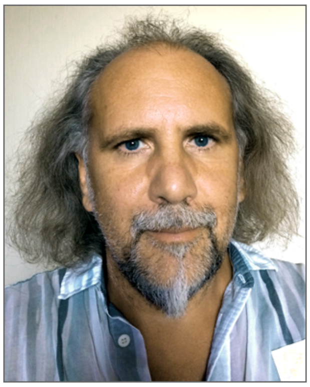
УДК 378.016:004.42

ЗАСТОСУВАННЯ ВІЛЬНО ПОШИРЮВАНОГО ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Горошко Юрій Васильович,
завідувач кафедри інформатики і обчислювальної техніки Чернігівського національного педагогічного університету імені Т. Г. Шевченка.
Цибко Ганна Юхимівна,
доцент кафедри інформатики і обчислювальної техніки Чернігівського національного педагогічного університету імені Т. Г. Шевченка.



Анотація. У статті розглядаються особливості методики навчання розв'язування задач лінійного програмування з використанням вільно поширюваних програмних засобів LibreOffice Calc та Maxima.
Ключові слова: навчання інформатики, лінійне програмування, LibreOffice Calc, Maxima.

Професійна підготовка майбутніх учителів у сучасних умовах передбачає набуття ними компетентностей щодо відбору і застосування програмного забезпечення, відповідного цілям навчального процесу. Тенденція до застосування відкритих стандартів інформаційних технологій для практичного використання масовим користувачем сприяє зростанню ролі вільно поширюваного програмного забезпечення, зокрема й в освіті і відкриває перед педагогами перспективи щодо розробки методик навчання користування таким програмним забезпеченням. Серед офісних пакетів прикладних програм, що містять, зокрема, широко використовувані нині прикладні програми: текстовий процесор, табличний процесор, програму створення презентацій, дедалі більшої популярності набуває серед педагогів вільно поширюваний кросплатформенний офісний пакет **Libre Office**. Серед пакетів комп'ютерної математики чільне місце за популярністю серед педагогів посідає вільно поширювана кросплатформенна програма **Maxima** [1].

Серед задач, які мають уміти розв'язувати майбутні вчителі інформатики, з досвіду навчання, найбільш складними для них виявляються задачі лінійного програмування, тому далі розглянемо це питання детальніше. Відзначимо також, що навчання розв'язування задач лінійного програмування передбачено у навчальній програмі поглибленого вивчення інформатики для учнів 10–11-их класів загальноосвітніх навчальних закладів [3].

Переходячи до розгляду питань, пов'язаних з такими задачами, доцільно актуалізувати знання майбутніх учителів інформатики з цієї теми, що вивчається у курсі алгебри.

Лінійне програмування — математична дисципліна, присвячена теорії й практичним методам розв'язування екстремальних задач на множинах n-векторного простору, заданих системами лінійних рівнянь і нерівностей. Лінійне програмування є найпоширенішим методом оптимізації. Його використовують, зокрема для розв'язування задач на:

- раціональне використання сировини й устаткування;
- прокладання оптимальних логістичних маршрутів;
- планування оптимальних економічних показників підприємств;
- складання оптимального плану перевезень;
- оптимальне розкроювання листових матеріалів тощо.

Властивості задач лінійного програмування можна інтерпретувати також як властивості многогранників, геометрично формулювати й доводити їх.

Історично склалося так, що математичні дослідження економічних проблем проводилися ще у XIX ст. Лінійне програмування, як метод розв'язування нового класу екстремальних задач з обмеженнями, був сформульований Леонідом Віталійовичем Канторовичем у 1939 році в його книжці «Математические методы организации и планирования производства». Тут він описав ефективний метод розв'язування, чим і заснував основи лінійного програмування, як нового етапу економіко-математичних методів. У 1949 р. американський математик Джордж Данциг розробив ще один метод розв'язування задач лінійного програмування — симплекс-метод. А термін *програмування* він застосував у сенсі *планування*.

Наведемо загальне математичне формулювання основної задачі лінійного програмування.

Дано систему m-лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,\\ &\ldots\\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{aligned} \qquad (*)$$

і лінійна функція

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots\ x_n \ge 0.$$

Треба знайти такий невід'ємний розв'язок системи (*) при якому функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ набуває найменшого значення.

Рівняння (*) називають *системою обмежень даної задачі*; функцію $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — *цільовою функцією* (або *лінійною формою*).

Слід зазначити, що систему обмежень у вигляді нерівностей завжди можна звести до системи у вигляді рівностей (способом уведення фіктивних додаткових невідомих).

Крім того, оскільки

$$\min f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -\max(-f(x_1, x_2, \ldots, x_n)),$$

то будь-яка задача на максимізацію зводиться до задачі на мінімізацію (і навпаки). Тому наведену вище постановку задачі лінійного програмування можна вважати загальною.

Зазначимо, що у студентів практично завжди виникають утруднення під час розв'язування таких задач, у випадку, коли задача сформульована у термінах предметної галузі.

Для розв'язання цієї проблеми доцільно запропонувати їм таку послідовність дій для розв'язування задачі за допомогою комп'ютера:

- складання формальної математичної моделі задачі;
- застосовування тієї чи іншої програми для реалізації побудованої моделі;
- трактування отриманих результатів у термінах предметної галузі.

Для демонстрації застосування системи комп'ютерної математики і табличного процесора до розв'язування подібних задач доцільно запропонувати узагальнені приклади задач на розподіл ресурсів і транспортної задачі.

Завдання 1. Для виготовлення виробів трьох видів: X, Y, Z використовують три види сировини: I, II, III. У таблиці задано норму витрат сировини на один виріб кожного виду, ціна одного виробу, а також кількості кожного виду сировини, які можна використати (табл. 1). Скільки виробів кожного виду потрібно виготовити, щоб отримати максимальний прибуток? (Усі величини наведені в деяких умовних одиницях, що залежать від конкретної предметної галузі) [2].

Умова задачі лінійного програмування

Таблиця 1

	X	Y	Z	Запаси сировини
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Ціна одного виробу	9	10	16	

Розв'язування завдання 1

Сформулюємо математичну модель задачі.

Нехай невідомі величини: x, y, z — шукані кількості виробів видів X, Y, Z. Тоді цільову функцію f через ці невідомі можна подати так: $f=9x+10y+16z$, де f — прибуток від продажу всіх виробів.

Отже, задачу лінійного програмування можна сформулювати так: знайти цілі невід'ємні значення x, y, z, для яких досягається максимум функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а x, y, z мають задовольняти обмеження (зумовлені обмеженими запасами кожного виду сировини):

$18x+15y+12z \le 360$;
$6x+4y+8z \le 192$;
$5x+3y+3z \le 180$.

За отриманою математичною моделлю легко отримати розв'язок, застосувавши прикладну програму **Maxima**. Для цього потрібно спочатку завантажити у цій програмі модуль для розв'язування задач лінійного програмування: **load("simplex");**

Далі потрібно скористатися функцією: **minimize_lp(цільова функція, [список обмежень])**, додатково вказавши необхідність отримання тільки невід'ємних розв'язків:

```
nonegative_lp=true;
maximize_lp(9*x+10*y+16*z,
[18*x+15*y+12*z<=360,
6*x+4*y+8*z<=192,
5*x+3*y+3*z<=180]),
nonegative_lp=true;
```

У результаті отримаємо розв'язок

[400,[z=20,y=8,x=0]],

де перше число — мінімальне значення цільової функції, а далі — відповідні значення змінних.

Опишемо тепер хід розв'язування цієї задачі з використанням табличного процесора **Calc**.

У файлі документа табличного процесора **Calc** сформуємо на аркуші **Розподіл ресурсів** області з даними величинами і області для шуканих величин (рис. 1).

	A	B	C	D	E	F
1		X	Y	Z	Запаси сировини	Витрати
2	I	18	15	12	360	
3	II	6	4	8	192	
4	III	5	3	3	180	
5	Ціна одного виробу	9	10	16		
6	Кількість					
7	Прибуток					

Рис. 1. Зразок робочої області для розв'язування Завдання 1

У клітинки **B6; C6; D6** потрібно ввести нулі — початкові значення шуканих величин ***x, y, z***.

1. Побудуємо ***цільову функцію***. Оскільки вона є сумою прибутків, а кожен прибуток є добутком кількості одиниць кожного виробу на його вартість, то послідовність дій може бути такою: спочатку у клітинки **B7; C7; D7** введемо формули для обчислення значень прибутків від продажу виробів видів **X, Y, Z,** а саме у клітинку **B7** уведемо формулу **=B5*B6,** і скопіюємо її у клітинки **C7** та **D7**, а вже потім у клітинку **E7** введемо формулу для обчислення значення цільової функції — загального прибутку від продажу виробів видів **X, Y, Z,** а саме: **=SUM(B7:D7).**

2. Залишилося побудувати ***функції витрат сировини***. Для сировини I-го виду така функція є сумою витрат на вироби кожного виду, а витрати на вироби кожного виду є добутком витрат на один вибір і кількості виробів. Таким чином, це буде формула:

=SUMPRODUCT(B2:D2;$B$6:$D$6),

яку потрібно записати у клітинку **F2** і скопіювати у клітинки **F3** та **F4**.

Слід звернути увагу студентів на те, що далі засобами **Calc** у клітинці **E7** буде шукатися максимальне значення цільової функції шляхом підбору значень у діапазоні **B6:D6**.

Для цього застосуємо надбудову **Calc** для знаходження розв'язку задачі, вибравши команду меню **Засоби/Розв'язувач**. У додатковому вікні **Пошук рішення** встановимо такі значення параметрів (рис. 2):

Цільова комірка: $E$7
Оптимізувати результат: Максимум
Змінювані комірки: $B$6:$D$6
Умови обмеження:
$F$2<=$E$2
$F$3<=$E$3

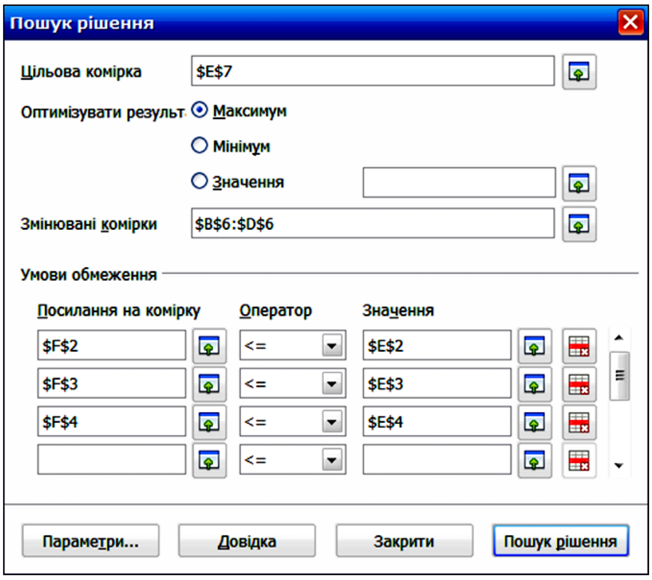


Рис. 2

$F$4<=$E$4

Для встановлення додаткових параметрів пошуку розв'язку задачі потрібно натиснути кнопку **Параметри.** У вікні **Параметри** вибрати **Механізм пошуку рішення: LibreOffice лінійний пошук рішення;** активізувати опції **Прийняти змінні як невід'ємні, Прийняти змінні як цілочисельні.**

У результаті застосування засобу **Пошук рішення** у клітинках таблиці встановлено такі значення:

$$x=0;\ y=8;\ z=20;\ f=400.$$

Отже, для одержання максимального прибутку треба виробити: 8 виробів виду **Y**, 20 виробів виду **Z**, вироби **X** не виробляти.

Максимальний прибуток від продажу продукції складає 400. При цьому запаси сировини видів **I** і **II** використані повністю, а з 180 одиниць сировини **III** використано лише 84 одиниці.

Завдання 2. Транспортна задача. Зі складів **C1, C2** відбувається перевезення продукції до магазинів **M1, M2, M3, M4.** У таблиці 2 задано вартість перевезення одиниці продукції з кожного складу до кожного магазину, а також потреби магазинів і запаси продукції на складах. Скласти план перевезень так, щоб витрати на транспортування продукції були найменшими. Усі величини наведені в деяких умовних одиницях, що залежать від конкретної предметної галузі.

Умова транспортної задачі

Таблиця 2

	M1	M2	M3	M4	Запаси на складах
C1	4	3	5	6	100
C2	8	2	4	7	200
Потреби магазинів	50	100	75	75	

Розв'язування завдання 2

Нехай невідомі величини: x_{ij} — кількість одиниць продукції, перевезених зі складу з номером *i* до магазину з номером *j*. Цільову функцію *f* через ці невідомі можна подати так:

$$f=4x_{11}+3x_{12}+5x_{13}+6x_{14}+8x_{21}+2x_{22}+4x_{23}+7x_{24},$$

де *f* — загальна вартість перевезень.

Отже, транспортну задачу можна сформулювати так: знайти цілі невід'ємні значення x_{ij}, $i=1, 2$; $j=1..4$, для яких досягається мінімум функції

$$f=4x_{11}+3x_{12}+5x_{13}+6x_{14}+8x_{21}+2x_{22}+4x_{23}+7x_{24},$$

а x_{ij} мають задовольняти обмеження, зумовлені запасами кожного виду сировини:

$$4x_{11}+3x_{12}+5x_{13}+6x_{14}\le 100;$$
$$8x_{21}+2x_{22}+4x_{23}+7x_{24}\le 200,$$

а також обмеження, зумовлені тим, що потреби магазинів у продукції мають бути задоволені повністю:

$$x_{11}+x_{21}=50;$$
$$x_{12}+x_{22}=100;$$
$$x_{13}+x_{23}=75;$$
$$x_{14}+x_{24}=75.$$

Розв'яжемо задачу, застосувавши програму **Maxima.**

```
minimize_lp(4*x11+3*x12+5*x13+6*x14+
8*x21+2*x22+4*x23+7*x24,
[x11+x12+x13+x14<=100,
x21+x22+x23+x24<=200,
x11+x21=50,
x12+x22=100,
x13+x23=75,
x14+x24=75]),
nonegative_lp=true;
```

Отримаємо:

[1175,[x24=25,x23=75,x22=100,x21=0,x14=50, x13=0,x12=0,x11=50]].

Розв'яжемо цю ж задачу за допомогою табличного процесора **Calc.** Сформуємо області з даними величинами й області для шуканих величин (рис. 3).

	A	B	C	D	E	F
1		M1	M2	M3	M4	Запаси
2	C1	4	3	5	6	100
3	C2	8	2	4	7	200
4	Потреби	50	100	75	75	
5						
6		M1	M2	M3	M4	Відправлено
7	C1					
8	C2					
9	Привезено					
10	Вартість					

Рис. 3. Зразок робочої області для розв'язування Завдання 2

У діапазон **B7:E8** введемо нулі — початкові значення шуканих величин x_{ij}. У клітинки **B9, C9, D9, E9** введемо формули для обчислення кількості продукції, завезеної до кожного магазину, а саме у клітинку **B9** введемо формулу **=B7+B8** і скопіюємо у три наступні, вони знадобляться для формування обмежень щодо задоволення потреб кожного магазина у продукції.

У клітинки **F7, F8** введемо формули для обчислення кількості продукції, вивезеної з кожного складу, а саме у клітинку **F7** введемо **=SUM(B7:E7),** а у клітинку **F8** формулу **=SUM(B8:E8),** вони знадобляться для формування обмежень щодо запасів на кожному складі.

Сформуємо цільову функцію, яка є сумою вартостей перевезення товарів у кожний магазин.

Вартість перевезення у перший магазин обчислимо за формулою **=SUMPRODUCT(B2:B3;B7:B8),** яку розмістимо у клітинці **B10**, а потім скопіюємо її у діапазон **C10:E10**. Тепер можна у клітинку **F10** ввести цільову функцію — формулу **=SUM(B10:E10).**

Застосуємо надбудову **Calc**, що має назву **Пошук рішення**, для знаходження розв'язку задачі, для цього у діалоговому вікні **Пошук рішення** встановимо такі значення параметрів:

Цільова комірка: $F$10
Оптимізувати результат: Мінімум
Змінювані комірки: $B$7:$E$8
Умови обмеження:
$B$9=$B$4
$C$9=$C$4
$D$9=$D$4
$E$9=$E$4 (обмеження щодо задоволення потреб магазинів),

$F$7≤$F$2, $F$8≤$F$3 (обмеження щодо запасів на складах).

Як і в попередній задачі, у вікні **Параметри** слід вибрати **Механізм пошуку рішення: LibreOffice лінійний пошук розв'язку;** активізувати опції **Прийняти змінні як невід'ємні, Прийняти змінні як цілочисельні.**

У результаті застосування засобу **Пошук рішення** у клітинках таблиці встановлено такі значення:

$$x_{11}=50;\ x_{12}=0;\ x_{13}=0;\ x_{14}=50;$$
$$x_{21}=0;\ x_{22}=100;\ x_{23}=75;\ x_{24}=25.$$

Отже, для мінімізації витрат на перевезення необхідно зі складу **C1** перевезти по 50 одиниць продукції у магазини **M1** і **M4**, а зі складу **C2** перевезти 100 одиниць у магазин **M2**, 75 — у **M3** і 25 — у **M4**. За такого плану перевезень повністю вичерпуються запаси складів і повністю задовольняються потреби магазинів. Загальна вартість перевезень становить 1175 одиниць.

Наведемо приклади завдань для самостійного розв'язування 2-х рівнів складності. Задачі першого рівня складності розв'язати простіше, оскільки початкові дані вже зведено в таблицю.

В умовах задач другого рівня складності такої таблиці немає, отже, студенти мають скласти її самостійно.

Рівень 1

Умова задачі. Для виготовлення трьох видів швейних виробів **П1, П2, П3** фабрика використовує 4 види тканин **С1, С2, С3, С4.** Запаси тканин, технологічні норми витрат тканин на кожний виріб і ціна одиниці виробу наведені в таблиці 3. Скласти план випуску виробів, що забезпечує максимальний прибуток.

Таблиця 3

Швейні вироби	Види тканин і норми їх витрат на 1 виріб, м				Ціна одного виробу, грн.
	С1	С2	С3	С4	
П1	3	4	0	1	150
П2	2	0	2	5	150
П3	1	2	3	0	200
Запаси тканин	150000	170000	100000	200000	

Рівень 2

Умова задачі. Є три види сировини — **А, В, С,** які використовуються для виробництва трьох видів продуктів: **I, II** і **III**. У наявності є 650 одиниць сировини **А**, 850 одиниць сировини **В** і 400 одиниць сировини **С.**

Продукт I складається з 3-х одиниць сировини **А**, 3-х одиниць сировини **В** і 1-єї одиниці сировини **С.**

Продукт II складається з 2-х одиниць сировини **А**, 2-х одиниць сировини **В** і 2-х одиниць сировини **С.**

Продукт III складається з 2-х одиниць сировини **А**, 1-єї одиниці сировини **В** і 2-х одиниць сировини **С.**

На виробництво **продукту I** витрачається 4 одиниці енергії, **продукту II** — 3 одиниці, **продукту III** — 5 одиниць. Ліміт енергії на підприємстві — 1200 одиниць. Прибуток від виробництва одиниці **продукту I** складає 5 грн., **продукту II** складає 8 грн., а від одиниці **продукту III** — 7.5 грн. Скільки одиниць кожного продукту потрібно виробляти, щоб отримати максимальний прибуток?

Висновки

Запропонований у статті підхід до навчання студентів розв'язування задач лінійного програмування і використання відповідного вільно поширюваного програмного забезпечення вже декілька років використовується під час вивчення дисципліни «Інформатика» на фізико-математичному факультеті ЧНПУ імені Т. Г. Шевченка. Результат виявився позитивним. Побудова формальної математичної моделі задачі дозволяла студентам легко отримати розв'язок у програмі **Maxima**, який вони потім використовували для перевірки правильності розв'язання цієї ж задачі засобами табличного процесора. Диференціація завдань за складністю також принесла позитивний результат: кожен студент міг адекватно оцінити рівень вимог і співставити із своїм рівнем знань, обравши відповідні завдання із запропонованих у роботі. Відсоток студентів, які стали успішно розв'язувати задачі лінійного програмування, збільшився. Позитивним є також те, що студенти поступово почали використовувати вільно поширюване програмне забезпечення не тільки на заняттях, але й удома, за їх відзивами.

* * *

Горошко Ю. В., Цибко А. Е. Использование свободно-распространяемого програмного обеспечения для решения задач линейного программирования

Аннотация. В статье рассматриваются особенности методики обучения решению задач линейного программирования с использованием свободно распространяемых программных средств LibreOffice Calc и Maxima.

Ключевые слова*:* обучение информатике, линейное программирование, LibreOffice Calc, Maxima.

* * *

Horoshko Y., Tsybko G. The use of free software for solve linear programming problems

Abstract. The article deals with the peculiarities of methods of teaching computer science with the use of free applications LibreOffice Calc and Maxima.

Keywords: teaching computer science. linear programming, LibreOffice Calc, Maxima.

Література

1. *Горошко Ю. В.* Проблеми та особливості впровадження вільного програмного забезпечення в навчальний процес / Ю. В. Горошко, А. О. Костюченко, М. І. Шкардибарда // Комп'ютер у школі та сім'ї. — 2010. — № 7. — С. 8–10.
2. *Глинський Я. М.* Практикум з інформатики : навч. посіб. / Я. М. Глинський. — Львів : Деол, СПД Глинський, 2004. — 248 с.
3. Навчальна програма поглибленого вивчення інформатики для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс]. — Режим доступу : http://kiev.bhv-osvita.com/index/navchalni_programi/0–6.