КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ У РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ

Кушнір В.А., Кушнір Г.А.

Сучасна освіта вже не уявляється без комп'ютерів, новітніх інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ), можливості яких усе зростають. Бурхливий розвиток ІКТ спонукає до постійного вивчення їхніх нових можливостей з метою застосування в навчанні, зокрема, у навчанні математики. На сьогодні у навчанні математики широко використовуються такі ІКТ як Gran, Mathcad, Advencen Graphen та інші

Метою статті є розробка методики використання можливостей Advencen Graphen (AG) технології у розв'язуванні задач певного типу, а саме — рівнянь і нерівностей з параметрами. **Завданням** дослідження є створення алгоритмічного припису розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами з використанням AG-технології та аналіз переваг такого припису. **Об'єктом** дослідження є методика навчання учнів чи студентів розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами, а **предметом** — методика навчання учнів чи студентів розв'язуванню рівнянь і нерівностей з використанням можливостей ІКТ.

Чільне місце у навчанні математики займає «задачний підхід», який розробляли Л.М. Фрідман [9], Ю.І. Машбиць [4; 5], Г.О. Балл [1], Д. Пойя [6] та інші вчені.

«Задача у самому загальному вигляді — це система, обов'язковими компонентами якої є: а) предмет задачі, який знаходиться у вихідному стані (чи, як ми будемо говорити в подальшому, вихідний предмет задачі); б) модель потрібного стану предмету задачі (цю модель ми ототожнюємо з вимогою задачі)» [1, с. 32]. Очевидно, що на «мові школи» потрібний стан предмету задачі містить розв'язок задачі.

Загальну схему розв'язування задачі можна зобразити так:

1. {Виділення предмету задачі} → 2. {Створення вихідної моделі предмету задачі} → 3. {Перетворення моделі предмету задачі й створення його нової моделі} → 4. {Розв'язування чергової моделі задачі й отримання відповіді}. Зрозуміло, що така послідовність приписів є досить загальною й навряд чи може слугувати опорою у розв'язуванні конкретної задачі. Кожний виділений пункт здійснюється суб'єктом розв'язування задачі (окремим учнем чи колективом учнів класу).

На основі загального визначення моделі Г.О. Баллом [1] можна сказати, що *моделлю A предмету B задачі T буде певна знакова система C*, яка чимось подібна *B*, і робота з котрою (перетворення, розв'язування) суб'єкта розв'язування *S* зменшує невизначеність задачної ситуації й збільшує її визначеність аж до отримання такої моделі предмету задачі, розв'язування якої дасть можливість отримати розв'язок задачі.

Самою початковою моделлю предмета задачі й може бути опора як певна знакова система. Опори у розв'язуванні різних проблем навчання математики мають різну природу. Вони можуть бути у вигляді підказок, схем, рисунків, таблиць, графів, приписів тощо. Опори призначені для певного структурування поля можливих дій у розв'язуванні проблемної ситуації суб'єктом навчання, зменшення невизначеності проблемної ситуації (або користуючись термінологією Г.О. Балла [1], «задачної ситуації») й збільшення її визначеності. Отже, опора — це знакова система, що відображає найбільш загальні властивості предмету задачі. Опора може відображати як початкову структуру предмету задачі, так і кінцеву.

Графічні моделі-опори будують у розв'язуванні рівнянь і нерівностей методом інтервалів, розв'язуванні нелінійних рівнянь підвищеної складності (розв'язком будуть координати точок перетину графіків двох рівнянь), зображенні множини розв'язків системи нерівностей з двома невідомими, дослідженні функції на екстремуми та інтерпретація при цьому різних випадків існування екстремуму тощо.

Процес розв'язування задачі (рівняння, нерівності, їх систем, текстової задачі, доведення теорем тощо) зводиться до відшукання за певним приписом алгоритмічного типу (з приводу такого припису див. Л.Н. Ланда [3]) моделі її розв'язку. Причому такий припис суб'єкта розв'язування може бути як відомим, так і невідомим. У другому випадку припис розв'язування задачі потрібно створити суб'єкту. Загалом задачі можна розділити на такі класи:

1. Задача родова й алгоритмічний припис її розв'язування невідомий суб'єкту розв'язування.
2. Задача індивідуальна і є частковою стосовно відомої суб'єкту розв'язування родової задачі, припис розв'язування родової задачі не відомий суб'єкту розв'язування.
3. Задача індивідуальна і є частковою стосовно відомої суб'єкту розв'язування родової задачі, припис розв'язування родової задачі також відомий суб'єкту розв'язування.
4. Задача індивідуальна, її належність до певної родової задачі не відома суб'єкту розв'язування.

Алгоритмічний припис розв'язування задачі відрізняється від алгоритму тим, що:

1) різні суб'єкти розв'язування задачі можуть порізному його виконувати;

2) операції, що описані в алгоритмічному приписі, можуть виконуватися неоднозначно навіть одним суб'єктом розв'язування;

3) послідовність виконання операцій, котрий описаний в алгоритмічному приписі, також надає можливість суб'єкту розв'язування виконувати їх у різних послідовностях;

4) операції, що описані в алгоритмічному приписі, можуть тлумачитися суб'єктом розв'язування по-різному;

5) умови виконання операцій, котрі описані в алгоритмічному приписі, можуть тлумачитися суб'єктом розв'язування неоднозначно;

6) не розкривається зміст, структура і властивості самих операцій;

7) не аналізуються можливі наслідки виконання операцій.

Загалом алгоритмічний припис розв'язування задачі містить невизначеність його виконання, тоді як алгоритм розв'язування задачі повністю й однозначно визначає операції, умови та послідовність їх виконання. Невизначеність алгоритмічного припису «довизначається» суб'єктом розв'язування задачі як самостійна діяльність, у якій і виявляється його творчість як перехід: «інтуїтивного, оригінального, непередбачуваного, безпосереднього, спонтанного, мимовільного, імпульсивного, неусвідомленого, випадкового в логічне, моделювальне, вмотимоване, усвідомлене» (Я.А. Пономарьов [7]); «з суб'єктивно-психічної системи в матеріально-речову» (В.А. Роменець [8]). Саме в таких моментах відбувається матеріалізація ідей учнів під час розв'язування проблемних (задачних) ситуацій, наприклад, у вигляді створення моделей задач (рівнянь, нерівностей та їх систем, графіків функцій, таблиць, матриць, алгоритмів тощо).

Отже, розв'язування задачі T суб'єктом S зводиться (відповідно наведеним вище типам задач) до:

1) створення суб'єктом S припису алгоритмічного типу, якщо задача родова (з приводу родової задачі див. Г.О. Балл [1]) і припис її розв'язування невідомий та розв'язування індивідуальних задач, що належать до даної родової задачі, за створеним приписом;

2) припис розв'язування родової задачі не відомий суб'єкта S, розв'язування індивідуальної задачі зводиться або:

   а) до створення алгоритмічного припису суб'єктом S для розв'язування родової задачі і розв'язування за ним даної індивідуальної задачі;

   б) до створення способу розв'язування індивідуальної задачі, на основі якого ще не можна створити алгоритмічний припис розв'язування родової задачі;

3) розв'язування індивідуальної (часткової) задачі, яка належить до деякої родової, на основі відомого суб'єкта S алгоритмічного припису родової задачі;

4) розв'язування індивідуальної задачі суб'єктом S шляхом створення власного способу її розв'язування й на основі цього способу створення алгоритмічного припису розв'язування індивідуальної задачі.

Зауважимо, що алгоритмічний припис розв'язування задачі має важливі характеристики алгоритму: визначеність основних етапів розв'язування задачі та послідовність їх виконання; визначеність класу операцій, що описані в алгоритмічному приписі; визначеність множини можливих наслідків виконання операцій над предметом задачі. Тому в літературі інколи замість більш точного «алгоритмічний припис» уживають просто «алгоритм».

Розглянемо алгоритмічний припис розв'язування рівнянь і нерівностей («метод областей»), що містять модулі й параметр [1]. Наведемо його на прикладах.

Задача 1. Розв'язати нерівність

$$|2x+a-4|+|x^2-2x-a| \le x^2-2. \qquad (1)$$

Розв'язання. Предметом *задачі* 1 є певна множина точок (a, x), котра задається «неявно» у вигляді моделі-нерівності (1). Ця множина й буде розв'язком цієї нерівності. Однак для практичного користування потрібно записати цей розв'язок у загальноприйнятій і звичній («явній») формі, вважаючи, що значення змінної x залежать від значень параметра a, що досить часто зустрічається в описі реальних систем. Отже, процес розв'язування нерівності (1) полягає у послідовному перетворенні моделі певної множини точок, котра й задається цією нерівністю (1). Кінцевою моделлю шуканої множини й буде запис розв'язку нерівності (1) у звичній загальноприйнятій формі. *Припис алгоритмічного припису типу* 1 розв'язування задач виду (1) розглянутий у [2] (метод областей). Наведемо його.

1. Прирівнюємо до нуля вирази, що стоять під знаком модуля:

$$2x+a-4=0; \qquad (2)$$

$$x^2-2x-a=0. \qquad (3)$$

2. Будуємо графіки рівнянь (2) і (3). Графіками будуть пряма лінія і парабола.

3. Лінії (2) і (3) розбивають xOa на області.

4. Розв'язуємо нерівність (1) в кожній із цих областей. Для цього розкриваємо модулі нерівності (1) в кожній області й розв'язуємо відповідні нерівності в цій області. Будуємо графік розв'язку нерівності в цій області.

5. Множини розв'язків нерівностей, отриманих у пункті 4, об'єднуємо й отримаємо розв'язок нерівності (1).

Серед труднощів розв'язування нерівностей типу (1) можна назвати такі.

1. Побудова графіків рівнянь. Учні уміють будувати тільки пряму, параболу, гіперболу. У загальному вигляді нерівність (1) можна записати у вигляді

$$|f(x)|+|q(x)|=s(x). \qquad (4)$$

1.1. Якщо модулів декілька, то побудова учнями навіть прямих, парабол та гіпербол вимагає значних затрат часу, що ставить під сумнів доцільність розв'язування прикладів типу (4) навіть під час спарених уроків у профільних класах та школах, спеціалізованих коледжів та ліцеїв.

1.2. Окрім цього, для математично здібних (обдарованих) учнів та студентів (котрі вміють будувати такі графіки) побудова графіків стає рутинним процесом, що «затушовує» моменти творчості у розв'язуванні задачі.

1.3. Точність побудови графіків «вручну» може бути недостатньою для виокремлення потрібних областей.

1.4. Естетичний вигляд загального рисунку може бути непривабливим, що зменшує емоційну насолоду від його побудови й знижує емоційний стан учня, його активність.

1.5. Графіками рівнянь $f(x)=0$ і $q(x)=0$ можуть бути криві, які не відомі учням чи студентам і їх побудова вручну (а тим більше досить точна) проблематична в принципі.

2. Для побудови множини розв'язків нерівності (1) в кожній області виникають такі труднощі:

2.1. Спочатку потрібно побудувати графіки відповідних рівнянь, що супроводжується тими ж труднощами, що й в пункті 1.

2.2. Окрім цього потрібно визначити ще й множину розв'язків нерівності (1) у цій області та побудувати її на рисунку, що також далеко не завжди просто.

2.3. Лінії $f_i(x)=0$ ($i=0, 1, \ldots, n$) можуть розбити площину xOa на велику кількість областей, у частині яких нерівність (4) не матиме розв'язку.

3. Потрібно об'єднати розв'язки-графіки рівнянь, а потім і нерівностей, отримані в кожній області, що також в ручному режимі займе багато часу.

Для подолання наведених труднощів у розв'язуванні задач типу (4) автори пропонують використання графічних можливостей інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) Mathcad, Gran, Advanced Grapher (AG). У цій статті буде використана AG-технологія, у якій назви осей тільки x і y. Тому роль параметра a в подальшому буде відігравати y. *Алгоритмічний припис* 2 відшукання розв'язку нерівності (1) з використанням AG-технології такий.

1. Побудуємо лінії (2) і (3) (пунктиром) в AG-технології. Для цього в AG вікні на панелі інструментів натискуємо кнопку **Список графиков** і отримуємо вікно з тією ж назвою **Список графиков**. Натиском лівої клавіші мишки робимо це вікно активним. Натискання правою кнопкою на вікні **список графиков** з наступним натисканням лівою кнопкою **Добавить график** висвітлюється нове вікно **Добавить график**:

1) уводимо в рядку «Y(x)=» вираз x^2-2x;

2) вибираємо «толщина» і «стиль» (пунктиром).

Вікно **Добавить график** набуде вигляду (рис. 1).

Після натиску **ОК** лінія $y=x^2-2x$ побудована. За тим же алгоритмом будуємо лінію $y=4-2x$ (на рис. 3 ці лінії зображені пунктиром).

2. У панелі **Добавить график** вибираємо рядок «$f(x, y)$>=<0 — уравнение или неравенство». У другому рядку набираємо вираз:

$$abs(2x+y-4)+abs(x\hat{\ }2-2x-y)-x\hat{\ }2+2.$$

У третьому рядку вибираємо $f(x, y)=0$. Вікно **Добавить график** набуде вигляду (рис. 2). Після натискання кнопки **ОК** у вікні **Свойства графика** буде побудований у вигляді лінії розв'язок рівняння із нерівності (1), котрий буде границею множини розв'язку нерівності (1).

3. За тим самим алгоритмом, що й в пунктах 1 і 2, у вікні **Добавить график** (рис. 2.) у третьому рядку вибираємо $f(x, y)<0$ і після натиснення кнопки **ОК** у вікні **Свойства графика** отримаємо множину розв'язків нерівності (1) у графічному вигляді (графічна модель предмета задачі 1 , котра й буде зображати розв'язк нерівності, рис. 3).

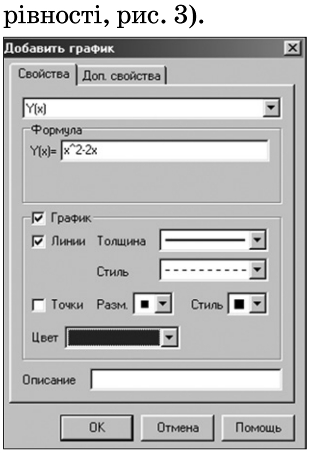

Рис. 1

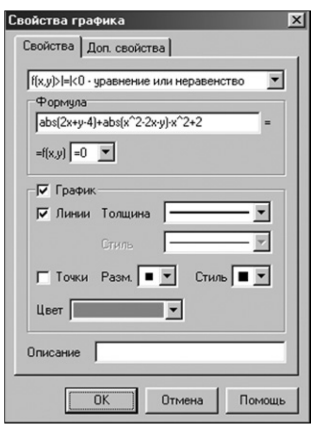

Рис. 2

4. На рис. 3 отримали розв'язок нерівності (1) у графічній формі (заштрихована частина). З цього малюнка видно, що не у всіх областях існує розв'язок рівняння, що відповідає границі множини розв'язку нерівності. Рис. 3 як графічна модель розв'язування й розв'язку нерівності (1) виступає як опора подальшого процесу розв'язування нерівності (1) з метою реалізації «Методу областей» з використанням AG-технології. Користуючись рис. 3, визначаємо рівняння ліній, котрі утворюють границю заштрихованої області-розв'язку нерівності (1).

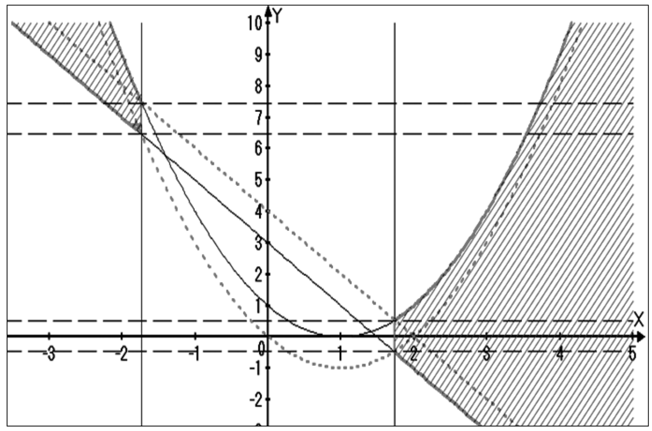

Рис. 3

4.1. Вибираємо точку, що належить одній із областей, наприклад — (–3; 0). Визначаємо знаки виразів, що стоять під знаками модулів у рівнянні, що відповідає нерівності (1) й одержуємо систему нерівностей, що визначає цю область:

$$\begin{cases} 2x+y-4\le 0; \\ x^2-2x-y\ge 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Розкриваючи згідно (5) модулі у рівнянні

$$|2x+y-4|+|x^2-2x-y|=x^2-2, \qquad (6)$$

що відповідає нерівності (1) і є рівнянням границі області-відповіді, після спрощення одержимо

$$2x+y-3=0. \qquad (7)$$

Добавляємо лінію (7) у AG-середовищі у вікні, що зображене на рис. 3.

4.2. Беремо точку з іншої області (де є лінія границі області). Очевидно такою точкою може бути (0; 10). Визначаємо знаки виразів, що стоять під знаками модулів рівняння (6) у вибраній області. Одержимо аналітичний запис цієї області:

$$\begin{cases} 2x+y-4\ge 0; \\ x^2-2x-y\le 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Відповідно (8) розкриваємо модулі у рівнянні (6) і одержуємо після перетворень рівняння

$$y-(x-1)^2=0. \qquad (9)$$

Добавляємо лінію (9) у AG-середовищі у вікні, що зображене на рис. 3.

4.3. Беремо точку з третьої й останньої області, котра містить границю множини-розв'язку нерівності (1), наприклад, (0; 3). Визначаємо знаки виразів, що стоять під знаками модуля у рівнянні (7), і записуємо в аналітичній формі цю область:

$$\begin{cases} 2x+y-4\le 0; \\ x^2-2x-y\le 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Відповідно (10) розкриваємо модулі в рівнянні (7). Після перетворень отримаємо

$$x-\sqrt{3}=0;\quad x+\sqrt{3}=0. \tag{11}$$

Рівняння (11) є парою вертикальних прямих. Добавляємо їх в AG вікні й отримуємо картинку, що відображена на рис. 3.

Отже, ми одержали рівняння ліній, котрі складають границю області-розв'язку нерівності (1).

5. Рухаючи лінію $y=c$, $-3\le c\le 10$ знизу вгору, одержуємо рівняння ліній, що визначають потрібні для відшукання аналітичного розв'язку нерівності (1) проміжки для параметра y (у вихідній нерівності це параметр a):

$$\begin{aligned} &y=3-2\sqrt{3},\quad y=4-2\sqrt{3},\\ &y=3+2\sqrt{3},\quad y=4+2\sqrt{3}. \end{aligned} \tag{12}$$

Значення y в (12) одержали під час розв'язування таких систем рівнянь (див. рис. 3):

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x=\sqrt{3} \end{cases};\quad \begin{cases} 2x+y-4=0 \\ x=\sqrt{3} \end{cases};\\ &\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x=-\sqrt{3} \end{cases};\quad \begin{cases} 2x+y-4=0 \\ x=-\sqrt{3} \end{cases}. \end{aligned} \tag{13}$$

Добавляємо лінії (12) у AG-вікні. Отримуємо рис. 3 повністю.

6. Виходячи з рис. 3, записуємо в аналітичній формі розв'язок нерівності (1), замінюючи при цьому y на параметр a.

$$\left[\begin{array}{l} при\ a\le 3-2\sqrt{3}\quad x\ge \dfrac{3-a}{2};\\ при\quad 3-2\sqrt{3}<a\le 4-2\sqrt{3}\quad x\ge\sqrt{3};\\ при\quad 4-2\sqrt{3}<a<3+2\sqrt{3}\quad x\ge\sqrt{a}+1;\\ при\quad a=3+2\sqrt{3}\quad (x=-\sqrt{3};\ )\cup(x\ge\sqrt{a}+1);\\ при\quad 3+2\sqrt{3}<a\le 4+2\sqrt{3}\\ \left(\dfrac{3-a}{2}\le x\le-\sqrt{3}\right)\cup\left(x\ge\sqrt{a}+1\right)\\ при\quad a>4+2\sqrt{3}\\ \left(\dfrac{3-a}{2}\le x\le-\sqrt{a}+1\right)\cup\left(x\ge\sqrt{a}+1.\right) \end{array}\right. \tag{14}$$

Отже, отримали розв'язок нерівності (1) в аналітичній формі (14). Сукупність рівнянь і нерівностей (14) і є потрібною математичною моделлю предмета задачі 1, моделлю-розв'язком цієї задачі.

Графічні та аналітичні можливості AG-технології можна застосувати й до розв'язування рівнянь і нерівностей типу

$$f(x,a)\le 0,\ \text{чи}\ f(x,a)\ge 0. \tag{15}$$

Алгоритмічний припис розв'язування нерівностей (рівнянь) типу (15) може мати вигляд:

1. В AG-технології будуємо лінію $f(x,y)=0$, координати точок якої й задовольнятимуть дане рівняння. Нагадуємо, що у ролі параметра в AG виступає y, тому що система координат тут xOy й довільно змінювати ім'я осі не можна.

2. Будуємо в AG геометричний розв'язок нерівності $f(x,y)\le 0$.

3. Виходячи з геометричного розв'язку нерівності, знаходимо аналітичний запис розв'язку.

Проілюструємо цей припис на прикладі.

Задача 2. Розв'язати нерівність (y — параметр)

$$(y^2+3y)x^2+2(y+3)x-3y-9\le 0. \tag{16}$$

Розв'язання. Легко здійснити перетворення нерівності (16) й записати її у вигляді

$$(y+3)(yx^2+2x-3)\le 0. \tag{17}$$

Наведемо алгоритмічний припис 3 розв'язування нерівності (17).

1. Будуємо в AG-технології лінію, що задана рівнянням

$$y+3=0. \tag{18}$$

2. Розв'язуємо квадратне рівняння

$$yx^2+2x-3=0 \tag{19}$$

відносно x і знаходимо

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{4+12y}}{y}; \tag{20}$$

$$x_2=\frac{-1-\sqrt{4+12y}}{y}. \tag{21}$$

Розв'язувати квадратне рівняння (19) необхідно для визначення границь зміни x, y.

3. Будуємо в AG-технології лінію (20). На рис. 4 вона зображена більш жирною кривою.

4. Будуємо в AG-технології лінію (21). На рис. 4 вона зображена менш жирною кривою. Побудувати «вручну» лінії (19), (20) і (21) досить проблематично взагалі, не говорячи вже про прийнятний час. Окрім того, розв'язки (20) і (21) мають досить цікаве взаємне розташування, визначити яке без можливостей AG-технології практично дуже важко. У точці (3, $-1/3$) відбувається зміна лінії (20) на лінію (21). Лінії (18), (20) і (21), котрі становлять границю області розв'язку нерівності (16), побудовані.

5. В AG-технології будуємо область-розв'язок нерівності (16) (рис. 4).

6. Для визначення проміжків зміни y і x і запису розв'язку нерівності (16) в аналітичній формі потрібно із (19) визначити y, знайти y' і визначити точку мінімуму:

$$y=\frac{3-2x}{x^2},\quad y'=\frac{2x-6}{x^3}.$$

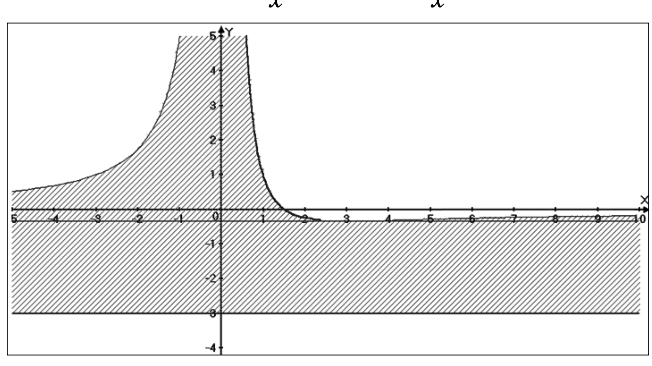

Рис. 4

Для знаходження екстремальної точки розв'язуємо рівняння

$$2x-6=0 \;\Rightarrow\; x=3 \;\Rightarrow\; y=-1/3.$$

7. Рухаємо пряму $y=c$ знизу вгору і, враховуючи попередні пункти розв'язування задачі 2, знаходимо аналітичний запис розв'язку нерівності (16)

$$\left[\begin{array}{l} \text{при} \quad y<-3 \quad x\in\varnothing \\ \text{при} \quad -3\le y\le -\dfrac{1}{3} \quad x\in R \\ \text{при} \quad -\dfrac{1}{3}<y<0 \\ \left(x\le \dfrac{-1+\sqrt{1+3y}}{y}\right)\bigcup\left(x\ge \dfrac{-1-\sqrt{1+3y}}{y}\right) \\ \text{при} \quad y=0 \quad x\le 1{,}5 \\ \text{при} \quad y>0 \quad \left(\dfrac{-1-\sqrt{1+3y}}{y}\le x\le \dfrac{-1+\sqrt{1+3y}}{y}\right) \end{array}\right. \qquad (22)$$

Сукупність рівнянь і нерівностей (22) і є потрібною моделлю предмета задачі — специфічною формою запису множини, котра задається нерівністю (2).

Отже, використовуючи можливості AG-технології, можна повністю чи частково позбутися труднощів (котрі перераховані вище) у розв'язуванні рівнянь чи нерівностей з параметрами, зокрема, методом областей.

Задача 3. Розв'язати нерівність

$$|3x+4y+3|-|2x+y+1|+|x-y-6|-|y-2x+4|\le 0. \quad (23)$$

Розв'язування. Використаємо *алгоритмічний припис* 2 для розв'язування нерівності (23).

1. Побудуємо в AG лінії:
1.1. $3x+4y+3=0$.
1.2. $2x+y+1=0$.
1.3. $x-y-6=0$.
1.4. $y-2x+4=0$.

На рис. 5 вони зображені менш жирними лініями. Наведені лінії розбивають площину (xOy) на 11 областей.

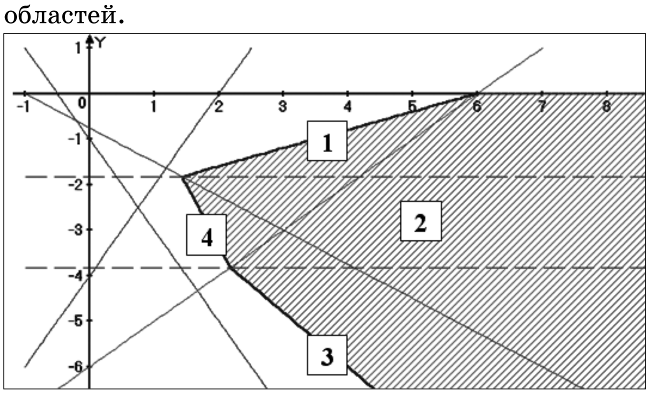

Рис. 5

2. Будуємо в AG графічну модель розв'язку рівняння

$$|3x+4y+3|-|2x+y+1|+|x-y-6|-|y-2x+4|=0. \quad (24)$$

Нею буде більш жирна ламана лінія на рис. 5. З цього малюнка видно, що границя шуканої області-розв'язку рівняння (24) буде тільки в чотирьох із одинадцяти областей.

3. Знайдемо рівняння ланок ламаної (24) в кожній із чотирьох областей.

3.1. У першій області беремо точку (3, 0). Відповідним рівнянням буде

$$-2x+5y+12=0. \quad (25)$$

3.2. За точкою (8, 0) другої області визначаємо рівняння ланки ламаної (24), що належить цій області

$$y=0. \quad (26)$$

3.3. Точка (4, −6) належить третій області. Тоді маємо рівняння відповідної ланки ламаної

$$6x+5y+6=0. \quad (27)$$

3.4. У четвертій області беремо точку (2, −3). Маємо відповідне рівняння

$$8x+3y-6=0. \quad (28)$$

4. Знаходимо точки, котрі визначатимуть зміну параметра y.

4.1. Знайдемо точки перетину ліній (25) і (28). Маємо

$$x=\frac{33}{23}, \quad y=-\frac{42}{23}.$$

4.2. Знайдемо точку перетину ліній (27) і (28). Маємо

$$x=\frac{24}{11}, \quad y=-\frac{42}{11}.$$

5. Будуємо в AG прямі

$y=-\dfrac{42}{23}$, $y=-\dfrac{42}{11}$ (зображені пунктиром).

6. Будуємо графічну модель розв'язку нерівності

$$|3x+4y+3|-|2x+y+1|+|x-y-6|-|y-2x+4|\le 0. \quad (29)$$

Графічною моделлю розв'язку нерівності (29) буде заштрихована область на рис. 5.

7. Виходячи з рис. 5, запишемо модель розв'язку нерівності (25) в аналітичній формі (аналітична модель розв'язку). Для цього потрібно рухати пряму $y=c$ знизу вгору.

$$\left[\begin{array}{ll} \text{при} \quad y\le -\dfrac{42}{11} & x\ge -\dfrac{5}{6}y-1 \\ \text{при} \quad -\dfrac{42}{11}<y\le -\dfrac{42}{23} & x\ge -\dfrac{3}{8}y+\dfrac{3}{4} \\ \text{при} \quad -\dfrac{42}{23}<y\le 0 & x\ge \dfrac{5}{2}y+6 \\ \text{при} \quad y>0 & x\in\varnothing \end{array}\right. \qquad (30)$$

Сукупність (30) і є записом множини розв'язку нерівності (23) в аналітичній формі.

Кожний учитель повинен розуміти, що не існує «універсальної методики навчання» розв'язування задач з математики, зокрема, рівнянь і нерівностей з параметрами. Кожна з методик, способів, методів розв'язування мають свої переваги й недоліки, котрі можуть виявлятися тільки за певних умов, за певних ситуацій. Тому доцільно здійснити аналіз методів розв'язування задач, котрі наведені вище: розв'язування без можливостей ІКТ (і комп'ютера, відповідно) і з використанням можливостей ІКТ, у нашому випадку — можливостей AG-технології. На думку авторів, можна виділити такі переваги використання можливостей ІКТ-технологій у навчанні математики, зокрема, у навчанні розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами.

1. Можливість досить точної побудови із самого початку розв'язування в AG-технології графічної опори-розв'язку рівняння чи нерівності з параметрами, що значно спростить відшукання аналітичного запису розв'язку рівняння чи нерівності.

2. У розв'язуванні задач з параметрами відпадає необхідність рутинної роботи суб'єкта розв'язування, а саме — побудови областей та геометричних картин розв'язку в кожній області.

3. Суб'єкт розв'язування задачі (рівняння чи нерівності) досить оперативно може здійснювати різні зміни у процес розв'язування й тим самим по суті має можливість ефективного експериментування за допомогою комп'ютера в пошуку розв'язку задачі. Навчальна діяльність учня у розв'язуванні задач з використанням комп'ютера значною мірою має дослідницько-пошуковий, а, значить, творчий характер.

4. Суб'єкт розв'язування задачі може сам собі ставити запитання й за допомогою комп'ютера відшуковувати відповіді на них, що є ознаками діалогу суб'єкта розв'язування самим із собою в розв'язуванні задачі. Отже, комп'ютер є засобом організації такого.

5. Комп'ютер значно розширив можливості навчальної діяльності учня в розв'язуванні рівнянь і нерівностей з параметрами, розширив простір можливостей розвитку особистості учня загалом, створюється новий інформаційно-розвивальний простір для учня.

6. Використання комп'ютера спонукає учня до активності, самовираження, самореалізації й індивідуальної відповідальності — основних загальних характеристик розвитку особистості.

7. Процес розв'язування задачі для учня значно прискорюється завдяки використанню можливостей ІКТ. А використання різних кольорів, графіків ліній і областей різних видів, можливість швидкої реалізації думки, отримання розв'язку в геометричній формі створює реальну й ефективну обстановку самостійної діяльності учня в розв'язуванні задачі.

8. Створюється нова людино-машинна система розв'язування задачі, у просторі діяльності якої зростає інтерес до оволодіння знаннями, самостійного подолання проблемної ситуації без різних повчань і натяків, що значно підвищує рівень мотивації до навчання. Адже саме власні потреби, бажання, наміри, устремління, інтереси, домагання учень може задовольнити у процесі використання ІКТ у розв'язуванні задач.

9. Учень має можливість (майже наочно) побачити свої успіхи й невдачі, критично оцінити власні знання й уміння.

10. Розв'язування задачі за допомогою комп'ютера перетворюється у процес гри, де учень має можливість самостійно конструювати й здійснювати навчальну діяльність.

11. Комп'ютер активно задіює учня в навчальний процес, сприяє тому, що учень стає «творцем» навчального процесу, а не тільки виконавцем.

12. Набагато зростає можливість розв'язування якісно різних задач, що надає можливість більш всебічно й повно розглянути проблему навчання розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами.

13. Комп'ютер надає можливість розв'язати за прийнятний час достатню кількість індивідуальних задач певного типу й зрозуміти загальну логіку процесу їхнього розв'язування. Після чого учень може створити алгоритм розв'язування родової задачі, на чому наголошував Ю.І. Машбиць [4] (з приводу індивідуальної й родової задачі див. Балл Г.О. [1]).

14. Розв'язування задач з використанням ІКТ «сприяє формуванню в учнів рефлексії своєї діяльності» [4, с. 14], чого важко досягти в «безмашинному» навчанні. Насамперед учень має можливість наочно представити результати власної навчальної діяльності, свідомо реалізувати власні думки й дії, аналізувати й оцінювати власні успіхи і невдачі.

Разом з тим комп'ютер і всі ІКТ не можуть бути панацеєю проблем навчання. Труднощі, котрі зустрічає вчитель і учень у використанні можливостей ІКТ у розв'язуванні задач, можуть бути такими.

1. Учень повинен володіти тими ІКТ, котрі вчитель використовує в навчанні математики (чи інших предметів).

2. Учень повинен знати ті можливості ІКТ, котрі будуть використовуватися у навчанні математики.

3. Для розв'язування перших двох проблем потрібно вирішити проблему узгодженості програм і планів з інформатики і математичних дисциплін, або відводити частину годин з математики на вивчення ІКТ.

4. Учителю потрібно створити й відпрацювати методики використання ІКТ у розв'язуванні тих чи інших проблем навчання математики.

5. Учителю потрібно підібрати систему відповідних задач для успішного вирішення певної проблеми навчання, що саме собою є непростою дидактичною проблемою.

6. Важливо сформувати в учнів розуміння обмеженості можливостей ІКТ й роботи учнів у просторі можливостей тієї чи іншої ІКТ.

Матеріали статті можуть бути корисними методистам, учителям і учням загальноосвітніх шкіл, викладачам і студентам коледжів, гімназій, педагогічних навчальних закладів.

Література

1. *Балл Г.А.* Теория учебных задач. Психолого-педагогический аспект. — М.: Педагогика, 1990. — 184 с.
2. *Кушнір В.А., Кушнір Г.А., Ріжняк Р.Я.* Інноваційні методи навчання математики / Науково-методичний посібник. — Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. — 148 с.
3. *Ланда Л.Н.* Алгоритмизация в обучении. Под общей ред. Б.В. Гнеденко и Б.В. Бирюкова. — М.: Просвещение, 1966. — 523 с.
4. *Машбиц Е.И.* Психолого-педагогические проблемы компьютеризации обучения: [Педагогическая наука — реформе школы]. — М.: Педагогика, 1988. — 192 с.
5. *Машбиц Е.И., Андриевская В.В., Комиссарова Е.Ю.* Диалог в обучающей системе. — К.: Выща шк. Головное изд-во, 1989. — 184 с.
6. *Пойя Д.* Как решать задачу. — Львів: Квантор, 1991. — 215 с.
7. *Пономарев Я.А.* Психология творчества. — М.: Наука, 1976. — 305 с.
8. *Роменець В.А.* Психологія творчості: Навч. посібник. 3-е вид. — К.: Либідь, 2004. — 288 с.
9. *Фридман Л.М.* Логико-психологический анализ школьных учебных задач / Л.М. Фридман. НИИ общей и педагогической психологии АПН СССР. — М.: Педагогика, 1977. — 207 с.