

УДК 378.14:371.214.46:[004.78:51]

ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ НА ПЛОЩИНІ І КОМП'ЮТЕРНІ ІНСТРУМЕНТИ ЇХ РЕАЛІЗАЦІЇ

Семеніхіна Олена Володимирівна,

завідувач кафедри інформатики Сумського державного педагогічного університету ім. А.С. Макаренка, кандидат педагогічних наук, доцент, e.semenikhina@fizmatsspu.sumy.ua

Друшляк Марина Григорівна,

старший викладач кафедри математики Сумського державного педагогічного університету ім. А.С. Макаренка, кандидат фізико-математичних наук, marydru@mail.ru



Анотація. На основі емпіричних досліджень авторів наведені приклади використання різних інтерактивних геометричних середовищ, серед яких Gran2d, DG, Живая геометрия, Математический конструктор, GeoGebra, для підтримки вивчення геометричних перетворень площини. Описано, які саме види геометричних перетворень підтримує те чи інше середовище, детально пояснено, як вони реалізовані. Зазначено переваги і недоліки кожної з програм у рамках підтримки даної теми з метою подальшого раціонального їх вибору для розв'язування задач.

Ключові слова: інтерактивне геометричне середовище, програми динамічної геометрії, геометричне перетворення, комп'ютерні інструменти, Gran2d, DG, Живая геометрия, Математический конструктор, GeoGebra.

Геометричні перетворення — один із важливих розділів курсу геометрії, оскільки метод геометричних перетворень є досить продуктивним у розв'язуванні багатьох геометричних задач, а його застосування часто спрощує доведення окремих математичних тверджень. У шкільному курсі геометрії розглядають такі види перетворень як симетрія (відносно точки і відносно прямої), поворот, паралельне перенесення та гомотетія.

Під час вивчення даної теми з певними труднощами часто стикаються не тільки учні, але й учителі. Цьому сприяє кілька причин. По-перше, для вчителів досить важко організувати унаочнення геометричних перетворень на папері чи дошці. По-друге, на вивчення геометричних перетворень відводиться мало часу порівняно з тим, які подальші застосування має ця тема — як у шкільному курсі геометрії, так і в розв'язуванні багатьох олімпіадних задач. Попри це у більшості своїй учителі «побоюються» даної теми через її несприйняття учнями. Учні ж, у свою чергу, «недолюблюють» геометричні перетворення через відсутність, зокрема, алгоритмічних підходів у розв'язуванні типових задач, і відсутність очевидної сфери подальшого застосування методу геометричних перетворень.

Аналіз науково-методичних робіт, присвячених описаній ситуації, виявив, що певне розв'язання описаної проблеми можливе завдяки використанню інтерактивних геометричних середовищ: вони дозволяють не лише досить швидко і якісно побудувати модель теореми чи задачі, але й надають змогу динамічно дослідити її, тим самим напрацьовуючи власний емпіричний досвід, що є не останнім у формуванні свідомої і міцної системи математичних знань. Разом з цим науковці розглядають питання побудови теорії геометричних перетворень, взаємозв'язки між видами перетво-

рень, методик у їх вивчення із залученням окремих інтерактивних систем і зовсім мало уваги приділяють аналізу наявних комп'ютерних інструментів, які можна застосовувати під час вивчення даної теми.

Тому метою нашого дослідження став саме аналіз комп'ютерних інструментів на предмет їх доцільності і раціональності використання у вивченні окремих тем шкільного курсу математики, а також демонстрація застосування комп'ютерних інструментів різних інтерактивних геометричних систем у процесі унаочнення геометричних перетворень, під час розв'язування типових задач, організації учнівських досліджень у рамках даної теми.

В українських школах під час навчання математики використовуються різні інтерактивні геометричні середовища, серед яких **Gran**, **DG** (Україна), **GeoGebra** (Австрія), **Математический конструктор**, **Живая математика**, **Живая геометрия** (Росія), **Cabri** (Франція), **Geometer's Sketchpad** (США), **GeoNext** (Німеччина) тощо [1–7]. Робота в них інтуїтивно зрозуміла й ідентична — будуються базові об'єкти, які потім можна динамічно змінювати і спостерігати за певними якісними властивостями і кількісними характеристиками. Кожна із зазначених вище програм підтримує вивчення геометричних перетворень, але містить власні інструменти їх реалізації, про особливості використання яких зазначимо нижче.

1. У середовищі Gran2d можна здійснювати паралельне перенесення, поворот, гомотетію, деформацію (стиснення) об'єктів типу **Точка**, **Пряма**, **Ламана**, **Коло** за допомогою пункту головного меню **Об'єкт/Перетворення**.

Параметри перетворення можна задавати як через введення координат вектора чи кута повороту у від-

повідні поля (**Об'єкт/Перетворення параметрично**), так і графічно через послугу **Об'єкт/Перетворення з екрану**.

Якщо не обрати послугу **Створити результуючий об'єкт**, то вихідний об'єкт не зберігається, а замінюється його образом при перетворенні. Додамо, що з образом інтерактивно працювати вже буде неможливо.

Якщо не обрати послугу **Прикріпити до вихідних**, то у разі зміни вихідного об'єкта результуючий об'єкт автоматично не змінюється, і два об'єкти не будуть зв'язаними. Результуючий об'єкт можна змінити незалежно від вихідного. Якщо ж обрати згадану послугу, то створений новий об'єкт буде залежним від вихідного, але нерухомим.

Приклад 1 (Gran2d). Дано рівні відрізки AB і A_1B_1 . Знайдіть центр повороту, при якому відрізок AB переходить у відрізок A_1B_1 [8, с. 127].

Спочатку знайдемо відповідь традиційними побудовами.

Нехай задано два рівних відрізки AB і A_1B_1 . Для побудови точки, що є центром повороту, яким відрізки переводяться один в одного, досить визначитися з відповідністю точок (A переходить у A_1 , B переходить у B_1) і побудувати серединні перпендикуляри до відрізків AA_1 і BB_1 . Точка перетину серединних перпендикулярів є шуканим центром повороту.

Побудови здійснимо вбудованими інструментами. За допомогою динамічних надписів дослідимо кути AEA_1 і BEV_1 , які є кутами повороту для точок A і B — вони будуть од-

наковими за будь-яких положень кінців вихідних відрізків (рис. 1).

Тепер комп'ютерними інструментами середовища здійснимо поворот відрізка AB на зафіксований у динамічних виразах кут (**Об'єкт/Перетворення**) і побачимо, що були створені три нові об'єкти (дві точки і відрізок на них), які повністю співпали з відрізком A_1B_1 .

Зауважимо, що вбудований інструмент **Перетворення** вчителю варто залучати для перевірки одержаного у середовищі Gran2d результату або після формування навчальних умінь. Його використання відразу на початку вивчення теми не сприятиме формуванню розуміння суті повороту, а тому неможливим далі буде його використання для розв'язування інших задач.

2. У пакеті DG передбачені засоби для побудови образів точок, але відсутні спеціальні інструменти, які б здійснювали перетворення фігур, тому користуються означенням самого перетворення й інструментами **Симетрична точка**, **Симетрична відносно прямої точка**, **Інверсна точка**. На основі цих інструментів і динамічного сліду можна одержати образи (на жаль, нерухомі!) більш складних геометричних фігур.

Наведемо приклади.

Центральна симетрія. Візьмемо довільні точки E, G і F на сторонах трикутника ABC . Використовуючи інструмент **Симетрична точка**, побудуємо точки I, H, J , симетричні точкам E, G і F відносно точки O . Переміщуючи точки E, G і F уздовж сторін трикутника, точки I, H, J залишать слід (послуга

контекстного меню **Властивості сліду/Залишити слід**), що описує сторони симетричного відносно точки O трикутника (рис. 2).

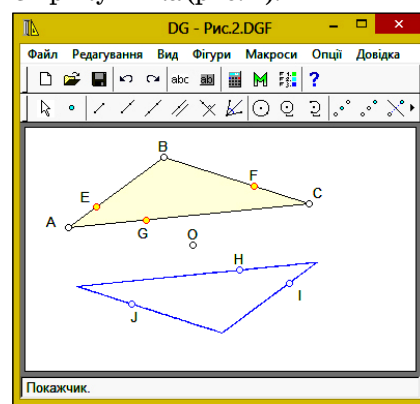


Рис. 2. Демонстрація центральної симетрії в середовищі DG

Симетрія відносно прямої. Нехай E, F, G — точки, взяті довільно на сторонах трикутника ABC . Побудуємо точку R , симетричну точці E відносно даної прямої (інструмент **Симетрична відносно прямої точка**). При переміщенні точки E вздовж AB точка R буде описувати образ сторони AB , симетричний відносно осі симетрії. Аналогічно інші точки F і G опишуть образи двох інших сторін (рис. 3).

Паралельне перенесення. Паралельне перенесення будемо задавати вектором EF . Щоб побудувати образ точки, взятої на стороні трикутника, наприклад, образ G точки D , скористаємося командою **Фігури/Аналітично/Точка**. Координати точки G задамо формулами, які визначаються координатами точки D і координатами початку і кінця вектора EF : $X=D.X+(F.X-E.X)$, $Y=D.Y+(F.Y-E.Y)$.

Аналогічно можна задати гомотетичні перетворення.

Вважаємо, що задачі такого типу сприяють кращому засвоєнню теми, оскільки базуються на озна-

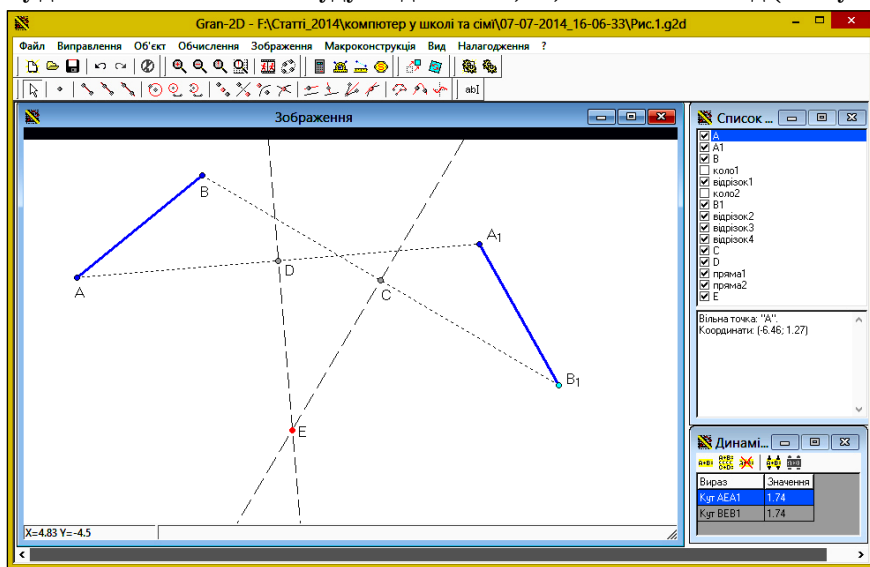


Рис. 1. Поворот відрізка AB навколо центра E у середовищі Gran2d

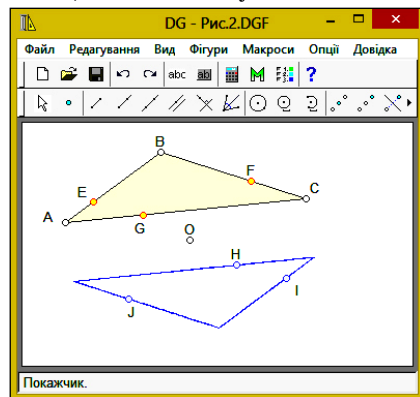


Рис. 3. Демонстрація симетрії відносно прямої в середовищі DG

ченні перетворень і конструктивному підході. Разом з цим зауважимо, що у середовищі *DG* для складних об'єктів можливі побудови лише нерухомого сліду — динамічними залишаються тільки точки, а не фігури, які вони «прорисують».

3. У пакеті Живая Геометрия можна здійснювати поворот, паралельне перенесення, симетрію відносно точки та прямої, гомотетію. Перед тим, як використати певний інструмент, потрібно обрати ті об'єкти, які будуть брати участь у перетворенні. Так, наприклад, для виконання паралельного перенесення потрібно відмітити об'єкт, який переноситься, і вектор переносу. Останній можна задавати кількома способами: через відстань по горизонталі й по вертикалі, якщо вектор переносу визначено у декартовій системі координат; відстанню та кутом, якщо вектор переносу задано у полярній системі координат; двома точками, які визначають початок і кінець вектора переносу. Утім варто пам'ятати, що у програмі автоматично розрізняється довжина відрізка (сприймається як довжина напрямленого відрізка) і відстань між точками.

Зауважимо, що в той час, коли вікно властивостей перетворення відкрите, робоча область середовища залишається активною. Це дозволяє змінювати параметри перетворення. Наразі з'являється майбутній образ фігури блідого кольору. Після того, як образ відтворено на екрані, його також можна динамічно змінювати і спостерігати за змінами вихідної фігури, чого, наприклад, не можна зробити у середовищах *DG* і *Gran2d*.

Приклад 2 (Живая Геометрия). Вписати квадрат у даний трикутник [9, с. 206].

Для побудови моделі пропонуємо спочатку побудувати трикутник, потім обирати на його стороні довільну точку, через яку провести перпендикуляр. Відмічаємо точку перетину і ховаємо перпендикуляр. Одержаний відрізок повертаємо на 90° так, щоб у результаті отримати квадрат, який однією стороною буде лежати на основі трикутника (можливі інші способи побудови, але потрібно зважувати на коректність побудови квадрата, щоб не порушити конструкцію). Проводимо пряму через вершину трикутника і вершину квадрата, відмічаємо одержану точку перетину. Якщо змінювати квадрат, то в якийсь момент він стане вписаним у трикутник, що і вимагається умовою задачі. Точну відповідь одержимо, застосувавши гомотетію до початкового квадрата (рис. 4).

При заданні гомотетії потрібно вказати центр гомотетії (**Преобразования/Отметить центр** або подвійне натискання на потрібній вершині) та коефіцієнт гомотетії (**Преобразования/Отметить коэффициент**), який дорівнюватиме відношенню GH/GE . Після цього відмічаємо квадрат, який потрібно перетворити, у меню **Преобразования** обираємо **Гомотетия** й отримуємо фігуру, гомотетичну даній.

Приклад 3 (Живая Геометрия). Цікаве завдання пропонують у [10] для підтримки вивчення паралельного перенесення: замостити площину паркетом власного дизайну (рис. 5).

Візьмемо довільні відрізки загального положення AB і AD , на яких побудуємо довільні ламані. Перенесемо ламану, побудовану на стороні AB , на вектор AD . Перенесемо ламану, побудовану на стороні AD , на вектор AB . Серією паралельних перенесень заповнюємо площину. Фігури при цьому можна по різному розфарбувати.

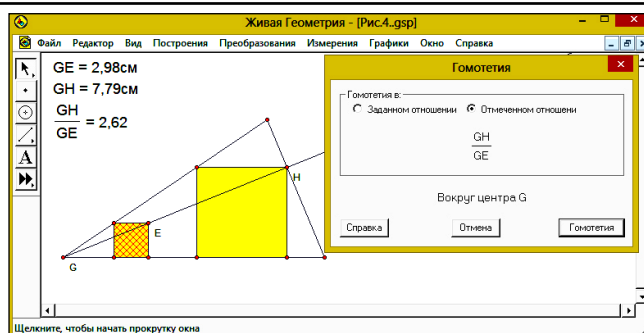


Рис. 4. Модель до прикладу 2 у середовищі Живая Геометрия

На перший погляд, інтерфейс середовища **Живая Геометрия** містить замалу кількість інструментів для оперування об'єктами і здійснення над ними певних математичних дій. Але розробниками середовища закладено у ці інструменти достатній потенціал, і якщо звикнути до особливостей роботи у цьому середовищі, а на це потрібен деякий час, то у подальшій навчальній і практичній діяльності можна не лише реалізувати цікаві проекти, а й одержати задоволення від результату.

4. У пакеті Математический конструктор присутня група команд **Преобразования**, яка включає паралельне перенесення, поворот, осьову симетрію, гомотетію.

Інструмент **Поворот** використовується так: виділяємо фігури, які будуть обертатися (щоб позначити завершення вибору фігур, потрібно натиснути **Enter** або при виборі останньої фігури натиснути на неї двічі); обираємо інструмент **Поворот** у вкладці **Построения/Преобразования** або на панелі інструментів; мишею вказуємо центр O , причому можна обрати вже існуючу точку чи створити нову (замість цього можна натиснути **Enter**, і відкриється діалог властивостей повороту, у якому різними способами можна задати центр та кут); вказуємо або створюємо три точки A, B, C , які задають кут повороту.

У результаті на екрані з'явиться динамічний об'єкт, позначений, який дозволяє не тільки змінювати параметри перетворення, а й виконувати дане перетворення ще раз. Зауважимо, що за замовчуванням поворот здійснюється проти годинникової стрілки.

Розробниками середовищ **Живая геометрия** і **Математический конструктор** передбачено побудову динамічного сліду, що надає можливість не лише розв'язувати задачі на геометричні перетворення, а й на по-

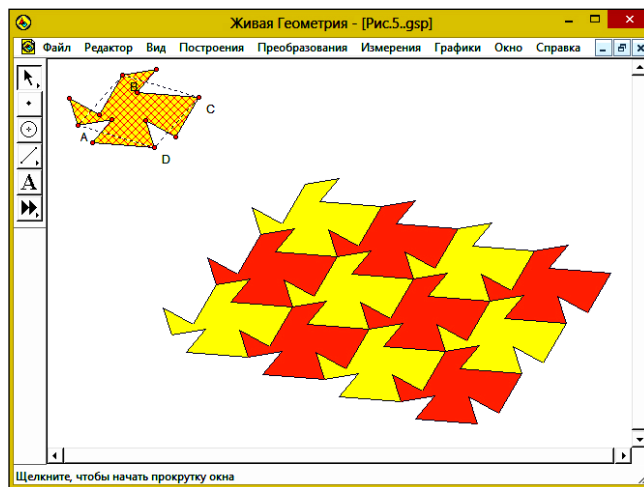


Рис. 5. Замощення площину у середовищі Живая Геометрия

чатку вивчення теми реалізувати ідеї, описані нами із залученням середовища *DG*.

Приклад 4 (Математический конструктор). Зовні сторін правильного трикутника побудовані квадрати. Показати, що їх центри є вершинами правильного трикутника [11, с. 51].

Будуємо правильний трикутник *ABC*. На стороні *BC* будуємо *Квадрат1*. При повороті навколо точки *O* (центр трикутника) на кути 120° , 240° та 360° фігура *Квадрат1* переходить у фігури *Квадрат2*, *Квадрат3* та у себе відповідно. При цих поворотах центр першого квадрата (точка O_1) переходить у точки O_2 , O_3 та у себе (рис. 6). Відрізки O_1O_2 , O_2O_3 , O_3O_1 рівні між собою, що можна побачити при зміні положення точок вихідного трикутника: довжини сторін трикутника $O_1O_2O_3$ залишаються однаковими.

Приклад 5 (Математический конструктор). Побудувати рівносторонній трикутник *ABC*, вершина *A* якого знаходиться у заданій точці, вершина *B* лежить на заданому колі, а вершина *C* лежить на заданій прямій.

Припустимо, що трикутник *ABC* вже побудовано. За умовою задачі точка *A* є заданою, точки *B* та *C* потрібно знайти. За властивістю правильного трикутника точка *C* переходить у точку *B* при повороті на кут -60° навколо точки *A*. Але точка *C* повинна лежати на даній прямій, тому точка *B* як образ точки *C* при повороті, повинна лежати на образі даної прямої. Тому для побудови точки *B* достатньо повернути задану пряму навколо точки *A* на кут -60° . Точка перетину одержаної прямої і даного кола буде шуканою точкою *B*.

Оскільки точок перетину прямої з колом може бути 0, 1 або 2, то такою ж буде і кількість розв'язків, які, зокрема, можна дослідити, динамічно змінюючи конструкцію (рис. 7).

Візьмемо одну з точок перетину (вершину *B* майбутнього трикутника) і з'єднаємо її з точкою *A*. Якщо наші міркування правильні, то третя вершина правильного трикутника попаде на задану пряму. Будуємо два кола з центрами у точках *A* і B_1 радіусом AB_1 та *A* і B_2 радіусом AB_2 . Точки перетину кіл розташовані на заданій прямій. Вимірювання сторін трикутників показує, що вони рівносторонні (рис. 8).

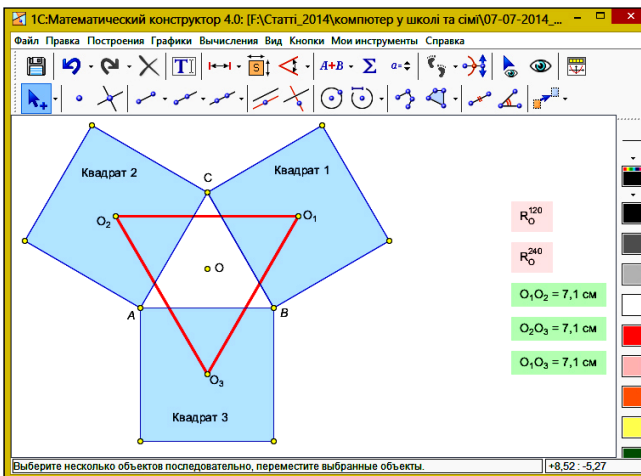


Рис. 6. Модель до прикладу 4 у середовищі Математический конструктор

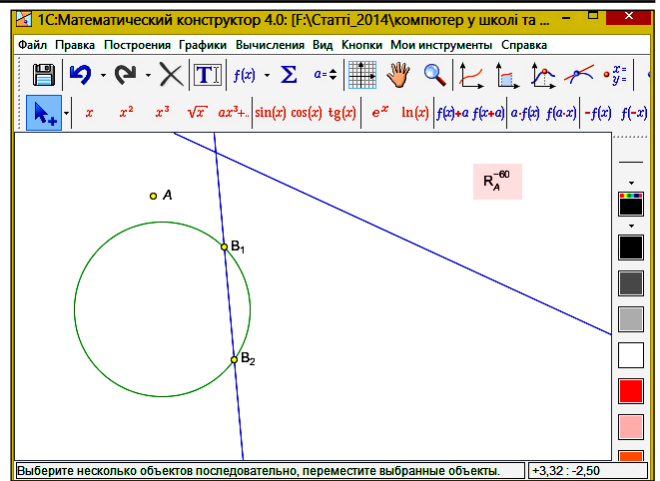


Рис. 7. Модель до прикладу 5 у середовищі Математический конструктор

Зауважимо що у програмі **Математический конструктор** присутній інструмент **Проверить ответ**, залучення якого дозволяє перевіряти правильність побудови — особливості роботи з цим інструментом описані нами у роботі [12].

5. У програмі GeoGebra на головній панелі можна знайти такі інструменти перетворень: симетрія відносно прямої, симетрія відносно точки, відображення відносно кола, поворот навколо точки на кут, паралельне перенесення, гомотетія відносно точки.

До особливостей даного середовища слід віднести динамічну рухомість образу при змінах прообразу. Іншими словами, у разі руху вихідної фігури автоматично рухається і результуюча фігура. При цьому автономний рух результуючої фігури неможливий. Також неможливо динамічно змінити параметри перетворення — вони задаються окремо.

Особливістю цього середовища є наявність рядка **Ввод** (внизу інтерфейсу), де можна задати перетворення командами:

- Перенести**[<Об'єкт>, <Вектор>]
- Перенести**[<Вектор>, <Початкова точка>]
- Повернути**[<Об'єкт>, <Кут>, <Точка>]
- Гомотетія**[<Об'єкт>, <Коефіцієнт гомотетії>, <Центр гомотетії>]

Приклад 6 (GeoGebra). Дано дві прямі *a* і *b*, які перетинаються, і відрізок *CD*. Побудувати паралелограм зі стороною *CD* і вершинами *A* і *B*, які лежать відповідно на прямих *a* та *b*. [13, с. 5].

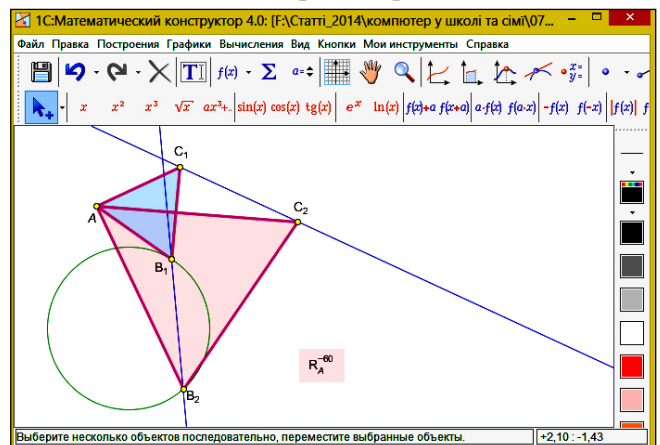


Рис. 8. Шукані трикутники до прикладу 5 у середовищі Математический конструктор

Ідея розв'язання. Вектори AB і CD рівні (рис. 9), тому при паралельному перенесенні на вектор CD точка A перейде в точку B . Але образ точки A повинен належати образу прямої a , тому точка B є точкою перетину прямої b з прямою a' , у яку переходить пряма a .

Отже, спочатку будемо образ прямої a (пряму a') і точку B . Потім перенесемо точку B на вектор $-CD$ і отримемо точку A . З'єднуємо точки й отримемо шуканий паралелограм $ABDC$. Зауважимо, що точку A можна було одержати побудовою паралельної до сторони BD прямої.

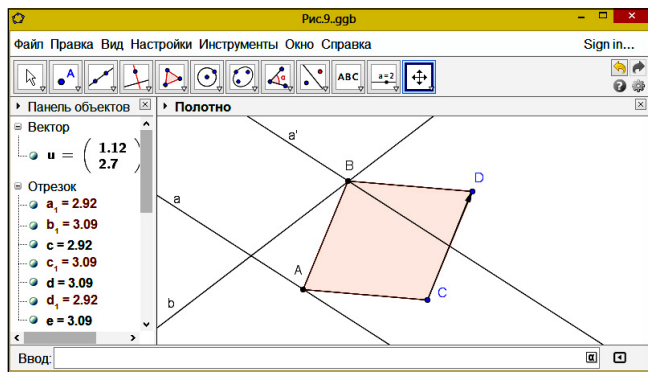


Рис. 9. Модель до прикладу 6 у середовищі GeoGebra

Оскільки прямі a та b перетинаються, то прямі a та a' паралельні, і задача завжди має єдиний розв'язок.

Нами розглянуті лише окремі інтерактивні геометричні середовища. Кожне з них має власні сильні сторони, але вважаємо, що коректно можна висловлюватися на користь одного із засобів лише після урахування багатьох чинників, серед яких і рівень підготовки класу, й уподобання самого учителя математики, і бажання адміністрації йти назустріч потребам навчального процесу тощо.

Разом з цим дослідження можливостей використання програм динамічної математики і напрацювання методик їх використання тривають. Однозначного висновку на користь одного зі згаданих програмних засобів науковці й методисти не дають, тому «власні» знайомство і використання комп'ютерних інструментів у професійній діяльності чекають на кожного сучасного вчителя математики. Цим не тільки підвищується власний досвід використання програмних засобів підтримки навчання математики, а й розширюється коло тих методичних питань, які наразі є відкритими і потребують подальшого дослідження і вирішення. Тому сподіваємось, що наші рекомендації допоможуть вчителям математики критично оцінити можливості розглянутих інтерактивних середовищ з метою раціонального вибору тієї чи іншої програми під час вивчення геометричних перетворень на площині.



Семенихіна Е. В., Друшляк М. Г. Геометрические преобразования на плоскости и компьютерные инструменты их реализации

Анотация. В статье сделан анализ наиболее популярных среди украинских учителей интерактивных геометрических сред, а именно Математический Конструктор, Живая Математика, GRAN, DG, GeoGebra, с точки зрения возможности их использования при изучении геометрических преобразований на плоскости. Описано, какие именно виды геометрических преобразований

поддерживает та или иная среда, и подробно объяснено, как они реализованы. Выделены преимущества и недостатки каждой из программ динамической геометрии в рамках данной темы с целью их дальнейшего рационального выбора при решении задач. Приведены примеры детального решения как задач на доказательство, так и задач на построение с использованием геометрических преобразований.

Ключевые слова: интерактивная геометрическая среда, программа динамической геометрии, геометрические преобразования, компьютерные инструменты, Gran2d, DG, Живая геометрия, Математический конструктор, GeoGebra.



Semenikhina Olena V., Drushlyak Marina G. Geometric transformations of the plane and computer tools for their implementation

Abstract. The article analyzes the most popular among Ukrainian teachers interactive geometry environments, namely MathKit, Live Mathematics, Gran, DG, GeoGebra, from the point of view of possibility of their use in the study of geometric transformations of the plane. Authors describe what types of geometric transformations are supported by one or the other environment, and explain in details how they are implemented. Advantages and disadvantages of each dynamic geometry software in the framework of this topic for the further their rational choice in solving problems are dedicated. Examples of detailed solutions as of proof problems and of construction problems using geometric transformations are seen.

Keywords: interactive geometry environment, dynamic geometry software, geometric transformation, MathKit, Live Mathematics, Gran2d, DG, GeoGebra.

Література

1. Пакет динамической геометрии DG [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://dg.osenkov.com/index_ru.html.
2. 1С Company: Образовательные продукты [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://obr.1c.ru/mathkit>. — Назва з екрану.
3. Институт новых технологий. Образовательные программные продукты. Развивающая предметная среда [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.int-edu.ru>.
4. GeoGebra [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.geogebra.org>.
5. Cabrilog. Innovative Maths Tolls [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.cabri.com>.
6. The Geometer's Sketchpad. Resource Center [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.dynamicgeometry.co.uk/>.
7. GeoNext [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://geonext.uni-bayreuth.de>. (in German).
8. Бурда М.І. Геометрія: навч. посіб. для 8–9 кл. шк. з поглибл. вивч. математики / М.І.Бурда, Л.М. Савченко. — К.: Освіта, 2004. — 240 с.
9. Мерзляк А.Г. Геометрія: підручник для 9 класу з поглибленим вивченням математики / Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. — Х.: Гімназія, 2004. — 272 с.
10. Храповицкий И.С. Методические рекомендации по применению электронного учебного издания Geometer's Sketchpad в учебном процессе общеобразовательных учреждений / Храповицкий И.С. — 2008. — 71 с.
11. Дорофеев С.Н. Геометрические преобразования в примерах и задачах / С.Н.Дорофеев. — Пенза: Информационно-издательский центр ПГУ, 2002. — 189 с.
12. Семенихіна О.В., Друшляк М.Г. Про інструменти контролю в ІГС Математичний конструктор // Інформаційні технології в освіті: Матеріали IV Всеукраїнської науково-практичної конференції (24–25 квітня 2014 р.). — Мелітополь: Вид-во МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2014. — С. 319–329.
13. Заславский А.А. Геометрические преобразования / Заславский А.А. — М.: МЦНМО, 2004. — 86 с.