

ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Погрібний О.В.

1. Призначення математичних процесорів

Системи комп'ютерної математики (СКМ) — це програмне забезпечення, яке дозволяє виконувати на комп'ютері не лише числові розрахунки, але і проводити аналітичні (символьні) перетворення різних математичних об'єктів і мають засоби графічної візуалізації.

Комп'ютерні програми цього класу (пропрієтарні — Maple, Matbematica, MATLAB, MathCad та ін. чи з відкритим кодом) широко застосовуються в наукових дослідженнях і стають одним з обов'язкових компонентів комп'ютерних технологій, що використовуються в освіті.

Ці системи мають дружній інтерфейс, реалізують велику кількість стандартних і спеціальних математичних операцій, забезпечені потужними графічними засобами і мають власні мови програмування. Усе це надає широкі можливості для ефективної роботи фахівців різних профілів.

Усі широко відомі математичні пакети: Maple, Matlab, Matematica — дозволяють проводити як символьні обчислення, так і використовувати чисельні методи. Тепер такі системи є одним з основних обчислювальних інструментів комп'ютерного моделювання в реальному часі і знаходять застосування в різних галузях науки. Застосування СКМ істотно підвищує продуктивність праці науковця, викладача, учителя.

Комп'ютерна алгебра — галузь математики, що лежить на межі алгебри й обчислювальних методів.

Недоліки чисельних розрахунків

Більшість перших систем комп'ютерної математики (Eureka, Mercury, Excel, Lotus-123, Mathcad для MS-DOS, PC MATLAB та ін.) призначалися для чисельних розрахунків. Вони перетворювали комп'ютер у великий програмований калькулятор, здатний швидко й автоматично (за введеною програмою) виконувати арифметичні і логічні операції над числами або масивами чисел. Результат обчислень завжди конкретний: це або число, або набір чисел. Зрозуміло, що комп'ютер виконує такі обчислення з неймовірною швидкістю і точністю, виводячи результати у вигляді оформлених таблиць або графіків.

Результати обчислень рідко бувають абсолютно точними в математичному сенсі. Як правило, під час виконання операцій з дійсними числами відбувається їх округлення, зумовлене принциповим обмеженням розрядної сітки комп'ютера для зберігання чисел у пам'яті. Реалізація більшості чисельних методів також базується на наближених алгоритмах. Часто через накопичення похибок ці методи втрачають обчислювальну стійкість, даючи помилкові результати чи, навіть, приводять до краху роботи обчислювальної системи — аж до «зависання».

Багато вчених критикували чисельні математичні системи і програми реалізації чисельних методів за конкретний характер результатів, що отримуються з

їх допомогою. Не було можливості отримувати результати у вигляді загальних формул, які описують процес отримання результату. Як правило, з результатів числових обчислень неможливо було зробити узагальнені теоретичні, а часом і практичні висновки. Тому для реалізації серйозних наукових проектів доводилось звертатись за допомогою математиків-аналітиків, які розв'язували потрібні завдання в аналітичному вигляді і пропонували доцільні методи їх чисельного розв'язування за допомогою комп'ютера. Такий підхід був дорогим і не дуже оперативним, що й привело до створення СКМ.

Чим відрізняються символьні обчислення від чисельних

Термін «комп'ютерна алгебра» є синонімом термінів «символьні обчислення», «аналітичні обчислення», «аналітичні перетворення» і т. д. Навіть ніни цей термін французькою мовою дослівно означає «формальні обчислення».

Коли ми говоримо про обчислювальні методи, то вважаємо, що всі обчислення виконуються на множині дійсних чисел. Насправді ж будь-яка програма для ЕОМ має справу тільки зі скінченим набором раціональних чисел, оскільки тільки такі числа можна подавати в комп'ютері. Для запису цілого числа відводиться зазвичай 16 або 32 біти, для дійсного — 32 або 64 біти. Ця множина не замкнута відносно арифметичних операцій, що може виражатися в різних переповненнях (наприклад, при множенні досить великих чисел або при діленні на дуже мале число). Ще істотнішою особливістю обчислювальної математики є те, що арифметичні операції над цими числами, що виконуються комп'ютером, відрізняються від арифметичних операцій над раціональними числами. Особливістю комп'ютерних обчислень є неминуча наявність похибки або кінцевої точності обчислень. Кожне завдання вимагається розв'язати з використанням наявних ресурсів ЕОМ за осяжний час із заданою точністю, тому оцінка похибки — важливе завдання обчислювальної математики.

Ці проблеми певною мірою вирішуються розвитком систем комп'ютерної алгебри. Системи комп'ютерної алгебри, що виконують аналітичні обчислення, широко використовують множину раціональних чисел. Також широко використовуються алгебраїчні числа, що задаються многочленами.

У наукових дослідженнях і технічних розрахунках фахівцям доводиться значно більше займатися перетвореннями формул, ніж безпосередніми числовими рахунками. Символьні перетворення для деяких задач почали ще в 50-х роках минулого століття. Активна розробка систем комп'ютерної алгебри



почалася у кінці 60-х років. Відтоді створена значна кількість різноманітних систем, доля яких склалась по-різному: одні продовжують розвиватися, інші відмирають, а також постійно з'являються нові.

Класифікація систем комп'ютерної математики

На сьогодні системи комп'ютерної математики (СКМ) можна розділити на сім основних класів:

- системи для чисельних розрахунків;
- таблицні процесори;
- матричні системи;
- системи для статистичних розрахунків;
- системи для спеціальних розрахунків;
- системи для аналітичних розрахунків (системи комп'ютерної алгебри);
- універсальні системи.

Кожна система комп'ютерної математики має свої особливості у будові або структурі. Проте можна виділити типові особливості структури сучасних універсальних СКМ.

- Ядро системи — коди задалегідь відкомпільованих вбудованих функцій і процедур та операторів системи.
- Інтерфейс дає користувачеві можливість звертатися до ядра зі своїми запитами й одержувати результат на екрані дисплею.
- Наявність окремих бібліотек процедур і функцій, які використовуються рідше. Метою такого підходу є обмеження об'єму ядра для підтримки максимальної швидкості роботи вбудованих функцій і процедур.
- Можливість використання пакетів розширення систем для покращення їх функціональності й адаптації до конкретних завдань. Ці пакети пишуться власною мовою програмування, наявною в системі, що дає можливість їх підготовки звичайними користувачами.
- Наявність розвиненої довідкової системи.

Ядро, бібліотеки, пакети розширення і довідкова система сучасних СКМ акумулюють знання в галузі математики, накопичені за тисячоліття її розвитку.

Зростаючий інтерес до алгоритмів алгебри виник у результаті усвідомлення центральної ролі алгоритмів в інформатиці. Їх легко описати формальною і строгою мовою, щоб забезпечити розв'язання завдань. Тоді як традиційна алгебра має справу з конструктивними методами, комп'ютерна алгебра цікавиться ще й ефективністю, реалізацією, а також апаратними і програмними аспектами таких алгоритмів. Виявилось, що під час ухвалення рішення про ефективність і визначення продуктивності методів алгебри вимагаються багато інших засобів, наприклад теорія рекурсивних функцій, математична логіка, аналіз і комбінаторика. На початку застосування обчислювальних машин у символній алгебрі швидко стало очевидним, що методи з підручників часто виявлялися дуже неефективними. Тому комп'ютерна алгебра систематично вивчає джерела неефективності і веде пошук інших методів алгебри для поліпшення або навіть заміни таких алгоритмів.

Завдання систем комп'ютерної алгебри

Перші ЕОМ спочатку створювалися для того, щоб проводити складні розрахунки, на які людина витрачала дуже багато часу. Наступним кроком розвитку ЕОМ стали ПК. Ці машини можуть проводити обчислення різної складності (від найпростіших до найскладніших), і така особливість стала використовуватися в різних галузях знань. Розвиток комп'ютерних математичних систем привів до появи окремого класу програм, який дістав назву Системи Комп'ютерної Алгебри (CAS).

Головне завдання CAS — обробка математичних виразів у символній формі. Символьні операції зазвичай включають: обчислення символних або числових значень виразів, перетворення виразів, знаходження похідної однієї або декількох змінних, розв'язування лінійних і нелінійних рівнянь, розв'язування диференціальних рівнянь, обчислення границь, обчислення інтегралів, роботу з множинами, обчислення і роботу з матрицями. На додаток до перерахованого, більшість CAS підтримують різноманітні чисельні операції: розрахунок значень виразів при певних значеннях змінних, побудову графіків на площині і в просторі. Більшість CAS включають високорівневу мову програмування, яка дозволяє реалізувати свої власні алгоритми. Наука, яка вивчає алгоритми, вживані в CAS, називається комп'ютерною алгеброю.

Комп'ютерна алгебра — розділ інформатики, який займається розробкою, аналізом, реалізацією і застосуванням алгоритмів алгебри. Від інших алгоритмів алгоритми алгебри відрізняються наявністю простих формальних описів, існуванням доведення правильності і меж часу виконання, які можна отримати на основі добре розвиненої математичної теорії. Крім того, об'єкти алгебри можна точно подавати в пам'яті обчислювальної машини, завдяки чому алгебраїчні перетворення можуть бути виконані без втрати точності. Зазвичай алгоритми алгебри реалізуються в програмних системах, що допускають введення і виведення інформації в символних позначеннях алгебри. Завдяки усьому цьому фахівці, що працюють в інформатиці, математиці і в прикладних сферах, виявляють все більшу цінність до комп'ютерної алгебри.

Зв'язок систем комп'ютерної алгебри з традиційними математичними дисциплінами

Відокремити комп'ютерну алгебру від таких математичних дисциплін, як алгебра, аналіз або чисельний аналіз, нелегко.

Системи комп'ютерної алгебри зазвичай включають алгоритми для інтегрування, обчислення елементарних трансцендентних функцій, розв'язування диференціальних рівнянь і тому подібне. Особливість згаданих алгоритмів полягає в:

- вони оперують термінами і формулами і створюють інформацію в символній формі;
- розв'язування досягається за допомогою деякого виду алгебраїзації завдання;
- існують методи точного подання величин.

Методи символних обчислень і чисто чисельні алгоритми зазвичай доповнюють один одного. Су-

часні системи комп'ютерної алгебри обов'язково включають той або інший набір стандартних чисельних алгоритмів. Сучасні системи, розраховані на використання, у першу чергу, чисельних розрахунків (MatLab, його клони і тому подібне), завжди включають більш менш повний набір функцій, що здійснюють символічні перетворення.

Можливості підвищення ефективності розв'язування математичних і обчислювальних завдань

Реалізація на ЕОМ символічної математики відкрила принципово нові можливості використання комп'ютерів у природничо-наукових і прикладних дослідженнях. Зараз уже важко вказати природничі науки, де методи аналітичних обчислень на комп'ютері не знайшли б плідного застосування. Характерною особливістю проблематики символічних перетворень є поєднання дуже тонких математичних і алгоритмічних методів із найсучаснішими методами програмування, що ефективно реалізують нечисельну математику в рамках програмних систем аналітичних обчислень. До останніх належать, наприклад, такі популярні системи, як MACSYMA, REDUCE, АНАЛІТИК та ін.

Добре відомо, що аналітичні перетворення є невід'ємною частиною наукових досліджень, і частенько на їх виконання витрачається більше праці, ніж на іншу частину досліджень. Ручні обчислення вимагають непомірно великих витрат часу. Саме тут і допомагають методи комп'ютерної алгебри і застосування відповідних програмних систем є практично єдиним засобом розв'язування таких завдань.

Завдяки методам і алгоритмам аналітичних обчислень сучасний комп'ютер стає вже не стільки обчислювальною, скільки загальноматематичною машиною. Аналітичні обчислення є складовою частиною теоретичної інформатики, яка займається розробкою, аналізом, реалізацією і застосуванням алгоритмів алгебри.

Найбільш інтуїтивна мета аналітичних обчислень полягає в маніпуляції з формулами. Математична формула, описана однією із звичайних мов програмування (Фортран, Паскаль, Бейсик та інші), призначена тільки для чисельних розрахунків, коли змінним і параметрам присвоєні числові значення. У мові, що допускає аналітичні обчислення, для цієї формули також можна знайти числове значення, але, крім того, вона може стати об'єктом формальних перетворень: диференціювання, розкладання на множники і т. д.

Огляд системи комп'ютерної математики

СКМ були створені в 70-і роки і розвивалися у рамках проектів, пов'язаних із штучним інтелектом. Тому сфера їх застосування досить широка і різноманітна. Першими популярними системами були Reduce, Derive, Macsyma. На даний момент лідерами продаж є Maple і Mathematica. Обидва ці пакети активно використовуються в математичних, інженерних та інших наукових дослідженнях. Існує велика кількість й інших комерційних систем комп'ютерної алгебри, наприклад, MathCad. Серед вільно поширюваних програм — Axiom, Eigenmath, Yacas та ін.

Успіх у сучасному використанні СКМ лежить в інтеграції усіх машинних можливостей (символь-

ний і числовий інтерфейс, вбудована графіка, мультиплікація, бази і банки даних і т. д.). Усі сучасні комерційні системи комп'ютерної математики (Mathematica, Maple, MatLab і Reduce) мають стандартний набір можливостей:

- є вхідна макромова (для спілкування користувача із системою), яка містить спеціалізований набір функцій для розв'язування математичних завдань;
- є основні символічні (математичні) об'єкти: поліноми, ряди, раціональні функції, вирази загального вигляду, вектори, матриці;
- системи використовують цілі, раціональні, дійсні, комплексні числа;
- є декілька режимів роботи: редагування, діагностика, діалог, протокол роботи, які доповнюють один одного;
- є зв'язок із засобами розробки програм: можливі підстановки, обчислення значень, генерація програм, використання стандартного математичного забезпечення (бібліотек);
- використовуються інтерфейси для зв'язку з офісними засобами, базами даних, графічними програмними засобами і тому подібне.

Системи комп'ютерної алгебри можна умовно розділити на системи загального призначення і спеціалізовані. До систем загального призначення відносяться Macsyma, Reduce, Mathematica, Maple, Axiom та ін.

Спеціалізовані системи відрізняються вищою ефективністю, але сфера їх застосування обмежена. До спеціалізованих систем належать такі системи, як CALEY і GAP — спеціалізовані системи для обчислень в теорії груп.

Коротко розглянемо характеристики деяких систем.

Macsyma — система комп'ютерної алгебри, перша версія якої була розроблена з 1968 по 1982 рік у MIT (англ. Massachusetts Institute of Technology — Массачусетський технологічний інститут) у лабораторії Project MAC, а згодом поширювалася на комерційній основі. Це була перша система символічної математики широкого застосування і одна з ранніх систем, заснованих на знаннях. Багато ідей, що з'явилися в Macsyma згодом були запозичені такими системами як Mathematica, Maple та іншими.

Maple — це програмний пакет, система комп'ютерної алгебри. компанії Waterloo Maple Inc. Призначена для аналітичного і чисельного розв'язування математичних завдань, які виникають як в математиці, так і в прикладних науках. Має розвинену систему команд, графічні засоби і зручний інтерфейс. Широкі можливості дозволяють ефективно застосовувати Maple для вирішення проблем математичного моделювання. Maple складається з ядра, оптимізованих процедур і бібліотек, написаних власною мовою, що нагадує Паскаль. Ядро виконує більшість базових операцій. Бібліотека містить величезну кількість команд і процедур, які виконуються в режимі інтерпретації.

Mathematica — система комп'ютерної алгебри компанії Wolfram Research. Містить величезну кількість функцій як для аналітичних перетворень, так і для чисельних розрахунків. Крім того, програма підтримує роботу з графікою і звуком, включаючи побудову дво-

тривимірних графіків функцій, малювання довільних геометричних фігур, імпорт і експорт зображень і звуку. Mathematica не лише СКМ, але і потужна мова програмування. Архітектура Mathematica представлена ядром і призначеним для користувача інтерфейсом. Ядро програми відповідає за інтерпретацію програм, написаних мовою Mathematica, і безпосередньо займається обчисленнями. Інтерфейси користувача призначені для виведення результатів у формі, зрозумілій користувачеві. На думку компанії-розробника, велика частина користувачів Mathematica — це технічні професіонали.

MathCad — система комп'ютерної алгебри з класу систем автоматизованого проектування, орієнтована на підготовку інтерактивних документів з обчисленнями і візуальним супроводом, відрізняється легкістю використання і можливістю застосування для колективної роботи. Mathcad має простий і інтуїтивний інтерфейс користувача. Для введення формул і даних можна використовувати як клавіатуру, так і спеціальні панелі інструментів.

Робота здійснюється в межах робочого аркуша, на який у графічному вигляді виводяться рівняння і вирази, тобто використовується принцип WYSIWYG (What You See Is What You Get — «що бачиш, те і отримуєш»).

Особливе місце серед СКМ займає система **Axiom** — вільна система загального призначення. До її складу входить середовище інтерпретатора, компілятор і бібліотека, у якій описана математично правильна ієрархія типів. Об'єкти, які тут використовуються, більш звичні для математиків.

2. Огляд середовища математичного процесора

Розглянемо вільну систему комп'ютерної алгебри **Maxima**, яка є нащадком DOE Macsyma. Пакет Maxima складається з інтерпретатора макромови, написаної на Lisp, і кількох поколінь пакетів розширень, написаних макромовою пакета або безпосередньо мовою програмування Lisp. Maxima розроблялась Вільямом Шелтером з 1982 по 2001 рік. У 1998 році він отримав дозвіл на реалізацію відкритого коду на GPL. Незабаром Вільям передав Maxima групі користувачів і розробників, які забезпечили її підтримку і розвиток. На сьогодні пакет досить активно розвивається і у багатьох відношеннях не поступається таким розвиненим системам комп'ютерної математики, як Maple або Mathematica.

За допомогою Maxima можна розв'язувати широке коло задач з різних розділів математики. Ось деякі з них:

- Операції з многочленами (обчислення коренів, розкладання на множники, зведення подібних доданків і тому подібне).
 - Обчислення, що містять елементарні функції, у тому числі логарифми, показникові та тригонометричні функції.
 - Обчислення границь і похідних.
 - Аналітичне обчислення інтегралів.
 - Розв'язування алгебраїчних рівнянь та їх систем.
- Основними перевагами програми Maxima є:

- можливість вільного використання (Maxima належить до класу вільних програм і поширюється на основі ліцензії GNU);
- можливість функціонування під управлінням різних ОС (зокрема Windows і Linux);
- невеликий розмір програми;
- широкий клас завдань, які здатна виконувати система;
- можливість роботи як в консольній версії програми, так і з використанням одного з графічних інтерфейсів (наприклад, xMaxima, wxMaxima);
- наявність довідки й інструкцій з роботи з програмою;
- наявність в комплекті постачання розширення wxMaxima, яке надає користувачеві зручний і зрозумілий інтерфейс, позбавляє від необхідності вивчати особливості введення команд для вирішення типових завдань.

Сама Maxima — консольна програма, й усі математичні формули зображує звичайними текстовими символами (рис. 1). У цьому є як мінімум два плюси. З одного боку, саму Maxima можна використовувати як ядро, розробляючи для неї графічні інтерфейси на будь-який смак. З іншого боку, сама собою, без яких-небудь інтерфейсних надбудов, Maxima невимоглива до апаратних засобів. Також консольний режим зручний для пакетного виконання завдань.

Нині створено немало графічних інтерфейсів, але ми зупинимось на одному з найпопулярніших і найбільш наочних і зручних у роботі.

Таким інтерфейсом є wxMaxima (рис. 2). Перевагами wxMaxima є:

- можливість графічного виведення формул;
- спрощене введення функцій, які використовуються найчастіше, через діалогові вікна;
- розподіл вікна на окремі блоки.

Розглянемо робоче вікно програми. Вгорі розташовується текстове меню програми — доступ до основних функцій і налаштувань програми. У текстовому меню wxMaxima знаходяться команди для розв'язування великої кількості типових математичних задач, розділених на групи: рівняння, алгебра, аналіз, спростити, графіки, чисельні обчислення. Введення команд за допомогою діалогового вікна спрощує роботу з програмою для новачків. Нижче розміщена панель інструментів. Ліворуч міститься панель виклику найуживаніших команд, вікно однієї з них показано на рисунку 3. Найбільшу частину займає вікно документа.

```

Command line Maxima
Maxima 5.22.1 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.8 (a.k.a. GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) solve(2*x^2-5*x-6);
incorrect syntax: x is not an infix operator
solve(2*x^
(%i1) solve(2*x)
(%o1)
(%i2) solve(2*x^2-5*x-6);
(%o2)
      [x = 0]
      sqrt(73) - 5      sqrt(73) + 5
x = - ----, x = ----
      4                  4
(%i3)

```

Рис. 1. Maxima в консольному режимі

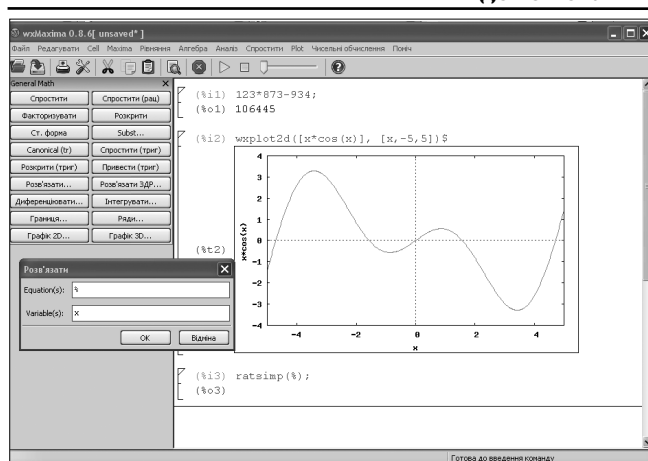


Рис. 2. Вікно wxMaxima

wxMaxima — це мультиплатформений графічний інтерфейс для системи комп'ютерної алгебри Maxima. Застосування wxMaxima набагато спрощує роботу порівняно з використанням командного рядка.

На відміну від роботи в командному рядку, яка відбувається в режимі введення-виведення, у wxMaxima, реалізована концепція «живого» математичного документа, у якому поєднуються текст, обчислення, зображення та графіки.

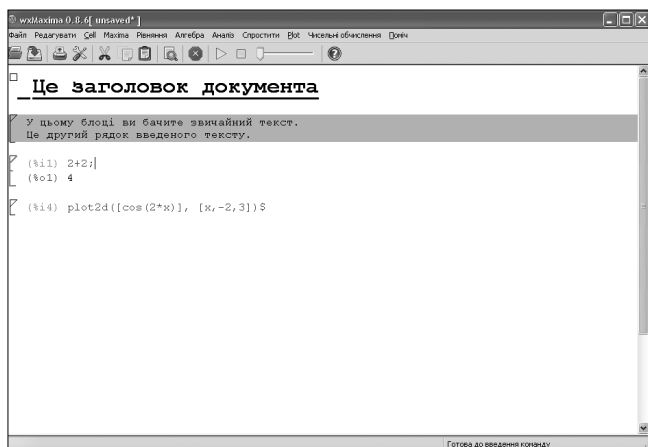


Рис. 3. Документ Maxima

Кожен документ wxMaxima розглядається як набір блоків, які можна називати елементами, секціями чи клітинками. Надалі будемо дотримуватися першого значення англійського слова cell. Кожен блок має зліва квадратну дужку, яка показує його початок і кінець. Блоки бувають різних типів, залежно від їх призначення, наприклад, блок заголовка, блок тексту. Але найважливішим є блок введення, призначений для виразів, значення яких можуть бути обчислені натисканням сполучення клавіш **Shift+Enter**. Перед тим, як надіслати команду Maxima для виконання wxMaxima перевіряє, чи завершується введений рядок «;» або «\$». Якщо такий символ відсутній, то рядок буде автоматично завершений «;». Maxima вимагає, щоб рядок завершувався одним із символів «;» або «\$».

Будь-який результат, отриманий від Maxima, wxMaxima додасть як елемент виведення до блоку введення.

Щоб редагувати вміст блоку, потрібно вибрати його, клацнувши лівою кнопкою миші. З'явиться курсор і дужка зліва стане червоною, вказуючи на можливість редагування вмісту.

Якщо клацнути за межами блоку, то з'явиться горизонтальна лінія, яку можна сприймати як горизонтальний курсор. Натиснувши довільну клавішу, можна вставити новий блок введення. За допомогою сполучення клавіш **Shift+Up/Down** можна виділяти блоки у відповідному напрямку.

Виділені блоки можна вилучати, натиснувши клавішу **backspace** чи **Delete**. Також можна вирізати, копіювати чи вставляти блоки, використовуючи команду головного меню **Редагувати/Cut/Copy/Paste**.

Іноді результат виведення досить довгий. Тоді його можна приховати, клацнувши всередині поворотного трикутника вгорі дужки. Тепер трикутник стане заповненим. Заповнений трикутник сигналізує про те, що результат виведення прихований. Клацнувши на ньому, можна побачити результат виведення.

Якщо результат роботи над документом задовольняє, то можна його зберегти, виконавши команду **Файл/Зберегти**. Слід пам'ятати, що частина виведення блоків введення не зберігається. Відкривши документ, можна виконати обчислення у всіх блоках командою **Cell/Evaluate All Cells**.

Під час використання інтерфейсу wxMaxima можна виділити у вікні виведення результатів необхідну формулу і, викликавши контекстне меню правою кнопкою миші, скопіювати будь-яку формулу в текстовому вигляді, у форматі **TEX** або у вигляді графічного зображення для наступної вставки в який-небудь документ.

Також в контекстному меню, під час вибору результату обчислення, буде запропоновано низку операцій з вибраним виразом (наприклад, спрощення, розкриття дужок, інтегрування, диференціювання та ін.).

Команда в Maxima — це будь-яка послідовність математичних виразів і вбудованих функцій, завершена, у простому випадку, крапкою з комою. Після введення команди і натиснення комбінації клавіш **Shift+Enter** Maxima введе результат і чекатиме наступної команди.

Після введення кожної команди Maxima надає порядковий номер. На рис. 3 введені команди мають номери 1–3 і позначені вони так — (%i1), (%i2). Результати обчислень позначені відповідно (%o1), (%o2), (%o3). Де i — скорочення англійського слова input (введення), а o — output (виведення). Такий спосіб дає можливість у подальшому запису команд послатися на команди, записані раніше, наприклад, (%i1)+(%i2) означає додавання до виразу першої команди виразу другої з можливістю подальшого обчислення результату. Так само можна використовувати і номери результатів обчислення, наприклад, (%o1)–(%o3). Для останньої виконаної команди в Maxima існує спеціальне позначення — %.

(Далі буде)