решения реальных технических задач, а инженерные подходы обычно не обеспечивают оптимальность. В большинстве случаев это сводит на нет все усилия по определению эффективной конструктивной схемы.

В работе предлагается алгоритм оптимизации топологии пространственных стержневых систем, который позволяет совместить математический оптимизационный подход с инженерными критериями, в частности с нормативными требованиями к прочности и устойчивости. Цель оптимизационного алгоритма – минимизация материалоемкости при обеспечении выполнения нормативных требований. Известно [8], что затраты на материалы могут достигать 60–70% общей стоимости конструкции из металла, поэтому решение такой задачи является весьма актуальной проблемой.

Изложение основного материала

Рассматривая прототип конструкции как полный граф (рис. 1), количество вершин в котором $n=|Y|$, а количество ребер $m=|E|$, введем следующие обозначения: $f\in R^m$, $E\in R^m$, $L\in R^m$, $v\in R^m$ – соответственно осевые силы, возникающие в стержнях, модули Юнга, длины и объемы стержней; $A\in R^{3n\times m}$ – матрица уравнений равновесия системы, a_i^T – ее столбец; $K\in R^{3n\times 3n}$ – матрица жесткости системы; $F\in R^{3n}$ – внешние силы, приложенные к узлам конструкции; $u\in R^{3n}$ – перемещения узлов.

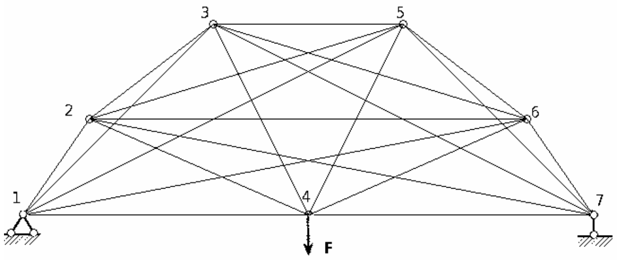

Рис. 1. Пример полного графа-прототипа арочной фермы

Если система находится в равновесии, то уравнение баланса сил можно записать так:

$$Af+F=0. \quad (1)$$

А осевые силы, возникающие в стержнях, которые подчиняются классической теории Эйлера-Бернулли, описываются уравнением:

$$f_i=\frac{-E_i v_i}{L_i^2}a_i^T u\,. \quad (2)$$

Перемещения узлов связаны с действием внешних сил следующим равенством:

$$K\cdot u=F, \quad (3)$$

где матрицу жесткости можно представить как:

$$K=\sum_{i=1}^{m}\frac{E_i v_i}{L_i^2}a_i a_i^T. \quad (4)$$

Работу внешних сил (а значит – и энергию упругой деформации конструкции), связанную с перемещением узлов системы, можно выразить так:

$$W=\frac{1}{2}F^T u. \quad (5)$$

В итоге получается, что для решения оптимизационной задачи необходимо минимизировать две величины: W и $\sum_{i=1}^{m} v_i$, а задача оптимизации топологии стержневых конструкций может быть представлена в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{minimize}_{u,v} W: \\
&\quad Ku = F; \\
&\quad \sum_{i=1}^{m} v_i \le V; \\
&\quad v \in R_{\ge 0}^{m}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Но такая задача не является выпуклой, поэтому ее необходимо преобразовать, учитывая соотношения (1)–(5). При этом выберем такой ее вид, который бы соответствовал задаче полуопределенной оптимизации [3], так как именно для такого класса проблем разработано наиболее производительное прикладное программное обеспечение (solvers). Можно показать, что для положительно полуопределенной матрицы:

$$
\begin{pmatrix} \Omega & F^T \\ F & K \end{pmatrix} \ge 0 \tag{7}
$$

существует такой вектор u, который позволит записать эквивалентную систему:

$$
\begin{cases} Ku = F; \\ K \ge 0; \\ \Omega \ge W. \end{cases} \tag{8}
$$

Более того, можно показать, что в системе с оптимальной топологией соотношение $v_1:v_2:\ldots:v_m$ не зависит от величины V, поэтому сумму $\sum_{i=1}^{m} v_i$ сверху можно ограничить 1, что позволяет существенно ускорить общее решение задачи. С учетом вышеперечисленного, задачу (6) можно переопределить к виду:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{minimize}_{\Omega,v} \Omega: \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i = 1; \\
&v_i \ge 0 \quad \forall\, i = 1...m; \\
&\begin{pmatrix} \Omega & F^T \\ F & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{E_i v_i}{L_i^2} a_i a_i^T \end{pmatrix} \ge 0.
\end{aligned} \tag{9}
$$

В таком виде оптимизационная задача становится выпуклой. В результате ее решения определяется оптимальная топология конструкции и соотношения между объемами стержней. Следующий шаг состоит в подборе такого минимального объема материала V (и соответственно площадей сечений), при котором выполнялись бы условия прочности и общей устойчивости системы [9]. Условие прочности может быть записано в виде:

$$
\frac{f_i L_i}{V v_i} \le \gamma R, i = 1...m \ , \tag{10}
$$

где γ – коэффициент условий работы, R – расчетное сопротивление материала. Общая устойчивость системы определяется критерием:

$$
\det K_\tau > 0, \tag{11}
$$

где K_τ – глобальная касательная матрица стержневой системы. Объем каждого стержня определяется из соотношения $t_i=v_i \cdot V$.

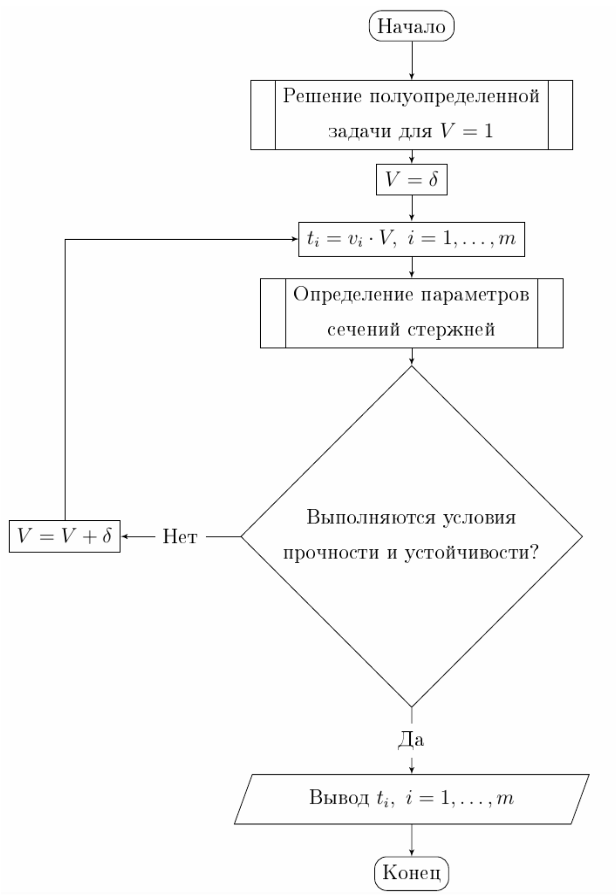

Рис. 2. Блок-схема решения оптимизационной задачи

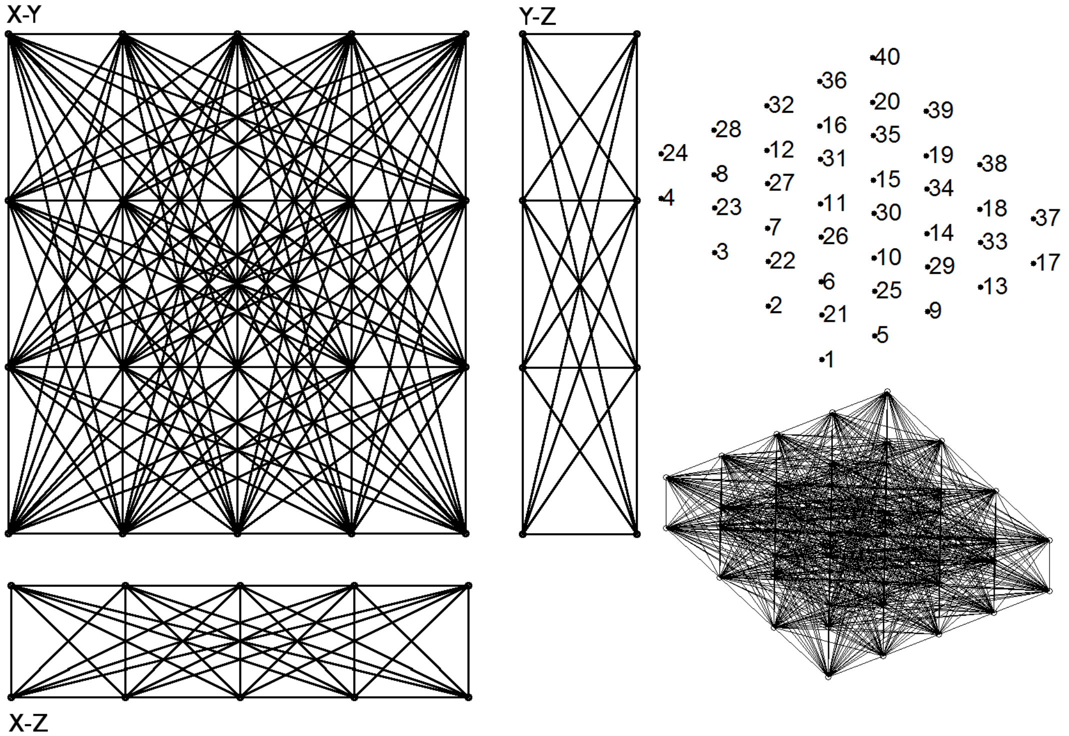

Рис. 3. Узлы и полный граф структурной плиты

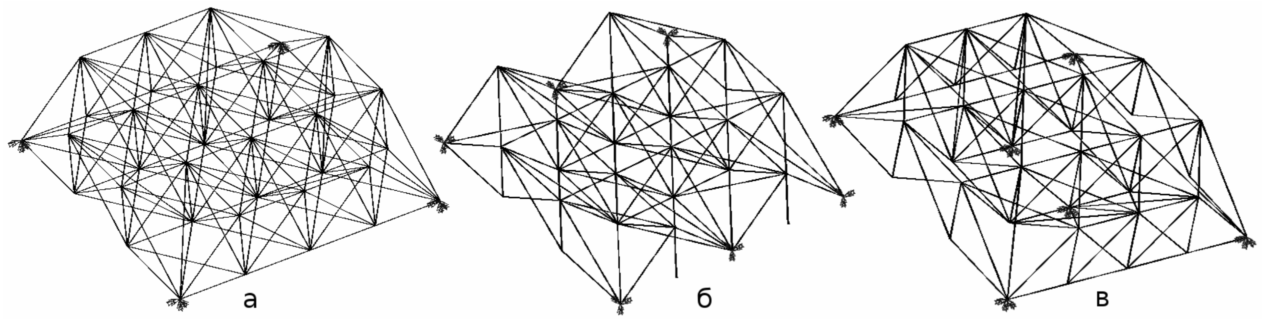

Рис. 4. Оптимальные топологии при различных вариантах расположения опор

На заключительном этапе полученная модель проверяется в программном комплексе ANSYS. В целом, решение оптимизационной задачи можно представить блок-схемой, приведенной на рис. 2.

Рассмотрим пространственную стержневую систему [10] с генеральными размерами 9 м×8 м×2 м. Узлы и полный граф системы изображены на рис. 3. К узлам нижнего пояса 1-20 приложена распределенная нагрузка g=10 кН/м^2.

Проведем численный эксперимент и выясним, как будет меняться оптимальная топология плиты и ее масса при следующих расположениях шарнирно-неподвижных опор: а) по углам в узлах 1, 4, 17, 20; б) в узлах 1, 4, 9, 12, 17, 20; в) в узлах 1, 4, 10, 11, 17, 20.

Модуль Юнга принимался равным $2{\cdot}10^{11}$ Па, расчетное сопротивление материала – $2{,}1{\cdot}10^8$ Па, коэффициент условий работы 0,9. При проверке конструкции на устойчивость для построения касательной матрицы жесткости системы K_τ плоские моменты инерции сечений определялись согласно [11]. Проведенное моделирование позволило выявить оптимальные топологические схемы конструкций (рис. 4). При этом массы пространственных стержневых систем для трех вариантов размещения опор составили соответственно 702 кг, 563 кг, 362 кг.

Можно отметить, что при увеличении числа опор уменьшается как масса стержневой системы, так и количество ее стержней, а размещение дополнительных опор в центре конструкции является более эффективным, нежели расположение опор только по периметру.

Выводы

Приведенная модифицированная форма полуопределенной задачи оптимизации топологии стержневой системы позволяет интегрировать оптимизационную задачу с основными инженерными критериями и за счет этого существенно сократить объем вычислений при решении сложных пространственных систем. Предложенная обобщенная схема решения оптимизационной задачи объединяет математический и инженерный подходы к оптимальному проектированию пространственных стержневых систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баничук Н.В.* Введение в оптимизацию конструкций. – М.: Наука, 1986. – 303 с.

2. *Takada T.* Multiobjective optimization of truss topology by linear / sequential linear programming method // Journal of Mechanical Engineering and Automation. – 2012. – Vol.2. – P.585-593.

3. *Ben-Tal A., Nemirovski A.* Robust truss topology design via semidefinite programming // SIAM Journal on optimization. – 1997. – Vol.7. – № 4. – P.991-1016.

4. *Гринев В. Б.* Оптимизация элементов конструкции по механическим характеристикам. – К.: Наук. думка, 1975. – 294 с.

5. *Пермяков В.А., Перельмутер А.В., Юрченко В.В.* Оптимальное проектирование стальных стержневых конструкций. – К.: Сталь, 2008. – 538 с.

6. *Трофимович В.В., Пермяков В.А.* Оптимизация металлических конструкций. – К.: Вища шк., 1983. – 199 с.

7. *Пичугин С.Ф., Махинько А.В.* К вероятностным методам расчёта металлоконструкций // Сучасні будівельні конструкції з металу і деревини: Зб. наук. пр. – ОДАБА, 2005. – С. 161–171.

8. *Кудишин Ю.И., Беленя Е.И., Игнатьева В.С.* Металлические конструкции. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 688 с.

9. *ДБН В.2.6-198:2014.* Сталеві конструкції. Норми проектування. – К.: Мінрегіон України, 2014. – 199 с.

10. *Никитюк А.В., Московкина А.А., Зуева И.И.* Достоинства и недостатки структурных конструкций // Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура. – 2011. – № 1. – С.99-104.

11. *Кучеренко А.Е.* Аппроксимация момента инерции и поиск оптимальной формы сечения стержня // Системные технологии. – 2016. – Вып.5(106). – С.54-60.

Поступила в редакцию 01.05.2019

ПОШУК ЕФЕКТИВНОЇ ТОПОЛОГІЇ СТРУКТУРНИХ КОНСТРУКЦІЙ НА ОСНОВІ НАПІВВИЗНАЧЕНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Єгоров Є.А., Кучеренко О.Є.

У статті розглядається задача пошуку оптимальної топології просторових структур. У математичному контексті запропонований підхід об'єднує задачу опуклої оптимізації з додатковими неопуклими умовами та зводить її до напіввизначеної оптимізаційної задачі. Метою запропонованого алгоритму є мінімізація маси просторової конструкції відповідно до таких неопуклих умов, як умова міцності і стійкості. Принципово кількість таких умов необмежена. У загальному випадку проблему, яка розглядається, можна визначити як задачу багатокритеріальної оптимізації $\{J_v, J_u, -J_\sigma\} \to min$, *де* J_v – *функціонал об'єму,* J_u – *функціонал жорсткості,* J_σ – *функціонал міцності. Для пошуку оптимальної топології стрижневої системи з оптимальним значенням функціоналу жорсткості* J_u *в роботі використовується модифікована задача напіввизначеної оптимізації (SDP). Гіпотеза, що покладена в основу запропонованого підходу, полягає в тому, що мінімізація енергії пружної деформації стрижневої системи призводить до геометрично незмінної схеми з оптимальним співвідношенням між об'ємами стрижнів. Розв'язок напіввизначеної задачі оптимізації топології стрижневої системи задає співвідношення між об'ємами стрижнів* $v_1: v_2: ...: v_m$. *Об'єм кожного стрижня можна обчислити як* $t_i=V \cdot v_i$, *де інтегральний параметр V, який визначає значення функціоналу об'єму* J_v, *можна отримати з додаткових умов міцності і стійкості. Умова міцності записується відповідно до ДБН В.2.6-198:2014, а критерій стійкості приймається у вигляді* $\det K_\tau > 0$, *де* K_τ – *дотична матриця жорсткості стержневої системи. Для ілюстрації роботи запропонованого підходу розв'язана задача оптимізації топології структурної плити з розмірами 9м×8м×2м і різними варіантами розташування опор.*

Ключові слова: топологія, оптимізація, стрижнева система, структурна плита, момент інерції, кусково-лінійна апроксимація, стійкість.

FINDING OF EFFECTIVE TOPOLOGY OF SPACE STRUCTURES USING SEMIDEFINITE PROGRAMMING

Egorov E.A., Kucherenko A.E.

Prydniprovska State Academy of Civil Engineering and Architecture, Dnipro, Ukraine

The paper considers the problem of topology optimization of space truss-like structures. The proposed algorithm combines convex optimization problem with non-convex conditions. The purpose of the algorithm is to minimize the mass of a spatial structure according to such non-convex conditions as structural safety requirement and buckling. Basically, there are no limitations in number of these conditions (convex or non-convex). In general, the problem can be specified as a multicriteria optimization task in following form: $\{J_v, J_u, -J_\sigma\} \rightarrow min$, *where* J_v *is a functional of volume,* J_u *is a functional of stiffness,* J_σ *is a functional of strength. The stiffness functional* J_u *can be defined by means of nodes displacements and energy of a system (compliance). Here to find an optimal truss topology with minimal compliance we use the modified semidefinite optimization problem (SDP), which can be obtained after certain transformations of the non-convex truss topology optimization task. The basic hypothesis is that truss compliance minimization leads to an invariable topology of the truss-like structure with optimal ratio of volumes of truss members. Solution of the semidefinite optimization problem defines the ratio of beams volumes* $v_1:v_2:...:v_m$. *A volume of each member can be calculated as* $t_i=V' \cdot v_i$ *where the parameter V, which defines the value of the integral functional* J_v, *can be obtained from additional conditions such as strength and buckling. The next important step is approximation of geometric characteristics of cross-sections. We need to calculate area moments of inertia to assemble the stiffness matrix of a structure. This matrix plays a key role in defining of buckling conditions. For simple cross-sections such as «solid circular», «square» calculation of moments of inertia is a trivial problem solved via well-known formulas. For complex cross-sections the dependence of moments of inertia on area is not so simple and may be considered as an ill-posed problem. The condition of strength is recorded in accordance with DBN V.2.6-198:2014, and the buckling condition is determined using the tangent stiffness matrix of a structure as follows: det* $K_\tau>0$. *To illustrate the proposed approach, the problem of topology optimization of a space structure with sides* $9\,m\times8\,m\times2\,m$ *and different positions of supports has been solved.*

Keywords: topology, optimization, truss, space structure, moment of inertia, piecewise linear approximation, buckling.

REFERENCES

1. Banichuk N.V. *Vvedenie v optimizaciju konstrukcij* [Introduction to Structural Optimization]. M: Nauka, 1986, 303 p. (in Russian).

2. Takada T. Multiobjective optimization of truss topology by linear/sequential linear programming method. Journal of Mechanical Engineering and Automation, 2012, vol. 2, pp.585-593.

3. Ben-Tal A., Nemirovski A. Robust truss topology design via semidefinite programming. SIAM Journal on optimization, 1997, vol. 7, no. 4, pp.991-1016.

4. Grinev V.B. *Optimizacija jelementov konstrukcii po mehanicheskim harakteristikam* [Optimization of structural elements by mechanical characteristics]. Kyiv: Naukovadumka, 1975, 294 p. (in Russian).

5. Permjakov V.A., Perelmuter A.V., Jurchenko V.V. *Optimalnoe proektirovanie stalnyh sterzhnevyh konstrukcij* [Optimal design of steel trusses]. Kyiv: Stal, 2008, 538 p. (in Russian).

6. Trofimovich V.V., Permjakov V.A. *Optimizacija metallicheskih konstrukcij* (Optimization of metal structures). Kyiv : Vysha shk., 1983, 199 p. (in Russian).

7. Pichugin S.F., Mahinko A.V. K veroyatnostnym metodam raschyota metallokonstrukcij [About probabilistic methods for calculating of metal structures] // Suchasni budivelni konstrukciyi z metalu i derevini: Zb. nauk. pr. – ODABA, 2005. – S. 161–171. (in Russian).

8. Kudishin Yu.I., Belenya E.I., Ignateva V.S. Metallicheskie konstrukcii [Metal structures]. – M.: Izdatelskij centr «Akademiya», 2011. – 688 p. (in Russian).

9. DBN V.2.6-198:2014. *Stalevi konstrukcії. Normi proektuvannja* [Steel structures. Design standards]. Kyiv: Minregion Ukrainy, 2014, 199 p. (in Russian).

10. Nikitjuk A.V., Moskovkina A.A., Zueva I.I. *Dostoinstva i nedostatki strukturnyh konstrukcij* [Advantages and disadvantages of structural constructions]. Vestnik PNIPU. Stroitelstvo i arhitektura, 2011, no. 1, pp.99-104 (in Russian).

11. Kucherenko A.E. Approxmation of area moment of inertia for optimal section geometry. System Technologies, 2016, Issue 5(106), pp.54-60.