

## ПРОГРАМИ ДЛЯ РОБОТИ З ФУНКЦІЯМИ ТА ГРАФІКАМИ

Ракута В. М.

Стаття присвячена аналізу програмного забезпечення для роботи з функціями та їх графіками, методиці його використання в загальноосвітніх навчальних закладах для вивчення математики з метою підвищення ефективності та якості навчально-виховного процесу.

Однією з умов подальшого підвищення ефективності процесу вивчення математики в загальноосвітніх навчальних закладах є запровадження у навчально-виховний процес сучасних комп'ютерних технологій. Серед цих технологій важливе місце посідають прикладні програми, що мають у своєму складі засоби для роботи з функціями та їх графіками (графопобудовники). Як приклад, можна назвати такі: Gran1W, Microsoft Office Excel, MathCAD, DERIVE, Advanced Grapher 2.2, «Графіки» (версії 3.1 і 3.2), FlatGraph та інші.

MathCAD, DERIVE — це потужні системи комп'ютерної математики (СКМ) з великим переліком функціональних можливостей. Суттєвим їх недоліком є досить висока вартість ліцензійних версій та складність освоєння, що фактично робить неможливим їх використання у більшості загальноосвітніх навчальних закладів України.

Програма Gran1W має багатий набір інструментів для роботи з функціями та їх графіками. Існує література [2, 3], що знайомить з можливостями програми та їх використанням у вивченні математики. Функціональні можливості, методичний супровід та простота освоєння програми дозволяє її успішно використовувати під час вивчення математики у вищих та середніх загальноосвітніх навчальних закладах України.

Є низка програм, менш відомих, але які, на нашу думку, заслуговують на те, щоб з ними познайомитися і навчитися ефективно використовувати для вивчення математики. Це такі як: Advanced Grapher 2.2 (автор Михайло Серпик, домашня сторінка програми: <http://www.alentum.com/agrapher/>), «Графіки» (версії 3.1 і 3.2, автор Кветкін Іван) та деякі інші. Усі названі засоби ми намагатимемося розглянути у контексті впливу їх використання на якість навчального процесу вивчення математики. Ці програмні продукти ще мають одну суттєву перевагу, вони безкоштовні, вільно розповсюджуються та доступні для скачування в Інтернеті. Отже як учителі, так і учні можуть їх використовувати не тільки в навчальних аудиторіях, а й за межами навчального закладу.

Почнемо з Advanced Grapher (рис. 1). Програма є потужним засобом для побудови графіків функцій та роботи з ними, а також має багато додаткових можливостей. Наведемо основні з них, що можуть бути корисними для вивчення математики у загальноосвітніх навчальних закладах.

- Побудова графіків функцій однієї змінної, заданих аналітично у прямокутній декартовій системі координат.
- Побудова графіків функцій у полярній системі координат.

- Побудова графіків функцій, заданих за допомогою рівнянь.
- Побудова графіків функцій, заданих таблицею значень.
- Побудова дотичної і нормалі до графіка функції у заданій точці.
- Трасування графіка. Побудова таблиці значень.
- Знаходження аналітичного виразу для похідної даної функції.
- Знаходження нулів функції на заданому проміжку.
- Дослідження на екстремум на заданому проміжку.
- Виконання чисельного інтегрування. Графічна ілюстрація.
- Наближене знаходження коренів рівнянь та їх систем.
- Знаходження координат точок перетину графіків двох функцій на заданому проміжку.
- Обчислення числових виразів.
- Графічне розв'язування нерівностей та їх систем.
- Імпорт та експорт табличних даних.
- Експорт зображень графіків. Графіки (зображення координатної площини) можна зберігати у файли форматів GIF, BMP та EMF, а також копіювати до буферу обміну в форматах EMF і BMP. Формат EMF є векторним, тому йому краще віддавати перевагу у випадку обміну даними з тими програмами, які в подальшому будуть масштабувати рисунок (наприклад, Microsoft Word). Для збереження і копіювання малюнка використовуються відповідно команди **Файл\Сохранить как рисунок і Правка\Копировать как рисунок**.

Програма є дуже простою для освоєння, що є важливим чинником у процесі її використання під час ви-

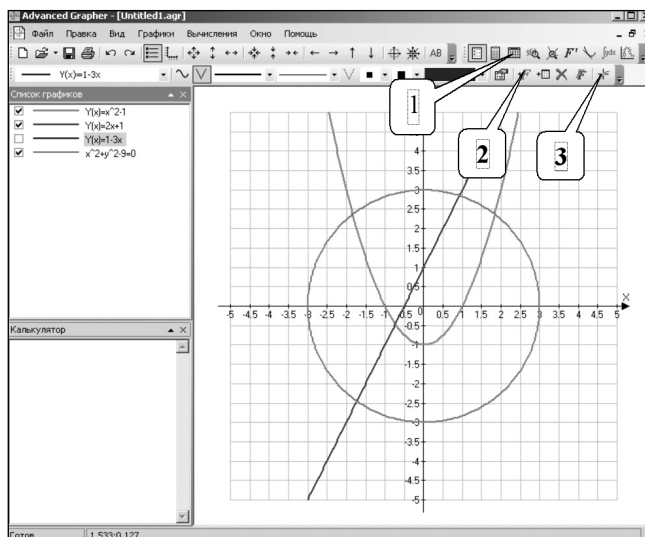


Рис. 1

вчення математики, оскільки на її освоєння використовується мінімум часу. Наприклад, щоб побудувати графік функції, рівняння чи нерівності, використовують інструмент **Додати графік** (рис. 1, кнопка 2). Після його обрання на екрані монітора з'явиться вікно **Властивості графіка** (рис. 2). До поля **Формула** вводимо відповідний вираз, обираємо інші параметри і натискаємо кнопку **ОК**. У результаті буде побудовано графік відповідної функції, рівняння чи нерівності. У даному випадку отримаємо графік функції  $y=1/x$  (рис. 3). Аналогічно будуються графіки інших функцій.

Отримати більш докладну інформацію про можливість програми та їх використання можна, скориставшись посібником «Використання ІКТ при вивченні математики (Практикум. Частина I)» [7] (електронний варіант посібника можна знайти на сайті [9]) та довідковою системою програми.

Використання даної програми можна починати вже з 7-го класу. Під час вивчення теми «Функції» для формування навичок побудови графіків функцій за точками програма допоможе автоматизувати процес складання таблиці значень аргумента та відповідних їм значень функції, що дозволить зекономити час чи безпосередньо на уроці, чи при підготовці до нього. Це можна здійснити, скориставшись інструментом **Таблиця значень** (див. рис. 1, кнопка 1). Після його обрання на екрані з'явиться відповідне вікно (рис. 4). Далі у поле формула слід ввести з клавіатури відповідний вираз, вказати у відповідних полях інтервал зміни значень аргумента, ввести значення кроку та натиснути кнопку **Считати**. Звичайно, використовувати цей інструмент можна (і доцільно це робити) не тільки і не стільки у 7-му класі, а й під час вивчення курсу шкільної математики у 8–11-их класах.

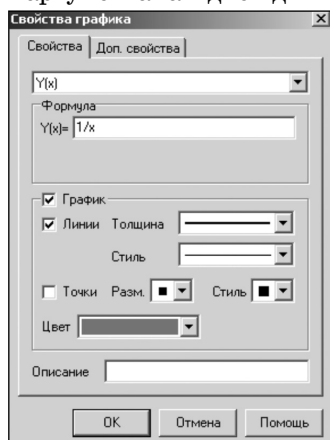


Рис. 2

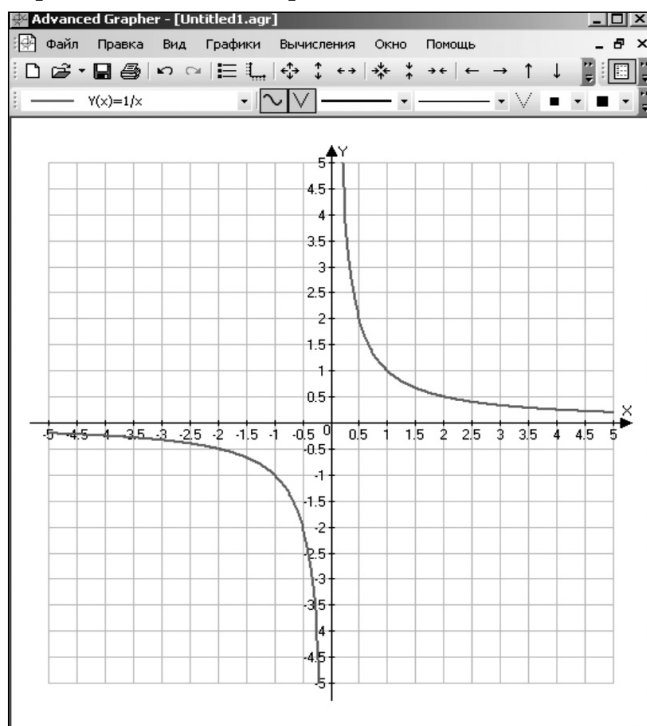


Рис. 3

x	f(x)
-5	-17
-4	-14
-3	-11
-2	-8
-1	-5
0	-2
1	1
2	4
3	7
4	10
5	13

Рис. 4

Змоделювати зростання і спадання функції можна за допомогою інструменту **Трасування** (якому відповідає кнопка [3] на панелі інструментів графік (див. рис. 1)). Після клацання на ній лівою клавішею миші, на екрані з'явиться вікно (рис. 5). Обравши один із побудованих графіків функції, рухаємо за допомогою миші повзунок [1] (див. рис. 5). При русі зліва направо значення аргумента функції збільшуються, при русі справа наліво — зменшуються. Звертаємо увагу учнів на зміну значень функції при збільшенні значень аргумента. Крім цього, точку графіка обраної функції з відповідними координатами вказує маркер [2] (див. рис. 5).

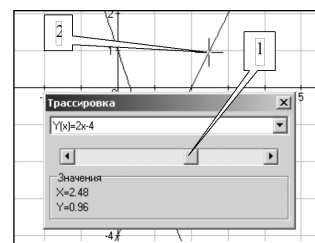


Рис. 5

Advanced Grapher 2.2 може бути корисною для вивчення тем шкільного курсу математики, пов'язаних з функціями та їхніми графіками, як хороший засіб автоматизації процесу створення паперових дидактичних матеріалів, що містять зображення графіків функцій та рівнянь. Це ефективний засіб для автоматизації процесу розв'язування рівнянь та їх систем графічним способом, що буде проілюстровано нижче. І починати використовувати Advanced з цією метою можна вже із 7-го класу.

Вивчаючи тему «Розв'язування задач складанням систем рівнянь», після того, як отримано систему рівнянь, розв'язати її можна графічним способом за допомогою Advanced Grapher, що дозволить зекономити час на уроці і відповідно розв'язати більшу кількість задач.

Під час вивчення курсу алгебри у 7-му класі загальноосвітніх навчальних закладів програмою передбачено вивчення таких тем: функція, область визначення і область значень функції, способи задання функції, графік функції; лінійна функція, її графік та властивості; розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними: графічним способом. Під час вивчення цих тем в основному виникає

потреба в побудові графіків лінійних функцій та лінійних рівнянь. Що можна зробити досить легко і швидко у зошиті чи на дошці традиційними засобами. У курсі ж алгебри 8-го класу (не говорячи вже про 9-й, 10-й, 11-й) передбачено вивчення функцій  $y=k/x$ ,  $y=x^2$ ,  $y=\sqrt{x}$ . Отже, актуальність використання комп'ютерних засобів для роботи з функціями та їх графіками у 8–12-их класах значно зростає.

Наприклад, під час вивчення теми «Функція  $y=k/x$ » учитель може використати Advanced Grapher для побудови графіків функцій для різних  $k$  (наприклад 1; -1; 6; -6; 12; -12), а потім запропонувати учням сформулювати відповідні властивості функції залежно від значення  $k$ . Сильним учням можна дати напередодні вивчення теми, наприклад, таке завдання: за допомогою Advanced Grapher побудувати графіки функцій  $y=1/x$ ,  $y=2/x$ ,  $y=-2/x$ ,  $y=10/x$ ,  $y=-10/x$ . Дослідити за графіками та сформулювати їхні властивості (перелік властивостей для дослідження надається).

Під час розв'язування рівнянь з параметрами, а особливо їх систем, часто приходиться на допомогу графічний метод. Використанню програми Gran1 W для розв'язування цього класу задач приділено достатню увагу, зокрема в періодичних виданнях (наприклад: [1], [6]).

Розв'язувати рівняння з параметрами та їх системи можна і за допомогою Advanced Grapher. Як приклад, розглянемо таке практичне завдання, яке можна використати для того, щоб познайомити учнів старших класів з використанням Advanced для розв'язування даного класу задач.

Задача №1. [8, №1.363(а)]

Знайти всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких система рівнянь має три розв'язки:

$$\begin{cases} x + 3|y| + 5 = 0; \\ (x - a)^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Задача №2. [8, №1.365(а)]

Знайти всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких система рівнянь має чотири розв'язки:

$$\begin{cases} |x + y| + |x - y| = 2; \\ x^2 + y^2 = (a - 1)^2. \end{cases}$$

Задача №3. [8, №1.365(б)]

Знайти всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких система рівнянь має один розв'язок:

$$\begin{cases} y - |x| - |x - 4| = 0; \\ y + (x - 2)^2 = a^2 - 2a + 1. \end{cases}$$

Задача №4.

Знайти всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких система рівнянь має один розв'язок:

$$\begin{cases} y - ||x| - 1| = 0; \\ x^2 + (y - 3)^2 = a^2 + 2a + 1. \end{cases}$$

Задача №5. [8, №1.374(б)]

Знайти всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких система рівнянь має чотири розв'язки:

$$\begin{cases} (|x| - a)^2 + (|y| - a)^2 = a^2; \\ |x + y| + |x - y| = 2. \end{cases}$$

Задачу №1 за допомогою Advanced Grapher можна розв'язати так.

1. Запускаємо програму Advanced Grapher.

2. Будуємо графік першого рівняння.

3. Будуємо графік другого рівняння, при значенні параметра, що дорівнює, наприклад, нулю (це буде коло з центром у початку координат та радіусом, що дорівнює 2).

4. Система рівнянь буде мати рівно 3 розв'язки у випадку, якщо графіки рівнянь будуть мати три спільні точки. Розглянемо побудовані графіки (рис. 6).

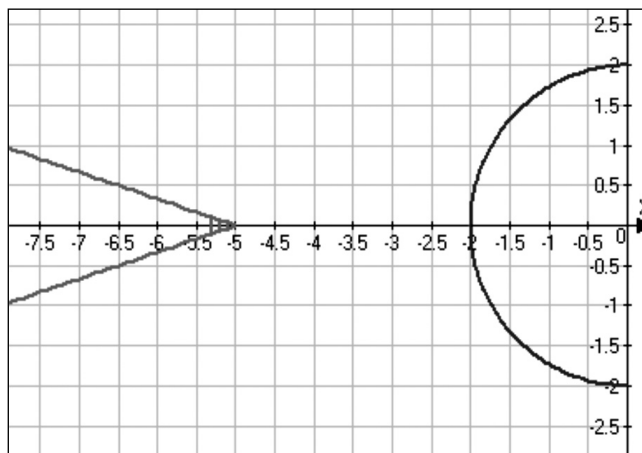


Рис. 6

5. З малюнка видно, що коло буде мати з графіком першого рівняння три спільні точки, якщо точка з координатами  $(-5; 0)$  належатиме колу, а всі інші його точки будуть розташовані лівіше від неї.

6. Це можливо, якщо центр кола буде мати координати  $(-7; 0)$ . Отже,  $a = -7$ .

7. Зробимо перевірку, виконавши за допомогою Advanced Grapher відповідні побудови.

8. Розглянувши отримані побудови, можемо впевнитись у правильності наших міркувань (рис. 7).

9. Зберігаємо побудови.

10. Закриваємо програму.

З метою закріплення отриманих навичок можна запропонувати учням задачі №2; 3; 4; 5 розв'язати самостійно.

Такі інструменти Advanced Grapher, як **Дослідження функцій**, **Перетини**, **Похідна**, **Дотична чи нормаль**, **Інтегрування** можуть бути використані під час вивчення алгебри та початків аналізу у 10–11-их класах ЗНЗ з метою оптимізації навчального процесу та підвищення його ефективності. Про це ми плануємо поговорити у наступних наших публікаціях.

Програма «Графіки» (версії 3.1 і 3.2) має менші, порівняно з програмою «Advanced Grapher», можливості, але разом з тим має засоби, які відсутні в останній та можуть бути застосовані під час вивчення функцій. Вона проста в освоєнні та використанні, має простий і інтуїтивно зрозумілий російськомовний інтерфейс. Це одна з переваг програми, оскільки не по-

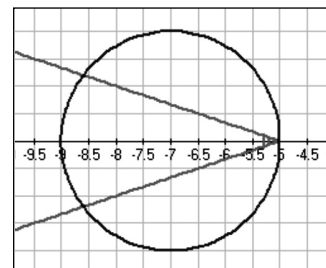


Рис. 7

трібно багато часу для оволодіння навичками роботи з нею. Довідкова система програми фактично складається з двох сторінок.

Пункт меню **Функція** (рис. 8) програми «Графіки (версія 3.1)» (рис. 9) складається з 10 стандартних функцій, обираючи кожну з яких призводить до побудови відповідного графіка. Пункт меню **Функція\Альтернативная** надає можливість побудувати графіки функцій, що відсутні у переліку.

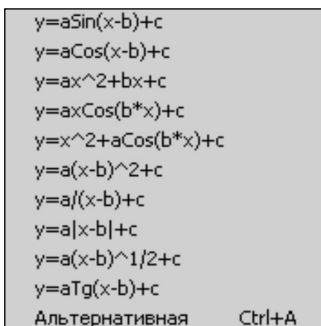


Рис. 8



Рис. 9

Програма «Графіки (версія 3.2)» (рис. 10), на відміну від «Графіки (версія 3.1)», не має стандартного набору функцій, але надає можливість для побудови більше ніж двох графіків в одному вікні. Однією з переваг програми «Графіки (версія 3.1), (версія 3.2)» є можливість використання параметрів  $a, b$  і  $c$ . Це дозволяє успішно застосовувати цей засіб у вивченні тем, пов'язаних із перетворенням графіків функцій. Учитель, наприклад, може для вивчення теми, пояснюючи новий матеріал, використати параметри для демонстрації перетворень графіка функції залежно від значення відповідного параметра та запропонувати учням самостійно зробити висновки і сформулювати відповідні правила. Або ж дати сильним учням напередодні завдання для виконання самостійного дослідження і формулювання відповідних правил із подальшим їх оголошенням та обговоренням на уроці під час вивчення відповідної теми. Останнє, на нашу думку, є набагато ефективнішим та кориснішим, бо по-

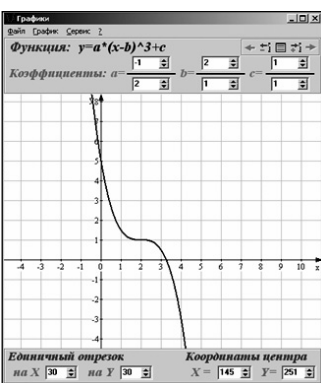


Рис. 10

дібні завдання сприяють ще й розвитку дослідницьких здібностей учнів.

Ми навели тільки кілька прикладів, які ілюструють можливості використання прикладних програм Advanced Grapher 2.2 та «Графіки» для вивчення математики. Звичайно, використання розглянутих програм та інших засобів ІКТ у вивченні математики повинно сприяти підвищенню якості навчального процесу. Інформаційно-комунікаційні технології слід використовувати з певною, цілком усвідомленою вчителем, метою. Якщо в результаті використання будь-яких технічних чи інших засобів результативність як окремого уроку, так і процесу вивчення математики в цілому не покращується, то постає питання в доцільності такого використання.

Наостанок, скажемо кілька слів про умови, необхідні для ефективного впровадження та використання ІКТ взагалі, і програм для роботи з функціями та їхніми графіками зокрема. Головною необхідною умовою результативного використання інформаційно-комунікаційних технологій є їх наявність та можливість до них доступу у разі потреби, як на уроці математики, так і в позаурочний час. На даний момент у багатьох школах така можливість відсутня взагалі або, у кращому випадку, є можливість фрагментарного доступу до навчального комп'ютерного комплексу (НКК) у той час, коли там не проводяться уроки інформатики і якщо він (НКК) пристосований до такого використання. Доволі часто НКК ЗНЗ розраховані на заняття по підгрупах, а уроки математики проводяться з усім класом.

На нашу думку, як мінімум, кабінет математики обов'язково повинен бути забезпечений мультимедійним обладнанням: комп'ютер, мультимедійний проектор, аудіообладнання. Наявність інтерактивної (сенсорної) дошки при цьому є бажаним, але не обов'язковим компонентом. У багатьох випадках, залежно від типу проектора, керувати демонстрацією зображення і роботою комп'ютера можна за допомогою дистанційного пульта керування проектором. Також навчальний заклад повинен мати, як мінімум, один НКК (забезпечений технічно з розрахунку «один комп'ютер») для використання під час вивчення різних (крім інформатики) навчальних дисциплін, у тому числі він, за потреби доступу до комп'ютера кожного учня, міг би використовуватись й у вивченні математики. Тільки за виконання цих мінімальних технічних умов ми можемо говорити про можливість результативного використання ІКТ у вивченні математики.

Наявність технічної бази є необхідним компонентом, але недостатнім. Для ефективного впровадження ІКТ у процес вивчення математики потрібно вирішити ще декілька проблем. Однією з них є надання можливості і права використання учнями комп'ютерних технологій не тільки під час засвоєння нових знань та відпрацювання вмінь і навичок, а й перевірки навчальних досягнень, незалежно від того, де, коли і на якому рівні ця перевірка проводиться. Мається на увазі використання засобів ІКТ на тематичних контрольних роботах, іспитах (у тому числі і вступних), під час зовнішнього незалежного оцінюван-

ня. На даний момент ця проблема навіть не розглядається. Як результат, маємо незацікавленість учителів математики в запровадженні сучасних технічних засобів у процес вивчення математики, оскільки, як правило, учитель вимушений, у першу чергу, працювати на найближчу перспективу. Якщо використання певного засобу дозволяє швидше і простіше розв'язати задачу, але учні не мають права ним користуватись під час оцінювання, то постає питання в доцільності такого використання взагалі, як для учня, так і для вчителя. Також актуальним є питання використання комп'ютерних технологій взагалі і програм для роботи з функціями та їх графіками, зокрема, в олімпіадах та конкурсах з математики.

#### Висновки

1. Advanced Grapher 2.2 та «Графіки» (версії 3.1 і 3.2) під час вивчення математики доцільно використовувати як віртуальне моделююче середовище:

- для оптимізації процесу вивчення функцій та їхніх властивостей;
- для автоматизації процесу побудови графіків функцій;
- для графічного розв'язування рівнянь та їх систем (особливо з використанням параметрів);
- для автоматизації обчислень значень функцій;
- як прекрасний засіб для унаочнення.

2. Використання програм для роботи з функціями та їх графіками відкриває нові можливості для розвитку дослідницьких здібностей учнів.

3. Для ефективного використання під час вивчення математики інформаційно-комунікаційних технологій взагалі і програм для роботи з функціями та їх графіками зокрема повинні бути вирішені проблеми технічного та організаційного характеру. ІКТ повинні запроваджуватись системно і використовуватись на всіх етапах навчально-виховного процесу, як під час здобуття нових знань, відпрацювання вмінь та навичок їх використання, так і під час оцінювання навчальних досягнень. І головним результатом такого запровадження повинно бути підвищення ефективності навчально-виховного процесу в цілому.

#### Література

1. *Горошко Ю. В., Вінниченко Є. Ф.* Розв'язування задач з параметрами за допомогою програми «GRAN-1». // Математика в школі. — 2008. — №7-8 (84).
2. *Жалдак М. І.* Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. Видання 2-е, перероблене та доповнене. — К.: РННЦ «ДІНІТ», 2003.
3. *Жалдак М. І., Горошко Ю. В., Вінниченко Є. Ф.* Математика з комп'ютером: Посібник для вчителів. — К.: РННЦ «ДІНІТ», 2004.
4. Керівництво користувача програми Advanced Grapher 2.2.
5. *Кушнір В. А., Ріжняк Р. Я.* Розв'язування математичних задач інтегративного змісту засобами комп'ютерного моделювання // Математика в школі. — 2009. — №10 (97).
6. *Покришень Д. А.* Розв'язування задач з параметрами за допомогою програмного засобу «GRAN1» // Інформаційні технології і засоби навчання. — 2009. — №5 (13). <http://www.ime.edu.ua.net/em.html>.
7. *Ракута В. М.* Використання ІКТ при вивченні математики (Практикум. Частина І). Навчальний посібник. — Чернігів: ЧОППО, 2008.
8. *Ясинський В. В.* Математика. Навчальний посібник для слухачів ФДП НТУУ «КПІ» / За редакцією чл.-кор. НАН України В. С. Мельника. — К.: НТУУ «КПІ», 2006.
9. <http://sites.google.com/site/matematikaonline>.

★ ★ ★

## РЕАЛІЗАЦІЯ МОДУЛЬНО-РОЗВИВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ НАВЧАННЯ НА УРОКАХ ІНФОРМАТИКИ

Осипенко І. В.

Розвиток сучасних освітніх процесів в Україні характеризується увагою до особистості учня. Освіта повинна базуватися на цілісності, розвитку творчих здібностей дітей. Тому актуальним нині є створення нових освітніх технологій, які сприятимуть розвитку особистості, формуванню її культури, творчості, реалізації в житті.

З'явилося багато інноваційних проєктів, сутність яких полягає в перетворенні безособистісної педагогіки в педагогіку особистості. Одним із таких проєктів є модульно-розвивальна система навчання.

Суть цієї системи — максимально реалізувати позитивний потенціал учителя й учня в розумовому та духовному розвитку, врахувати різні можливості учнів у пізнавальній діяльності, забезпечити невід'ємне право кожного реалізувати в навчанні свої потреби, інтереси, здібності.

Модульно-розвивальна система навчання реалізується в блоковому поданні матеріалу — групуванні понять навколо наскрізних у темі або розділі. Це цілісна система знань, засвоєння якої передбачає рух від загального до конкретного, застосування життєвого до-

свіду учнів, опору на їх емоції і ціннісні орієнтації.

Завдання для учнів повинні бути настільки важкими, щоб діти працювали з напруженням своїх розумових здібностей, але, разом з тим, і настільки по-сильними, щоб не було настирливого педагогічного керівництва.

Основна перевага модульного навчання — це орієнтація на учня, на його самоосвіту, на виконання вправ і самоконтроль. За такого підходу навчальний процес для дитини стає осмисленішим, гарантується економія часу, знання, уміння і навички характеризуються гнучкістю і системністю, широким застосуванням їх у нестандартних ситуаціях.

Зміст модульно-розвивального навчання визначається цілісною системою змістових модулів. Природно, що структура кожного із семи етапів модульно-розвивального процесу неоднорідна.

**Змістово-пошуковий етап** ґрунтується на:

