УДК 004.4

ЗАСТОСУВАННЯ КОМП'ЮТЕРА В ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ СТОХАСТИКИ

Біляй Іванна Михайлівна,

викладач кафедри інформаційних технологій і програмування Інституту інформатики НПУ імені М.П. Драгоманова, bilivam100@gmail.com.

Анотація. У статті наведено аналіз деяких програмних засобів, у тому числі авторських розробок, призначених для підтримки навчання математики, зокрема стохастики, у школі і в педагогічному університеті, зокрема для побудови графіків функцій, у тому числі функцій розподілу статистичних ймовірностей, використання яких сприяє кращому засвоєнню матеріалу і його візуалізації під час навчання стохастики майбутніх вчителів математики.

Ключові слова: стохастика, функція розподілу ймовірностей, програмні засоби, GRAN, Mathcad.

Опрацювання результатів експериментів і спостережень з великою кількістю даних і розв'язування прикладних задач із значними за обсягом статистичними сукупностями експериментально отриманих результатів переконують у доцільності використання інформаційно-комунікаційних технологій для інтенсифікації процесу навчання й активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів і студентів. Використання програмних засобів GRAN-1, EXCEL, оснащених зручним інтерфейсом і не вибагливих до ресурсів комп'ютера, дає можливість легко унаочнити процедуру опрацювання значних за обсягом статистичних даних, і тим самим ознайомити студентів із застосуванням різних методів розв'язування задач. Використання сучасних інформаційних технологій під час вивчення стохастики створює умови для інтелектуального розвитку студентів, розкриття їхнього творчого потенціалу, покращення професійної підготовки щодо обраної профільної орієнтації навчання, підвищення рівня обізнаності в галузі теоретичних, зокрема математичних, основ інформатики, формування в них системи ключових, галузевих і предметних, загальнокультурних і професійних компетентностей, зокрема математичних та інформатичних.

Метою написання статті є огляд основних програмних засобів для побудови графіків функцій, зокрема функцій розподілу ймовірностей, а також навести приклади таких графіків для демонстрації процесу подрібнення інтервалів та граничного переходу від поінтервального розподілу ймовірностей до неперервного, коли кусково-стала функція розподілу ймовірностей за нескінченного подрібнення інтервалів і за обмеженої щільності розподілу ймовірностей поступово наближається до абсолютно неперервної функції і сам поінтервальний розподіл ймовірностей стає абсолютно неперервним.

У задачах математичного моделювання часто необхідно будувати функції розподілу ймовірностей на множинах значень випадкових величин. Зазвичай основою для такої побудови є набір спостережених значень випадкової величини. У процесі розгляду моделі іноді потрібно уточнити отримані результати шляхом подрібнення інтервалів, за якими розподіляються ймовірності. Таке уточнення можна здійснити лише за наявності необхідних експериментально отриманих даних. Проте за відсутності таких даних можна скористатись усередненими гіпотетичними значеннями ймовірностей попадання в інтервали чи усередненою гіпотетичною щільністю розподілу ймовірностей для побудови відповідних графіків функції розподілу. Для цього інтервали, на яких задана усереднена щільність розподілу ймовірностей, діляться на менші за довжиною й обчислюються нові значення функції розподілу на правій межі кожного інтервалу. Якщо в процесі подрібнення інтервалів їх довжина буде прямувати до нуля, а усереднена гіпотетична щільність поінтервального розподілу статистичних ймовірностей залишатиметься обмеженою, то функція розподілу поступово буде наближатися від кусково-сталої до неперервної, оскільки прирости функції розподілу ймовірностей за обмеженої щільності розподілу ймовірностей на інтервалах нескінченно малої довжини будуть нескінченно малі з наближенням довжин інтервалів до нуля прирости функції розподілу ймовірностей в кінці кожного інтервалу також прямуватимуть до нуля.

Розглянемо приклади візуального подання процесу подрібнення інтервалів з використанням різних програмних засобів. Системи комп'ютерної математики характеризуються наявністю потужних обчислювальних алгоритмів та алгоритмів візуального відображення даних. Так можна, використовуючи вбудовані засоби програмування, побудувати динамічну модель процесу, що розглядається. Недоліками використання систем комп'ютерної математики для демонстрації є переобтяженість додатковими функціями, що відволікає увагу від суті розглядуваного прикладу. Наприклад, Mathcad – система комп'ютерної алгебри, орієнтована на оформлення документів з динамічним наповненням. У Mathcad використовуються спільні з Maple пакети обчислень, так користувач може переносити проекти з однієї системи в іншу.

Розглянемо приклад.

Нехай $\Omega_x=[0,5)$ на множині значень випадкової величини задано поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей:

$[a_{i-1}, a_i)$	$[0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$
$P^*_{nX}([a_{i-1}, a_i))$	0.05	0.20	0.50	0.20	0.05

Графік усередненої [1] щільності $f^*_{nX}(x)$ цього розподілу статистичних ймовірностей за інтервалами,

$$[i-1,i),\ i\in\overline{1,5},$$

на множині $\Omega=[0,5)=[0,1)\cup[1,2)\cup[2,3)\cup[3,4)\cup[4,5)$ подано на рис. 1.

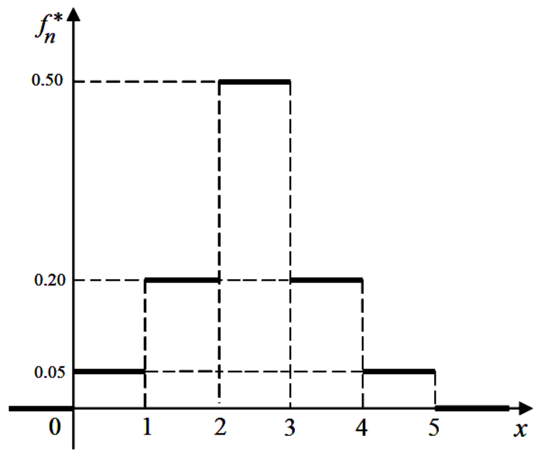


Рис. 1

Побудуємо функцію розподілу ймовірностей $F_X(x)$.

Виходячи з означення функції розподілу ймовірностей [2], дістанемо, що для будь-якої точки x, що лежить в інтервалі $(-\infty,1]$, буде $F_X(x)=0$, оскільки для $x\in(-\infty,1]$ буде

$$F_X(x)=P_X((-\infty,x))=\sum_{[a_{i-1},a_i)\subset(-\infty,x)} P_X([a_{i-1},a_i))=0\,.$$

Для довільної точки $x\in(1,2]$ буде $F_X(x)=0{,}05$, оскільки для таких x функція набуватиме значення

$$F_X(x)=P_X((-\infty,x))=\sum_{[a_{i-1},a_i)\subset(-\infty,x)} P_X([a_{i-1},a_i))=P_X([0,1))=0{,}05.$$

Коли точка x лежатиме в інтервалі $(2,3]$, тоді $F_X(x)=0{,}25$, оскільки для таких x буде

$$F_X(x)=P_X((-\infty,x))=\sum_{[a_{i-1},a_i)\subset(-\infty,x)} P_X([a_{i-1},a_i))=$$
$$=P_X([0,1))+P_X([1,2))=0{,}05+0{,}20=0{,}25.$$

Для $x\in(3,4]$ буде $F_X(x)=0{,}75$, оскільки для таких x функція $F_X(x)$ набуватиме значення

$$F_X(x)=P_X((-\infty,x))=\sum_{[a_{i-1},a_i)\subset(-\infty,x)} P_X([a_{i-1},a_i))=$$
$$=P_X([0,1))+P_X([1,2))+P_X([2,3))=0{,}05+0{,}20+0{,}50=0{,}75.$$

Для всіх $x\in(4,5]$ матимемо $F_X(x)=0{,}95$, тому що для таких x буде

$$F_X(x)=P_X((-\infty,x))=\sum_{[a_{i-1},a_i)\subset(-\infty,x)} P_X([a_{i-1},a_i))=$$
$$=P_X([0,1))+P_X([1,2))+P_X([2,3))+P_X([3,4))=$$
$$=0{,}05+0{,}20++0{,}50+0{,}20=0{,}95.$$

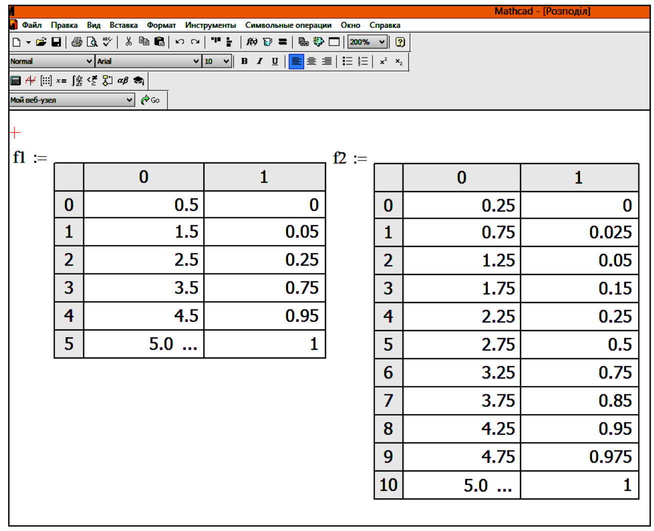
Аналогічно для будь-якого x з інтервалу $(3,\infty)$ матимемо

$$F_X(x)=P_X((-\infty,x))=\sum_{[a_{i-1},a_i)\subset(-\infty,x)} P_X([a_{i-1},a_i))=$$
$$=P_X([0,1))+P_X([1,2))+P_X([2,3))+P_X([3,4))+P_X([4,5))=$$
$$=0{,}05+0{,}20+0{,}50+0{,}20+0{,}05=1.$$

Отже функція розподілу ймовірностей в розглядуваному випадку матиме вигляд:

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 1,\\ 0{,}05, & \text{коли } 1<x\le 2,\\ 0{,}25, & \text{коли } 2<x\le 3,\\ 0{,}75, & \text{коли } 3<x\le 4,\\ 0{,}95, & \text{коли } 4<x\le 5,\\ 1, & \text{коли } 5<x.\end{cases}$$

Для того, щоб зобразити графік функції розподілу ймовірностей $F_X(x)$ скористаємось програмою Mathcad. Для цього в меню програми обираємо послугу **Меню/Вставка/Таблиця** і заповнюємо її координатами середин інтервалів і відповідними значеннями функції розподілу ймовірностей на цих інтервалах (f1, рис. 2). Для побудови графіка за введеними даними обираємо пункт меню **Вставка/Графік** (рис. 3).



f1 :=

	0	1
0	0.5	0
1	1.5	0.05
2	2.5	0.25
3	3.5	0.75
4	4.5	0.95
5	5.0 ...	1

f2 :=

	0	1
0	0.25	0
1	0.75	0.025
2	1.25	0.05
3	1.75	0.15
4	2.25	0.25
5	2.75	0.5
6	3.25	0.75
7	3.75	0.85
8	4.25	0.95
9	4.75	0.975
10	5.0 ...	1

Рис. 2

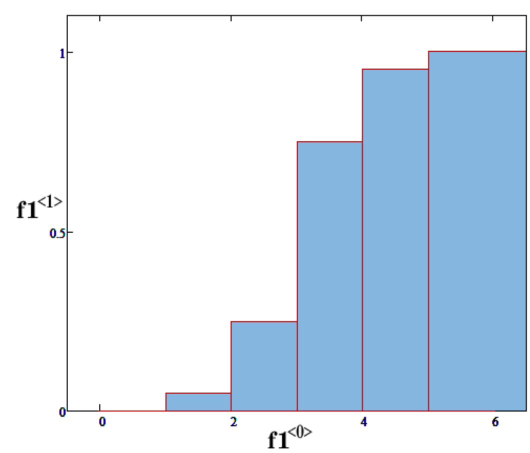


Рис. 3

Поділивши довжину інтервалів навпіл, отримаємо нові значення функції розподілу, за якими аналогічно створюємо ще одну таблицю (див. f2, рис. 2) та перебудовуємо графік функції розподілу ймовірностей (рис. 4).

Для демонстрації такого процесу подрібнення інтервалів також можна скористатись табличним процесором, зокрема Microsoft Excel.

Використовуючи вбудований майстер діаграм, користувач може створити аналогічне зображення, маючи значення функції розподілу ймовірностей. Для цього створюємо таблицю, показану на рис. 5. Виділяємо діапазон клітинок **C4:D9** і обираємо послугу **Вставка/Діаграми** та визначаємо тип діаграми, наприклад, **Стовпчаста/Плоска стовпчаста діаграма/Гістограма з накопиченням.** У разі потреби змінюємо колір, підписи осей, легенди тощо.

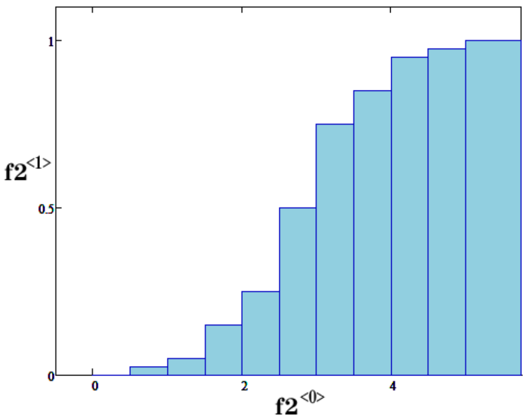


Рис. 4

Проте для побудови наступного кроку подрібнення користувачеві потрібно буде обчислити значення функції розподілу самостійно і знову побудувати нову діаграму (рис. 5, 6).

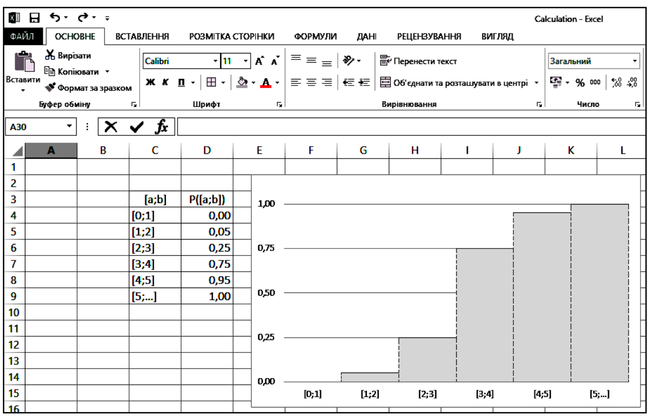


Рис. 5

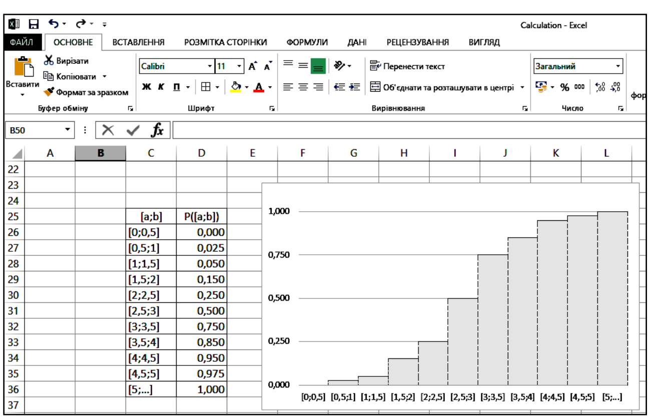


Рис. 6

Побудована модель є статичною. Для побудови наступних кроків потрібно обчислити значення функції розподілу ймовірностей на кожному інтервалі. У разі значного збільшення їх кількості такий процес може зайняти відносно багато часу. Основною перевагою такого методу є те, що для його використання користувачеві не потрібні знання додаткових програмних засобів чи мов програмування.

Більш доцільним у процесі розв'язування задач розглянутого типу є використання педагогічних програмних засобів, зокрема Gran1. Використовуючи вбудовані засоби динамічної зміни параметра (наприклад p1, рис. 7) та побудови функції розподілу ймовірностей [3], користувач може побудувати потрібний розподіл і, змінюючи значення параметра, отримати новий графік функції розподілу ймовірностей на множині інтервалів (рис. 8), не обчислюючи значення функції $F_X(x)$ в кінцях нових інтервалів, вони за програмою Gran1 обчислюються автоматично.

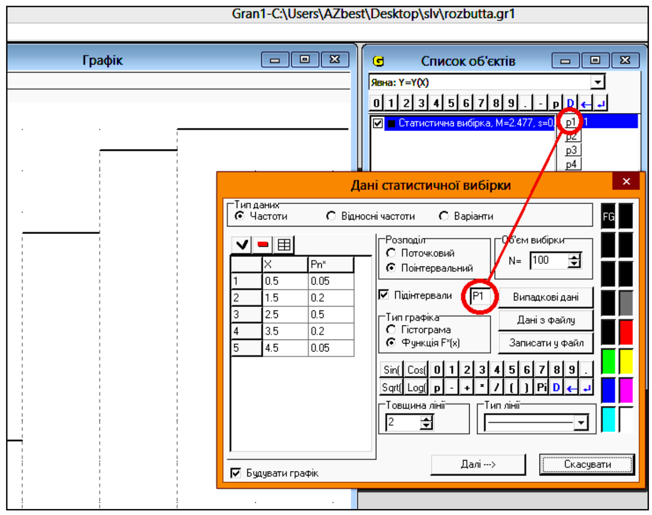


Рис. 7

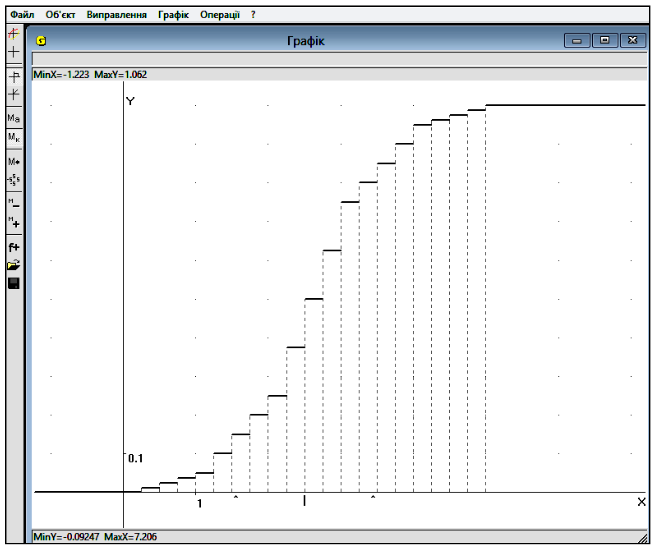


Рис. 8

Ще одним способом демонстрації такої моделі може бути використання спеціально створених програм. Перевагами таких програм є те, що для їх використання користувачеві не потрібно знати синтаксис систем комп'ютерної математики чи використовувати комерційні програмні продукти з платною ліцензією.

Наприклад, розглянемо розроблену автором цієї статті програму Function та продемонструємо основні принципи роботи з нею.

У головному вікні програми вказуємо множину $\Omega_X=[a,b)$ елементарних подій (параметри a, b) та кількість інтервалів (n). У таблиці в правому нижньому кутку робочого вікна програми вказуємо значення статистичних ймовірностей попадання в інтервали $[a_{i-1},a_i)$, такі, що$[a_{i-1},a_i)\cap[a_{j-1},a_j)=\varnothing$, коли

$$i \neq j,\ \bigcup_{i=1}^{k}[a_{i-1},a_i)=\Omega_X.$$

Натискаємо кнопку **Побудувати**. У результаті отримаємо графік функції даного розподілу статистичних ймовірностей (рис. 9).

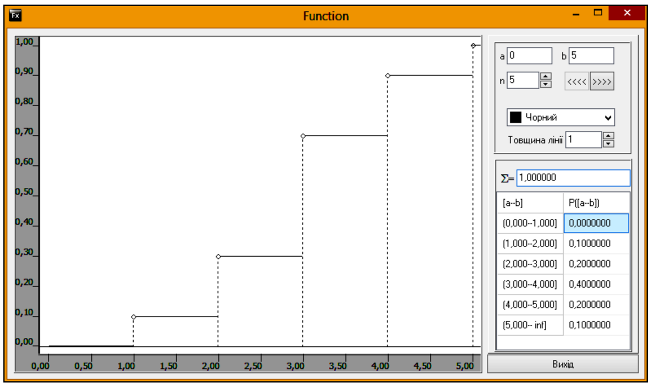


Рис. 9

Для того щоб поділити множину $\Omega=[0,5)$ на 25 інтервалів довжиною 0.2, змінюємо значення кількості інтервалів на 25 (параметр n) і натискаємо кнопку >>>>. Продовжуємо подрібнення інтервалів до $n=80$. Легко бачити, що за подальшого зменшення довжини інтервалів і за обмеженої усередненої (гіпотетичної) щільності розподілу ймовірностей графік функції поінтервального розподілу ймовірностей наближатиметься до графіка функції абсолютно неперервного розподілу узагальнених статистичних (гіпотетичних) ймовірностей (рис. 10).

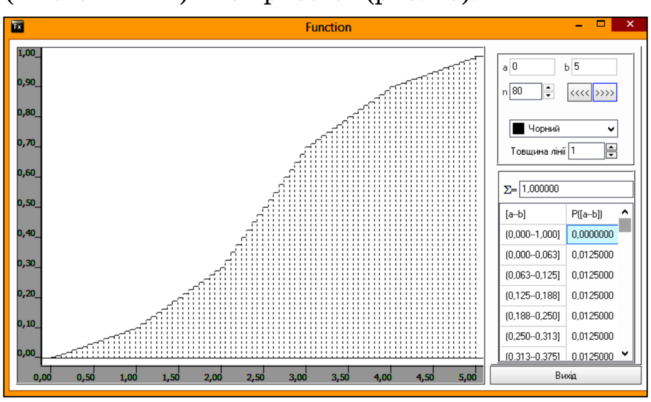


Рис. 10

Отже, за допомогою швидкої побудови графіків функцій розподілу можна легко зробити висновок, що не завжди за функцією розподілу статистичних ймовірностей можна визначити тип розподілу. Це залежить від структури подій $A\in S$ із простору подій S, на якому задана ймовірнісна міра P.

Наведені міркування свідчать про те, що за функцією розподілу ймовірностей встановити тип розподілу ймовірностей можна лише тоді, коли як простір елементарних подій розглядається множина всіх дійсних чисел, тобто $\Omega=R^1=(-\infty,\infty)$, як простір подій S розглядається σ-алгебра $B^\circ(R^1)$ борелівських підмножин множини Ω. Тоді $(-\infty,x)\in S$ для довільного $x\in(-\infty,\infty)$, $F(x)=P((-\infty,x))$ визначена за довільних $x\in(-\infty,\infty)$, і коли щільність розподілу ймовірностей обмежена і інтегровна функція, тоді $F(x)$ буде абсолютно неперервна [4].

Разом з тим під час практичних застосувань стохастики розглядають найчастіше поточкові та поінтервальні розподіли статистичних ймовірностей, іноді і в безкоординатних просторах з мірою, де розгляд функції розподілу ймовірностей взагалі втрачає смисл.

Використання відповідного програмного забезпечення дозволяє полегшити сприйняття теоретичних положень курсу стохастики. До того ж діяльність, опосередкована комп'ютером, сприяє розв'язуванню проблем формування у студентів продуктивних та творчих математичних умінь, поглибленню професійної спрямованості навчання математичних дисциплін.

Практика свідчить, що пакети програм, подібні до GRAN1, є досить зручним засобом унаочнення навчального матеріалу та виконання конкретних завдань під час вивчення курсу стохастики в школі.

Використання засобів сучасних ІКТ в процесі навчання стохастики дає змогу приділити більше уваги постановці задач, дослідженню розв'язків, виявленню закономірностей та причинно-наслідкових зв'язків перебігу різноманітних процесів і проявів явищ, переклавши на комп'ютер виконання технічних та нецікавих рутинних операцій.

* * *

Биляй И. М. Использование компьютера в процессе обучения стохастике

Аннотация. В статье приведен анализ некоторых программных средств, в том числе авторских разработок, предназначенных для поддержки обучения математике, в частности стохастики, в школе и в педагогическом университете, в частности для построения графиков функций, в том числе функций распределения статистических вероятностей, использование которых способствует лучшему усвоению материала и его визуализации при обучении стохастики будущих учителей математики.

Ключевые слова: стохастика, функция распределения вероятностей, программные средства, GRAN, Mathcad.

* * *

Bileay I. Use of computers in teaching stochastics

Annotation. The present article provides the analysis of some software, including authoring software, destined to support teaching of mathematics, particularly stochastics, at school and in the pedagogical university, particularly for graphing functions, including statistical cumulative distribution functions, whose application promotes better mastering of educational material and its visualization during teaching stochastics future mathematics teachers.

Keywords: stochastic, cumulative distribution function, software, GRAN, Mathcad.

Література

1. Теорія ймовірностей і математична статистика. Підручник для студентів фізико-математичних та інформатичних спеціальностей педагогічних університетів / М.І. Жалдак, Н.М. Кузьміна, Г.О. Михалін. — Київ: Видавництво НПУ імені М.П. Драгоманова, 2015. — 708 с.
2. Стохастика: посібник для вчителів / М.І. Жалдак, І.М. Біляй. — Київ: Видавництво НПУ імені М.П. Драгоманова, 2013. — 302 с.
3. Початки стохастики. Факультативний курс для учнів старшої школи / М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, І.М. Біляй. – Київ: Видавництво НПУ імені М.П. Драгоманова, 2014. — 162 с.
4. Математика з комп'ютером: посібник для вчителів / М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко, Є.Ф. Вінниченко. — Київ: Видавництво НПУ імені М.П. Драгоманова, 2015. — 340 с.